**О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський**

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для студентів вищих технічних навчальних закладів

Тернопіль
2010

УДК 519.6

О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський **Чисельні методи.** Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2010. – 164с.

Посібник містить теоретичний матеріал з розділів: дії з наближеними числами, методи розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, методи розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, апроксимація функцій, чисельне диференціювання та інтегрування, наближене розв'язування диференціальних рівнянь, методи оптимізації. Наведено приклади розв'язання типових задач, проведено порівняльний аналіз чисельних методів щодо точності, доцільності застосування та обсягу обчислювальної роботи.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**Автори:** ***Самборська Олександра Миколаївна,***
***Шелестовський Борис Григорович***

**Рецензенти:**

***Ленюк М.П.*** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету НТУ "Харківський політехнічний університет".

***Недашковський М.О.*** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри автоматизованих систем і програмування Тернопільського національного економічного університету.

***Рудницький В.Б.*** – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету.

***Рекомендовано***
*Міністерством освіти і науки України*
*як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,*
*які навчаються за напрямом підготовки*
*«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*
*(лист Міністерства освіти і науки України № 1/11-6045 від 24.07.2009 р.)*

# ВСТУП

Інтенсивний розвиток техніки й подальше впровадження сучасних розділів математики в інженерні дослідження істотно підвищили вимоги до математичної підготовки фахівців інженерних спеціальностей. За допомогою математичного моделювання вирішення науково-технічного завдання зводиться до розв'язування математичної задачі, яка моделює даний процес. Для розв'язання математичних задач застосовують такі основні групи методів: графічні, аналітичні та чисельні.

Суть графічних методів полягає в тому, що розв'язок задачі шукають шляхом геометричних побудов.

При використанні аналітичних методів розв'язок записують у вигляді точної формули. Проте в багатьох випадках неможливо знайти точний розв'язок поставленої задачі.

Тому великого значення набули чисельні методи, які дозволяють звести розв'язування математичної задачі до виконання скінченної кількості арифметичних дій над числами, при цьому потрібні результати отримують у конкретній числовій формі. З появою швидкодіючих електронних обчислювальних машин почався період бурхливого розвитку чисельних методів та їх упровадження в практику.

Майбутні інженерні фахівці повинні ґрунтовно оволодіти основними поняттями та методами обчислювальної математики. Одним із найважливіших завдань вищої школи є навчити майбутніх спеціалістів застосовувати набуті знання при розв'язуванні прикладних задач.

Мета даного навчального посібника – допомогти студентам засвоїти основні чисельні методи розв'язування математичних задач та особливості їх застосування.

В кожному розділі, крім теоретичних відомостей, подано розв'язування типових задач з поясненням і аналізом методу розв'язування. Це дає можливість студентам як стаціонарної, так і заочної форм навчання самостійно працювати з посібником, опрацьовувати відповідний матеріал та успішно розв'язувати задачі розрахункових і контрольних робіт.

При написанні посібника використано джерела, вказані у списку літератури.

# РОЗДІЛ 1

# ПОХИБКА РЕЗУЛЬТАТУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

## 1.1. Джерела та класифікація похибок

На різних етапах розв'язування задачі чисельним методом виникають похибки, які змінюють результат обчислень. Важливим питанням при застосуванні чисельних методів є оцінювання точності одержаних результатів. Розглянемо джерела похибок на окремих етапах розв'язування деякої науково-технічної задачі.

Процес розв'язування задачі починається з постановки задачі та побудови її математичної моделі. Модель повинна правильно описувати основні закони даного фізичного процесу. Якщо в математичній моделі, яка прийнята для опису цього процесу чи явища, не враховані деякі важливі риси даної задачі, то така модель може внести похибки у результати обчислень. Крім того, можуть бути неточними вхідні дані задачі.

Похибки, що відповідають цим причинам, називають неусувними, оскільки вони не можуть бути зменшені в процесі розв'язування задачі. Часто неусувні похибки поділяють на дві частини: а) неусувною похибкою називають лише похибку, що є наслідком неточності задавання вхідних числових даних; б) похибку, що є наслідком невдалої побудови математичної моделі задачі, називають похибкою математичної моделі.

Чисельний метод, який використовують для розв'язування задачі, також є джерелом похибки, яку називають похибкою чисельного методу. Зазвичай, похибку чисельного методу можна регулювати, зокрема її можна зменшити шляхом зміни деякого параметра (наприклад, кроку інтегрування, числа членів ряду, які враховують при обчисленнях, і т.д.). Похибки методів будемо розглядати при аналізі конкретних чисельних методів.

При виконанні арифметичних операцій та при зображенні у комп'ютері вхідних та вихідних величин математичної задачі роблять заокруглення. Похибку, що виникає при цьому, називають похибкою заокруглень.

**Приклад.** Розглянемо задачу про коливання математичного маятника. Математичним маятником називають матеріальну точку $M$ маси $m$, яка підвішена на нерозтяжній нитці завдовжки $l$ і рухається під дією сили тяжіння. Очевидно, що точка $M$ рухається по дузі кола радіуса $l$. Тому положення точки $M$ на дузі цього кола в момент часу $t$ можна охарактеризувати кутом $\theta(t)$ відхилення нитки від вертикалі. Будемо вважати, що сила опору середовища пропорційна швидкості зміщення маятника.

Нехай маятник починає рух у момент часу $t_0$. Потрібно обчислити кут відхилення маятника від положення рівноваги в момент часу $t_1$, якщо в початковий момент часу $t_0$ $\theta(t_0)=\theta_0,\ \theta'(t_0)=\theta'_0$.

Диференціальне рівняння, яке описує коливання даного маятника, має вигляд

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\lambda\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0, \qquad (1.1)$$

де $g$– прискорення сили тяжіння, а коефіцієнт $\lambda$ характеризує опір середовища.

Якщо ми приймемо таку математичну модель, то розв’язок задачі вже матиме неусувну похибку, зокрема тому, що справжній опір середовища залежить від швидкості зміщення маятника не зовсім лінійно. Ще одним джерелом неусувної похибки є похибки в обчисленнях вхідних даних задачі: $t_0, l, g, \lambda, \theta(t_0), \theta'(t_0)$.

Неусувну похибку неможливо регулювати в процесі розв’язування задачі, її можна зменшити лише у випадку точнішого моделювання фізичної задачі та точнішого визначення вхідних параметрів.

Диференціальне рівняння (1.1) не розв’язується в явному вигляді, тому для його розв’язування потрібно застосувати чисельний метод. Отже, в процесі розв’язування даної задачі виникає похибка методу.

Крім того, при виконанні обчислень потрібно робити заокруглення чисел, що призводить до появи похибки заокруглень.

Нехай $\alpha$ – точне значення шуканого параметра (кута відхилення маятника від положення рівноваги в момент часу $t_1$); $\tilde{\alpha}$ – значення цього параметра, що відповідає побудованій математичній моделі, тобто значення $\theta(t_1)$ розв’язку рівняння (1.1), який задовольняє задані початкові умови; $\tilde{\alpha}_н$– наближений розв’язок задачі, одержаний за допомогою чисельного методу в припущенні відсутності заокруглень; $\tilde{\alpha}_н^*$– наближений розв’язок задачі, отриманий даним чисельним методом при реальних обчисленнях. Тоді

$\Delta_1=|\alpha-\tilde{\alpha}|$ – неусувна похибка;

$\Delta_2=|\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_н|$ – похибка методу;

$\Delta_3=|\tilde{\alpha}_н-\tilde{\alpha}_н^*|$ – похибка заокруглень;

$\Delta_0=|\alpha-\tilde{\alpha}_н^*|$ – повна похибка розв’язку даної задачі.

Запишемо повну похибку $\Delta_0$ у вигляді

$$\Delta_0=\left|(\alpha-\tilde{\alpha})+(\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_н)+(\tilde{\alpha}_н-\tilde{\alpha}_н^*)\right|.$$

Оскільки модуль суми скінченної кількості чисел не перевищує суми модулів цих чисел, то одержимо

$$\Delta_0\le|\alpha-\tilde{\alpha}|+|\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_н|+|\tilde{\alpha}_н-\tilde{\alpha}_н^*|,\ \text{ тобто }\ \Delta_0\le\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3.$$

Отже, повна (глобальна) похибка розв'язку даної задачі не перевищує суми трьох доданків: неусувної похибки, похибки методу та похибки заокруглень.

## 1.2. Стійкість та коректність задачі. Збіжність чисельного методу

Розглянемо похибки вхідних даних задачі. Оскільки ці похибки неможливо зменшити в процесі розв'язування задачі, то потрібно принаймні дослідити їх вплив на точність остаточних результатів.

Нехай, розв'язавши задачу, ми знайшли за відомим значенням величини $x$ шукане значення величини $y$. Якщо величина $x$ має похибку $\Delta x$, то величина $y$ також матиме похибку $\Delta y$.

Задачу називають стійкою за вхідним параметром $x$, якщо розв'язок цієї задачі $y$ неперервно залежить від $x$, тобто малому приросту $\Delta x$ вхідного параметра $x$ відповідає малий приріст $\Delta y$ шуканої величини $y$.

Відсутність стійкості означає, що незначні похибки вхідних параметрів призводять до великих похибок розв'язку задачі або навіть до неправильного результату.

Нестійкі задачі називають також погано обумовленими задачами.

Ілюстрацією погано обумовленої задачі може бути приклад Д. Уілкінсона (див. [13], р.1, §1.3). Розглянемо многочлен 20-го степеня, коренями якого є числа $x_1 = 1, x_2 = 2, ..., x_{20} = 20$,

$$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + ... + 20!.$$

Якщо в модуль коефіцієнта другого члена $|a_{19}| = 210$ внести незначну похибку, яка дорівнює $2^{-23} \approx 0{,}00000012$, тобто за модуль цього коефіцієнта $|a_{19}|$ прийняти число $210{,}00000012$, а всі інші коефіцієнти многочлена не змінювати, то серед коренів цього незначно зміненого многочлена з'являться десять комплексних коренів. Причиною цього явища є нестійкість даної задачі.

Задачу називають поставленою коректно, якщо виконано три умови:
а) для будь-яких вхідних даних з деякого класу розв'язок задачі існує;
б) цей розв'язок єдиний;
в) розв'язок стійкий за вхідними даними.

Задача, яку розглядали вище, поставлена некоректно, оскільки вона нестійка за вхідними параметрами.

Некоректно поставленою задачею є, наприклад, задача наближеного диференціювання, бо вона також нестійка: близькість ординат двох кривих $y = f(x)$ та $Y = F(x)$ на відрізку $[a, b]$ не гарантує близькості на цьому відрізку похідних $f'(x)$ та $F'(x)$.

Для розв'язування некоректно поставлених задач застосовують в основному т. з. методи регуляризації. Ці методи полягають у заміні такої задачі коректно поставленою задачею, що містить деякий параметр, при прямуванні якого до нуля розв'язок цієї задачі переходить у розв'язок даної некоректно поставленої задачі.

При аналізі точності обчислювального процесу одним з найважливіших критеріїв є збіжність чисельного методу. Вона означає близькість отриманого наближеного розв'язку до точного розв'язку задачі. Розглянемо, наприклад, поняття збіжності ітераційного процесу, який полягає в тому, що для знаходження значення деякого параметра $a$ будують послідовні наближення (ітерації) $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Кажуть, що ця послідовність збігається до точного значення $a$, якщо при необмеженому зростанні числа ітерацій границя цієї послідовності існує і дорівнює $a$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В цьому випадку ітераційний процес називають збіжним.

Інший підхід до поняття збіжності застосовують у методах дискретизації, які полягають у заміні задачі з неперервними параметрами на задачу, в якій значення функції обчислюють у фіксованих точках. В цьому випадку під збіжністю чисельного методу розуміють прямування значень розв'язку дискретної моделі даної задачі до відповідних значень розв'язку цієї задачі при прямуванні до нуля параметра дискретизації (наприклад, кроку інтегрування).

Питання про збіжність кожного чисельного методу будемо розглядати при вивченні цього методу.

## 1.3. Запис чисел в ЕОМ

В ЕОМ числа записують в одній з наведених нижче форм. Перша форма запису – з фіксованою крапкою. Десяткові числа з фіксованою крапкою – це звична форма запису чисел 16.085, 943.5, 0.0147 і т. д.; тут замість десяткової коми ставиться крапка. Друга форма запису, найпоширеніша в ЕОМ, – з плаваючою крапкою.

Десяткове число $D$ у формі запису з плаваючою крапкою має вигляд

$$D = \pm\, m \cdot 10^n,$$

де $m$ і $n$ – відповідно мантиса числа і його порядок. Наприклад, число –547.8 можна записати у вигляді $-5478 \cdot 10^{-1}$, $-54.78 \cdot 10^1, -5.478 \cdot 10^2, -0.5478 \cdot 10^3$. Останній запис – це нормалізована форма числа з плаваючою крапкою. Отже, якщо мантису числа подати у вигляді

$$m = 0.d_1 d_2 ... d_k, \qquad (1.2)$$

де $d_1, d_2, ..., d_k$ – цифри, кожна з яких може приймати значення $0,1,2,...,9$, то при $d_1 \neq 0$ отримаємо нормалізовану форму числа з плаваючою крапкою. Надалі, кажучи про числа з плаваючою крапкою, будемо мати на увазі саме нормалізовану форму.

Ця форма поширюється також на числа, записані в інших системах числення. Число $M$ у системі числення з основою $q$ можна записати у вигляді

$$M = \pm 0.a_1 a_2 ... a_k \cdot q^n, \quad a_1 \neq 0.$$

З цього запису випливає, що підмножина дійсних чисел, з якою оперує конкретна ЕОМ, є скінченною й визначається розрядністю $k$ і межами порядку $n_1,\ n_2\ \ (n_1 \leq n \leq n_2)$.

Можна довести, що ця підмножина містить $2(\alpha - 1)(n_2 - n_1 + 1)q^{k-1} + 1$ чисел.

Межі порядку $n_1, n_2$ визначають обмеженість дійсних чисел за величиною, а розрядність $k$ – дискретність розподілу їх на відрізку числової осі. Наприклад, у випадку десяткових чисел при шестирозрядному представленні усі значення, які містяться в інтервалі між числами 0,753426 і 0,753427 представляються числом 0,753426 (при відкиданні інших розрядів без заокруглення). Різниця між двома сусідніми значеннями дорівнює одиниці останнього розряду. Числа, які менші від цієї різниці, сприймаються як машинний нуль. Таким чином, ЕОМ оперують із наближеними значеннями дійсних чисел.

## 1.4. Абсолютна та відносна похибки

Нехай $a$ – точне значення деякої величини, $a^*$ – її наближене значення, одержане в результаті обчислення або вимірювання.

Абсолютною похибкою $\Delta(a^*)$ наближеного числа $a^*$ називають абсолютну величину різниці між відповідним точним числом $a$ і даним наближеним значенням $a^*$.

$$\Delta\left(a^*\right) = \left| a - a^* \right|. \tag{1.3}$$

Оскільки точне значення величини зазвичай невідоме, то ми не можемо визначити абсолютну похибку $\Delta(a^*)$ за формулою (1.3). Тому розглядають оцінку зверху абсолютної похибки – граничну абсолютну похибку $\overline{\Delta}(a^*)$. Граничною абсолютною похибкою наближеного числа $a^*$ називають будь-яке число $\overline{\Delta}(a^*)$, яке не менше від абсолютної похибки цього числа $\Delta(a^*)$. Тобто, якщо $\overline{\Delta}(a^*)$ – гранична абсолютна похибка наближеного числа $a^*$, то справджується нерівність

$$\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta}(a^*). \tag{1.4}$$

Зауважимо, що величина граничної абсолютної похибки не визначається однозначно, бо за граничну абсолютну похибку наближеного числа $a^*$ можна взяти будь-яке число з нескінченної множини невід’ємних чисел $\overline{\Delta}(a^*)$, які задовольняють нерівність (1.4). На практиці за граничну абсолютну похибку вибирають, в міру можливості, найменше в кожному конкретному випадку число, яке задовольняє нерівність (1.4).

Отже, якщо $\overline{\Delta}(a^*)$ – гранична абсолютна похибка наближеного числа $a^*$, то

$$\left|a - a^*\right| \le \overline{\Delta}(a^*), \tag{1.5}$$

$$a^* - \overline{\Delta}(a^*) \le a \le a^* + \overline{\Delta}(a^*), \tag{1.6}$$

тобто точне число $a$ міститься на відрізку $[a^* - \overline{\Delta}(a^*);\ a^* + \overline{\Delta}(a^*)]$. Записуючи наближене число, отримане в результаті вимірювання, зазвичай вказують його граничну абсолютну похибку. Наприклад, якщо наближене значення довжини відрізка $l^*$=124 см з точністю до 0,5 см, то пишуть $l^*$=124см$\pm$0,5 см. Тут гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta}(l^*)$=0,5 см, а точне значення довжини $l$ відрізка міститься в межах 123,5см$\le l \le$124,5см.

Відносною похибкою $\delta(a^*)$ наближеного числа $a^*$ називають відношення абсолютної похибки $\Delta(a^*)$ до модуля відповідного точного числа $a$ $(a \ne 0)$, тобто

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} = \left|\frac{a - a^*}{a}\right|. \tag{1.7}$$

Оскільки точне число $a$ часто невідоме і $a \approx a^*$, то замість формули (1.7) користуємося формулою

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} = \left|\frac{a - a^*}{a^*}\right|. \tag{1.8}$$

Звідси отримуємо

$$\Delta(a^*) = \left|a^*\right| \delta(a^*). \tag{1.9}$$

Граничною відносною похибкою даного наближеного числа $a^*$ називається будь-яке число $\overline{\delta}(a^*)$, яке задовольняє нерівність

$$\delta(a^*) \le \overline{\delta}(a^*). \tag{1.10}$$

Тоді $\Delta(a^*) \le \left|a^*\right| \overline{\delta}(a^*)$ і за граничну абсолютну похибку наближеного числа $a^*$ можна взяти число

$$\overline{\Delta}(a^*) = \left|a^*\right| \overline{\delta}(a^*).$$

Звідси одержуємо

$$\overline{\delta}(a^*) = \frac{\overline{\Delta}(a^*)}{\left|a^*\right|}. \tag{1.11}$$

## 1.5. Значущі цифри. Кількість вірних знаків

Значущими цифрами наближеного числа називають усі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри. Наприклад, у числі 0.0058 дві значущі цифри, в числі 23.70 усі чотири цифри значущі. При зміні форми запису числа кількість значущих цифр не повинна змінюватися, тобто потрібно зберігати рівносильність перетворень. Наприклад, записи $3700 = 0.3700 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32.0$ рівносильні, а записи $3700 = 0.37 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32$ нерівносильні.

Кажуть, що $n$ перших значущих цифр наближеного числа є вірними у вузькому змісті, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці розряду, який виражається $n$-ою значущою цифрою, рахуючи зліва направо.

Наприклад, для точного числа $a = 45,96$, число $a^* = 46,00$ є наближеним значенням із трьома вірними цифрами у вузькому змісті, оскільки $\left| a - a^* \right| = 0,04 < \frac{1}{2} \cdot 0,1$.

Зауважимо, що в математичних таблицях усі значущі цифри є вірними. Наприклад, у п'ятизначних таблицях логарифмів абсолютна похибка мантиси не перевищує $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Термін "$n$ вірних знаків" не потрібно розуміти буквально, тобто так, що в даному наближеному числі з $n$ вірними знаками $n$ перших його значущих цифр співпадають із відповідними цифрами точного числа $a$.

Наприклад, наближене число $a^* = 19,997$, яке замінює точне число $a = 20$, має чотири вірних знаки, оскільки $\left| a - a^* \right| = 0,003 < \frac{1}{2} \cdot 0,01$, але усі цифри цих чисел різні.

**Зауваження.** Кажуть, що число $a^*$ є наближеним значенням точного числа $a$ з $n$ вірними знаками у широкому змісті, якщо абсолютна похибка $\Delta(a^*)$ не перевищує одиниці розряду, який виражається $n$-ою значущою цифрою наближеного числа $a^*$.

Наприклад, для точного числа $a = 231,2467$ число $a^* = 231,246$ є наближеним значенням із шістьма вірними знаками у широкому змісті, оскільки $\left| a - a^* \right| = 0,0007 < 0,001$. Надалі вірні знаки наближеного числа ми будемо розуміти у вузькому змісті, якщо не зроблено застереження про протилежне.

## 1.6. Заокруглення чисел

Розглянемо деяке наближене або точне число $a$. Часто виникає необхідність заокруглити це число, тобто замінити його іншим числом $a_1$ з меншою кількістю значущих цифр. Число $a_1$ вибирають так, щоб абсолютна похибка заокруглення $\left| a - a_1 \right|$ була мінімальною.

Щоб заокруглити число до $n$ значущих цифр, відкидають усі його цифри, які розміщені справа від $n$-ої значущої цифри.

При цьому:

1. якщо перша з відкинутих цифр менша від 5, то залишені цифри не змінюються;
2. якщо перша з відкинутих цифр більша від 5, то до останньої залишеної цифри додається одиниця;
3. якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і серед інших відкинутих цифр є ненульові, то остання залишена цифра збільшується на одиницю;
   якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і всі інші відкинуті цифри дорівнюють нулю, то остання залишена цифра не змінюється, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо вона непарна (правило парної цифри).

Похибка, яка виникає при заокругленні чисел, не перевищує половини одиниці десяткового розряду, який визначається останньою залишеною значущою цифрою.

**Приклад 1.1.** Заокруглюючи число $\pi = 3{,}1415926535...$ до п'яти, чотирьох і трьох значущих цифр, одержимо наближені числа: 3,1416; 3,142; 3,14 з абсолютними похибками, які менші відповідно від $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$; $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$; $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

**Приклад 1.2.** Заокруглити до чотирьох знаків після коми числа:

а) –1,00045; б) 37,009974; в) 5,403825; г) –19,5832506.

**Розв'язування.**

а) –1,0004; б) 37,0100; в) 5,4038; г) –19,5833.

## 1.7. Похибка суми та різниці

Розглянемо алгебраїчну суму $n$ чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$a = a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n .$$

Нехай $a_1^*, a_2^*, ... a_n^*$ – наближені значення відповідно чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Обчислимо наближене значення їх алгебраїчної суми $a^* = a_1^* \pm a_2^* \pm ... \pm a_n^*$ і оцінимо абсолютну похибку цього значення

$$\Delta\left(a^*\right) = \left|a - a^*\right| = \left|\left(a_1 - a_1^*\right) \pm \left(a_2 - a_2^*\right) \pm ... \pm \left(a_n - a_n^*\right)\right|.$$

Оскільки модуль алгебраїчної суми скінченної кількості чисел не перевищує суми модулів цих чисел, то одержимо:

$$\Delta\left(a^*\right) \le \left|a_1 - a_1^*\right| + \left|a_2 - a_2^*\right| + ... + \left|a_n - a_n^*\right|.$$

Враховуючи, що $\left|a_1 - a_1^*\right| = \Delta\left(a_1^*\right)$, $\left|a_2 - a_2^*\right| = \Delta\left(a_2^*\right)$, …, $\left|a_n - a_n^*\right| = \Delta\left(a_n^*\right)$, отримаємо формулу

$$\Delta(a^*) \le \Delta(a_1^*) + \Delta(a_2^*) + ... + \Delta(a_n^*). \qquad (1.12)$$

Отже, абсолютна похибка алгебраїчної суми скінченної кількості наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел.

Оскільки $\Delta\left(a_1^*\right) \le \bar{\Delta}\left(a_1^*\right)$, $\Delta\left(a_2^*\right) \le \bar{\Delta}\left(a_2^*\right)$, …, $\Delta\left(a_n^*\right) \le \bar{\Delta}\left(a_n^*\right)$, то

$$\Delta(a^*) \le \bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + ... + \bar{\Delta}(a_n^*).$$

Тому за граничну абсолютну похибку алгебраїчної суми наближених чисел можна взяти суму граничних абсолютних похибок доданків

$$\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + ... + \bar{\Delta}(a_n^*). \qquad (1.13)$$

Отже, при додаванні та відніманні наближених чисел їх граничні абсолютні похибки додають. Із формули (1.13) випливає, що гранична абсолютна похибка суми не може бути меншою від граничної абсолютної похибки найменш точного (у розумінні абсолютної похибки) із доданків. Тому, як би точно не були визначені інші доданки, неможливо за їх рахунок збільшити точність суми. Звідси випливає практичне правило додавання наближених чисел.

Щоб додати числа з різними абсолютними похибками, потрібно:

1) виділити числа, які мають найбільшу абсолютну похибку й залишити їх без зміни;
2) усі інші числа заокруглити за зразком виділених, зберігаючи 1 або 2 запасних десяткових знаки;
3) виконати додавання даних чисел, враховуючи всі збережені знаки;
4) одержаний результат заокруглити на 1 або 2 знаки.

Розглянемо суму наближених чисел $a^* = a_1^* + a_2^* + ... + a_n^*$, причому усі доданки мають однаковий знак. Нехай, наприклад, $a_i^* > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Граничну відносну похибку цієї суми обчислюємо за формулою

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{a^*} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + ... + \bar{\Delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + ... + a_n^*}. \qquad (1.14)$$

Оскільки $\bar{\delta}(a_i^*) = \dfrac{\bar{\Delta}(a_i^*)}{a_i^*}$, то $\bar{\Delta}(a_i^*) = a_i^* \cdot \bar{\delta}(a_i^*)$. Підставивши ці вирази у формулу (1.14), отримаємо

$$\bar{\delta}(a_i^*) = \frac{a_1^*\bar{\delta}(a_1^*) + a_2^*\bar{\delta}(a_2^*) + ... + a_n^*\bar{\delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + ... + a_n^*}. \qquad (1.15)$$

Нехай, $\bar{\delta}$ є найбільшою з граничних відносних похибок

$$\bar{\delta}\left(a_1^*\right),\ \bar{\delta}\left(a_2^*\right), ...,\ \bar{\delta}\left(a_n^*\right),$$

тобто $\bar{\delta}(a_i^*) \le \bar{\delta} \quad (i = 1, 2, ..., n)$. Тоді з формули (1,15) одержуємо

$$\bar{\delta}(a^*) \le \bar{\delta}. \qquad (1.16)$$

Якщо усі доданки мають однаковий знак, то гранична відносна похибка їх суми не перевищує найбільшої з граничних відносних похибок доданків.

Розглянемо різницю двох наближених чисел $a_1^* - a_2^*$. Граничну відносну похибку різниці обчислюємо за формулою

$$\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*) = \frac{\bar{\Delta}(a_1^* - a_2^*)}{\left|a_1^* - a_2^*\right|} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}\left(a_2^*\right)}{\left|a_1^* - a_2^*\right|}. \tag{1.17}$$

Якщо наближені числа $a_1^*$ та $a_2^*$ мало відрізняються одне від одного, тобто $a_1^* \approx a_2^*$, то гранична відносна похибка $\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*)$ може бути великою.

Обчислимо, наприклад, різницю двох чисел $a_1^*$=5,73525 і $a_2^*$=5,72312, кожне з яких має шість вірних значущих цифр.

$$a^* = a_1^* - a_2^* = 0{,}01213.$$

Різниця $a^*$ має чотири значущих цифри, з яких остання сумнівна, оскільки гранична абсолютна похибка цієї різниці

$$\bar{\Delta}\left(a^*\right) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}00001 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}00001 = 0{,}00001.$$

Обчислимо граничні відносні похибки чисел $a_1^*$, $a_2^*$ та їх різниці $a^*$:

$$\bar{\delta}\left(a_1^*\right) = \frac{0{,}000005}{5{,}73525} \approx 0{,}000001;$$

$$\bar{\delta}\left(a_2^*\right) = \frac{0{,}000005}{5{,}72312} \approx 0{,}000001;$$

$$\bar{\delta}\left(a^*\right) = \frac{0{,}00001}{0{,}01213} \approx 0{,}001.$$

У даному випадку гранична відносна похибка різниці приблизно в 1000 разів більша від граничних відносних похибок зменшуваного і від'ємника.

Тому при організації обчислювальних алгоритмів потрібно уникати віднімання близьких чисел; якщо можливо, то алгоритм потрібно змінити так, щоб уникнути втрати точності на деякому етапі обчислень. А якщо уникнути віднімання близьких чисел неможливо, слід зменшуване і від'ємник брати з достатньою кількістю вірних знаків. Наприклад, якщо відомо, що при відніманні чисел $a_1^*$ і $a_2^*$ перші $m$ значущих цифр зникнуть, а результат необхідно мати з $n$ вірними значущими цифрами, то $a_1^*$ і $a_2^*$ потрібно взяти з $m+n$ вірними значущими цифрами.

**Приклад 1.3.** Обчислити різницю $a^* = \sqrt{1{,}49} - \sqrt{1{,}47}$ з чотирма вірними знаками.

**Розв'язування.** Оскільки $\sqrt{1{,}49} = 1{,}220656...$ і $\sqrt{1{,}47} = 1{,}212436...$, то $a^* = 0{,}008220...$. Отже, $a^* = 8{,}220 \cdot 10^{-3}$.

Це обчислення можна виконати іншим способом, записавши $a^*$ у вигляді

$$a^* = \frac{0{,}02}{\sqrt{1{,}49} + \sqrt{1{,}47}}.$$

У цьому випадку достатньо взяти значення $\sqrt{1,49}$ і $\sqrt{1,47}$ тільки з чотирма вірними цифрами:

$$a^* = \frac{0,02}{1,220+1,212} = \frac{0,02}{2,433} = 8,220\cdot 10^{-3}.$$

## 1.8. Похибка добутку та частки

Нехай $u = ab$ – точне значення добутку двох чисел, $u^* = a^* b^*$ – його наближене значення. Абсолютна похибка добутку

$$\Delta\left(u^*\right) = \left|u - u^*\right| = \left|ab - a^* b^*\right| = \left|ab - a^* b + a^* b - a^* b^*\right| =$$
$$= \left|b\left(a - a^*\right) + a^*\left(b - b^*\right)\right| \le |b|\,\Delta\left(a^*\right) + \left|a^*\right|\,\Delta\left(b^*\right) \le \left(\left|b^*\right| + \Delta\left(b^*\right)\right)\Delta\left(a^*\right) + \left|a^*\right|\,\Delta\left(b^*\right).$$

Отже,

$$\Delta\left(u^*\right) \le \left|b^*\right|\,\Delta\left(a^*\right) + \left|a^*\right|\,\Delta\left(b^*\right) + \Delta\left(a^*\right)\Delta\left(b^*\right). \tag{1.18}$$

Для відносної похибки $\delta\left(u^*\right)$ одержуємо

$$\delta\left(u^*\right) \le \frac{\Delta\left(u^*\right)}{\left|a^* b^*\right|} \le \delta\left(a^*\right) + \delta\left(b^*\right) + \delta\left(a^*\right)\delta\left(b^*\right). \tag{1.19}$$

За граничну абсолютну похибку і граничну відносну похибку добутку можна взяти такі величини:

$$\overline{\Delta}\left(a^* b^*\right) = \left|b^*\right|\overline{\Delta}\left(a^*\right) + \left|a^*\right|\overline{\Delta}\left(b^*\right) + \overline{\Delta}\left(a^*\right)\cdot\overline{\Delta}\left(b^*\right), \tag{1.20}$$

$$\overline{\delta}\left(a^* b^*\right) = \overline{\delta}\left(a^*\right) + \overline{\delta}\left(b^*\right) + \overline{\delta}\left(a^*\right)\overline{\delta}\left(b^*\right), \tag{1.21}$$

де $\overline{\Delta}\left(a^*\right)$, $\overline{\Delta}\left(b^*\right)$ – граничні абсолютні похибки чисел $a^*$ і $b^*$; $\overline{\delta}\left(a^*\right)$, $\overline{\delta}\left(b^*\right)$ – їх граничні відносні похибки.

Розглянемо частку $v = \dfrac{a}{b}$. Нехай $v^* = \dfrac{a^*}{b^*}$ – її наближене значення.

Абсолютна похибка частки

$$\Delta\left(v^*\right) = \left|\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}\right| = \left|\frac{ab^* - ba^*}{bb}\right| = \left|\frac{ab^* - a^*b^* + a^*b^* - ba^*}{bb^*}\right| = \left|\frac{b^*\Delta(a^*) + a^*\Delta(b^*)}{bb^*}\right|.$$

Після деяких перетворень отримаємо

$$\Delta(v^*) \le \frac{\left|b^*\right|\Delta(a^*) + \left|a^*\right|\Delta(b^*)}{(1-\delta(b^*))\left|b^*\right|^2}. \tag{1.22}$$

Для відносної похибки –

$$\delta(v^*) \le \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}. \tag{1.23}$$

За граничну абсолютну похибку й граничну відносну похибку частки можна взяти такі величини:

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right)=\frac{\left|b^*\right|\bar{\Delta}(a^*)+\left|a^*\right|\bar{\Delta}(b^*)}{(1-\bar{\delta}(b^*))\left|b^*\right|^2}, \tag{1.24}$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right)=\frac{\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*)}{1-\bar{\delta}(b^*)}. \tag{1.25}$$

Оскільки граничні абсолютні та відносні похибки чисел $a^*$, $b^*$ малі в порівнянні з цими числами й граничні відносні похибки значно менші від одиниці, то замість формул (1.20), (1.21), (1.24), (1.25) використовують такі наближені формули:

$$\bar{\Delta}(a^*b^*)\approx\left|b^*\right|\bar{\Delta}(a^*)+\left|a^*\right|\bar{\Delta}(b^*), \tag{1.26}$$

$$\bar{\delta}\left(a^*\,b^*\right)\approx\bar{\delta}\left(a^*\right)+\bar{\delta}\left(b^*\right), \tag{1.27}$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right)\approx\frac{\left|b^*\right|\bar{\Delta}(a^*)+\left|a^*\right|\bar{\Delta}(b^*)}{\left|b^*\right|^2}, \tag{1.28}$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right)\approx\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*). \tag{1.29}$$

Отже, при множенні та діленні наближених чисел їх граничні відносні похибки додають.

**Зауваження.** Часто на практиці спочатку обчислюють граничні відносні похибки добутку й частки за формулами (1.27), (1.29), а потім визначають граничні абсолютні похибки добутку й частки:

$$\bar{\Delta}(a^*b^*)=\left|a^*b^*\right|\bar{\delta}(a^*b^*), \tag{1.30}$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^{*\,*}}{b}\right)=\left|\frac{a^*}{b^*}\right|\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right). \tag{1.31}$$

**Приклад 1.4.** Дано наближені числа $a_1^*=-0{,}723$; $a_2^*=4{,}3572$; $a_3^*=0,\ 89745$, усі написані знаки яких вірні. Знайти число $\dfrac{a_1^*\cdot a_2^*}{a_3^*}$ та визначити кількість вірних знаків у ньому.

**Розв'язування.** $b^*=-\dfrac{0{,}723\cdot 4{,}3572}{0{,}89745}=-3{,}51023$.

Знайдемо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(b^*)$. Для цього обчислимо спочатку граничну відносну похибку $\bar{\delta}(b^*)$.

$$\bar{\delta}(b^*)=\bar{\delta}(a_1^*)+\bar{\delta}(a_2^*)+\bar{\delta}(a_3^*).$$

Оскільки $\bar{\Delta}(a_1^*)=\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, $\bar{\Delta}(a_2^*)=\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\bar{\Delta}(a_3^*)=\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-5}$, то

$$\bar{\delta}(a_1^*)=\frac{0{,}0005}{0{,}723}=0{,}000692, \qquad \bar{\delta}(a_2^*)=\frac{0{,}00005}{4{,}3572}=0{,}000011,$$

$$\overline{\delta}(a_3^*) = \frac{0,000005}{0,89745} = 0,000006, \qquad \overline{\delta}(b^*) = 0,000709 \approx 0,0007.$$

Отже, $\overline{\Delta}(b^*) = \left|b^*\right| \cdot \overline{\delta}(b^*) \approx 0,0025 < 0,003.$

Оскільки гранична абсолютна похибка наближеного числа $b^*$ не перевищує 0,005, то це число має три вірні знаки, тобто $b^* = -3,51$ або, точніше,

$$b^* = -3,510 \pm 0,003.$$

## 1.9. Похибка функції

Нехай відомі похибки деякої системи величин. Потрібно знайти похибку даної функції від цих величин. Розглянемо, наприклад, функцію двох змінних $u = f\left(x,\, y\right)$, яка диференційовна в деякій області $G$.

Нехай числа $x_0^*$, $y_0^*$ є наближеними значеннями координат деякої точки $M_0(x_0,\, y_0) \in G$, причому замкнений прямокутник

$$\overline{R} = \left\{(x, y):\ \left|x - x_0^*\right| \le \overline{\Delta}(x_0^*);\ \left|y - y_0^*\right| \le \overline{\Delta}(y_0^*)\right\},$$

в якому містяться обидві точки $M_0(x_0,\, y_0)$ і $M_1(x_0^*, y_0^*)$, належить області $G$.

Зазвичай на практиці граничні абсолютні похибки $\overline{\Delta}\left(x_0^*\right)$ і $\overline{\Delta}\left(y_0^*\right)$ – малі величини. Тому абсолютну похибку функції $\Delta u$ можна замінити модулем її повного диференціала $d\,u$.

$$\Delta u \approx \left|\,d\,u\,\right| = \left|f_x'(x,y)\,\Delta x + f_y'(x,y)\,\Delta y\right|, \tag{1.32}$$

де $\Delta x$ і $\Delta y$ – прирости аргументів.

Використовуючи властивості модуля дійсного числа, отримаємо

$$\Delta u \approx \left|\,d\,u\,\right| \le \left|f_x'(x,y)\right|\left|\Delta x\right| + \left|f_y'(x,y)\right|\,\left|\Delta y\right|. \tag{1.33}$$

Нехай в даному прямокутнику $\overline{R}$

$$\left|f_x'(x,y)\right| \le C_1, \qquad \left|f_y'(x,y)\right| \le C_2.$$

За граничну абсолютну похибку значення функції $u_0^* = f(x_0^*,\, y_0^*)$ можна взяти величину

$$\overline{\Delta}(u_0^*) = C_1 \cdot \overline{\Delta}(x_0^*) + C_2 \cdot \overline{\Delta}(y_0^*). \tag{1.34}$$

На практиці застосовують наближену формулу

$$\overline{\Delta}(u_0^*) \approx \left|f_x'(x_0^*,\, y_0^*)\right|\overline{\Delta}(x_0^*) + \left|f_y'(x_0^*,\, y_0^*)\right|\overline{\Delta}(y_0^*). \tag{1.35}$$

Поділивши обидві частини нерівності (1.33) на $\left|\,u\,\right|$, одержимо

$$\delta\,u \le \left|\frac{f_x'(x,y)}{f(x,y)}\right|\,\left|\Delta x\right| + \left|\frac{f_y'(x,y)}{f(x,y)}\right|\,\left|\Delta y\right|,$$

тобто

$$\delta u \le \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,y)\right| \, |\Delta x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln f(x,y)\right| |\Delta y|. \qquad (1.36)$$

Якщо в прямокутнику $\overline{R}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,y)\right| \le C_3, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln f(x,y)\right| \le C_4,$$

то за граничну відносну похибку значення функції $u_0^*$ можна взяти величину

$$\overline{\delta}(u_0^*) = C_3\overline{\Delta}(x_0^*) + C_4\overline{\Delta}(y_0^*). \qquad (1.37)$$

На практиці застосовують наближену формулу

$$\overline{\delta}(u_0^*) \approx \left|\left(\frac{\partial \ln f(x,y)}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}}\right| \overline{\Delta}(x_0^*) + \left|\left(\frac{\partial \ln f(x,y)}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}}\right| \overline{\Delta}(y_0^*). \qquad (1.38)$$

**Зауваження.**

1. Нехай $u = x^n$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = \left(x_0^*\right)^n$. $\ln u = n \ln x$; $\left(\ln u\right)' = \dfrac{n}{x}$; $\overline{\delta}\left(x_0^*\right)^n = \dfrac{n}{\left|x_0^*\right|}\cdot\overline{\Delta}\left(x_0^*\right) = n\overline{\delta}\left(x_0^*\right)$.

Отже, гранична відносна похибка $n$-го степеня наближеного числа в $n$ разів більша від граничної відносної похибки цього числа.

2. Нехай $u = \sqrt[n]{x}$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = \sqrt[n]{x_0^*}$. $\ln u = \dfrac{1}{n}\ln x$; $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{nx}$; $\overline{\delta}\left(\sqrt[n]{x_0^*}\right) = \dfrac{1}{n\left|x_0^*\right|}\cdot\overline{\Delta}(x_0^*) = \dfrac{\overline{\delta}(x_0^*)}{n}$.

Тобто, гранична відносна похибка кореня $n$-го степеня з наближеного числа в $n$ разів менша від граничної відносної похибки цього числа.

**Приклад 1.5.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють $12{,}10 \pm 0{,}01$ і 25,21±0,01. Визначити кут $\alpha$, прилеглий до першого катета, й оцінити абсолютну та відносну похибки результату.

**Розв'язування.** Позначимо наближені значення катетів $a$ та $b$ через $a^*$ та $b^*$. За умовою задачі $a^*$= 12,10, $b^*$= 25,21, $\overline{\Delta}(a^*) = \overline{\Delta}(b^*) = 0{,}01$.

$$tg\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \alpha = arctg\frac{b}{a};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\cdot\left(-\frac{b}{a^2}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}; \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial b} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку $\overline{\Delta}(\alpha^*)$, застосувавши формулу (1.35).

$$\overline{\Delta}(\alpha^*) = \left(\frac{25{,}21}{25{,}21^2+12{,}10^2} + \frac{12{,}10}{25{,}21^2+12{,}10^2}\right)0{,}01 = 0{,}00048 < 0{,}0005;$$

$$\alpha^* = arctg\frac{b^*}{a^*} = arctg\frac{25,21}{12,10} = arctg\ 2,0835 = 1,1233.$$

Отже, $\alpha$ =1,1233 ± 0,0005.

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(\alpha^*) = \frac{\bar{\Delta}(\alpha^*)}{\alpha^*} = \frac{0,00048}{1,1233} \approx 0,00043, \text{ тобто } \bar{\delta}(\alpha^*) \approx 0,04\,\%.$$

## 1.10. Обернена задача теорії похибок

На практиці важливою є також обернена задача: які повинні бути абсолютні похибки аргументів, щоб абсолютна похибка функції не перевищувала заданої величини.

Ця задача математично невизначена, оскільки задану граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(u)$ функції $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ можна забезпечити, встановлюючи різними способами граничні абсолютні похибки її аргументів. Найпростіше розв'язувати обернену задачу за допомогою так званого принципу однакових впливів.

Нехай при наближених значеннях аргументів $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ одержимо наближене значення функції $u^* = f(x_1^*,\ x_2^*, ...,\ x_n^*)$. Тоді гранична абсолютна похибка

$$\bar{\Delta}(u^*) = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i}\right|\bar{\Delta}(x_i^*). \tag{1.39}$$

Будемо вважати, що всі доданки однаково впливають на утворення граничної абсолютної похибки $\bar{\Delta}\left(u^*\right)$, тобто

$$\left|\frac{\partial f\left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)}{\partial x_1}\right|\bar{\Delta}\left(x_1^*\right) = \left|\frac{\partial f\left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)}{\partial x_2}\right|\bar{\Delta}\left(x_2^*\right) = ...$$

$$... = \left|\frac{\partial f\left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)}{\partial x_n}\right|\cdot\bar{\Delta}\left(x_n^*\right) = \frac{\bar{\Delta}\left(u^*\right)}{n}. \tag{1.40}$$

Із (1.40) отримуємо формули для граничних абсолютних похибок аргументів

$$\bar{\Delta}\,(x_i^*) = \frac{\bar{\Delta}\,(u^*)}{n\left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i}\right|} \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.41}$$

Іноді при розв'язанні оберненої задачі за принципом однакових впливів виявляється, що знайдені граничні абсолютні похибки деяких змінних настільки малі, що досягти відповідної точності при вимірюванні цих величин практично неможливо. В таких випадках слід відступити від принципу рівних впливів і за рахунок деякого зменшення похибок однієї частини змінних збільшити похибки іншої частини змінних. Аналогічно розв'язують іншу обернену задачу теорії похибок, коли задано граничну відносну похибку функції й потрібно знайти граничні абсолютні або відносні похибки аргументів.

**Приклад 1.6.** Потрібно обчислити з граничною відносною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ і твірна якого виміряні наближено й дорівнюють $R^* \approx 3м$, $r^* \approx 1м$, $l^* \approx 5м$. З якою точністю слід виміряти радіуси та твірну й зі скількома знаками потрібно взяти число π?

**Розв'язування.** Бічну поверхню $S_\delta$ зрізаного конуса обчислюємо за формулою:

$$S_\delta = \pi \left( R + r \right) l;$$

$$\ln S_\delta = \ln \pi + \ln\left( R + r \right) + \ln l;$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi}\left( \ln S_\delta \right) = \frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial}{\partial R}\left( \ln S_\delta \right) = \frac{\partial}{\partial r}\left( \ln S_\delta \right) = \frac{1}{R + r}; \quad \frac{\partial}{\partial l}\left( \ln S_\delta \right) = \frac{1}{l}.$$

Гранична відносна похибка

$$\overline{\delta}(S^*) = \frac{1}{\pi^*}\ \overline{\Delta}(\pi^*) + \frac{1}{R^* + r^*}\ \overline{\Delta}(R^*) + \frac{1}{R^* + r^*}\ \overline{\Delta}\left( r^* \right) + \frac{1}{l^*}\ \overline{\Delta}(l^*) = 0,01.$$

За принципом рівних впливів одержуємо

$$\frac{\overline{\Delta}(\pi^*)}{\pi^*} = \frac{\overline{\Delta}(R^*)}{R^* + r^*} = \frac{\overline{\Delta}(r^*)}{R^* + r^*} = \frac{\overline{\Delta}(l^*)}{l^*} = 0,0025.$$

Звідси отримуємо $\overline{\Delta}(\pi^*) = 3,14 \cdot 0,0025 = 0,00785$;

$$\overline{\Delta}(R^*) = 4 \cdot 0,0025 = 0,01; \qquad \overline{\Delta}(r^*) = 0,01; \qquad \overline{\Delta}(l^*) = 5 \cdot 0,0025 = 0,0125.$$

Отже, число π потрібно взяти з двома знаками після коми, радіуси виміряти з точністю до 1см, а твірну – з точністю до 1,25 см.

## 1.11. Обчислення значень многочлена. Схема Горнера

Дано многочлен степеня $n$ з дійсними коефіцієнтами

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n. \tag{1.42}$$

Нехай потрібно обчислити значення цього многочлена при $x = x_1$:

$$\mathrm{P}(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n. \tag{1.43}$$

Якщо обчислювати безпосередньо за формулою (1.43), то потрібно виконати $2n - 1$ множень та $n$ додавань, тобто при великих значеннях $n$ потрібно виконати велику кількість операцій. Крім того, це може призвести до втрати точності за рахунок похибок заокруглення.

Метод обчислення значень многочлена, який називають схемою Горнера, вимагає n множень та n додавань. Тому використання схеми Горнера зменшує об’єм обчислювальної роботи й підвищує точність обчислень за рахунок зменшення похибок заокруглення.

Запишемо вираз (1.43) у такому вигляді:

$$\mathrm{P}(x_1) = a_0 + x_1(a_1 + x_1(a_2 + x_1(a_3 + \ldots + x_1(a_{n-2} + x_1(a_{n-1} + x_1 a_n)\ldots).$$

Послідовно обчислюємо числа

$$b_n = a_n, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + x_1 b_n, \quad b_{n-2} = a_{n-2} + x_1 b_{n-1}, \ldots,$$
$$b_1 = a_1 + x_1 b_2, \quad b_0 = a_0 + x_1 b_1 = \mathrm{P}(x_1). \tag{1.44}$$

Обчислення (1.44) зручно проводити за схемою

$$\begin{array}{cccccccc|l}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & x_1 \\
+ & & x_1 b_n & x_1 b_{n-1} & \ldots & x_1 b_3 & x_1 b_2 & x_1 b_1 & \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 = \mathrm{P}(x_1) &
\end{array}$$

Можна довести, що числа $b_n,\ b_{n-1},\ b_{n-2},\ \ldots,\ b_1$ є коефіцієнтами многочлена $Q(x)$, який отримуємо у частці при діленні даного многочлена $\mathrm{P}(x)$ на двочлен $x - x_1$, тобто $\mathrm{P}(x) = Q(x)(x - x_1) + \mathrm{P}(x_1)$, де

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1.$$

**Приклад 1.7.** Дано многочлен $\mathrm{P}(x) = x^5 + 4x^3 + 5x^2 - 7x + 8$. Потрібно визначити:

а) значення $\mathrm{P}(x)$ при $x = 2$;

б) частку від ділення $\mathrm{P}(x)$ на двочлен $x - 2$.

**Розв’язування.** Застосуємо схему Горнера.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
 & 1 & 0 & 4 & 5 & -7 & 8 & 2 \\
+ & & 2 & 4 & 16 & 42 & 70 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 8 & 21 & 35 & 78 = \mathrm{P}(2) &
\end{array}$$

Отже, $\mathrm{P}(2) = 78$; частка $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 21x + 35$.

Відомо, що коли многочлен $\mathrm{P}(x)$ послідовно $n$ разів ділити на двочлен $x - x_1$, то в остачі отримаємо: після першого ділення $\mathrm{P}(x_1)$, після другого ділення $\mathrm{P}'(x_1)$, після третього $\dfrac{\mathrm{P}''(x_1)}{2!}$, ..., після $n$-го ділення $\dfrac{\mathrm{P}^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}$.

**Приклад 1.8.** Дано многочлен $\mathrm{P}(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$. Потрібно обчислити $\mathrm{P}(3),\ \mathrm{P}'(3),\ \mathrm{P}''(3)$, користуючись схемою Горнера.

$$
\begin{array}{r|llllll}
 & 1 & -2 & 3 & 4 & -1 & \underline{|3} \\
+ & & 3 & 3 & 18 & 66 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 6 & 22 & 65 = P(3) & \\
+ & & 3 & 12 & 54 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 18 & 76 = P'(3) & & \\
 & & 3 & 21 & & & \\
\hline
 & 1 & 7 & 39 = \dfrac{P''(3)}{2!} & & &
\end{array}
$$

Отже, $\mathrm{P}(3) = 65,\ \mathrm{P}'(3) = 76,\ \mathrm{P}''(3) = 78$.

Нехай для коефіцієнтів многочлена $\mathrm{P}(x)$ та числа $x_1$ задані їх наближені значення й граничні абсолютні похибки.

Наприклад, нехай $x_1^* = 1,25$, $\overline{\Delta}(x_1^*) = 0,003$. Тоді згідно з формулою (1.6) $1,247 \le x_1 \le 1,253$, тобто $x_1 \in [1,247;1,253]$. Аналогічно одержимо відповідні відрізки для кожного коефіцієнта многочлена P(x). Застосовуючи схему Горнера й арифметику меж, можна визначити відрізок, на якому міститься значення многочлена $\mathrm{P}(x_1)$. При цьому обчислення за схемою Горнера модифікуються: всі числа замінюються відрізками.

**Приклад 1.9.** Дано многочлен $\mathrm{P}(x) = 3,4x^3 + 1,2x^2 + 2,58x - 1,33$, коефіцієнти якого є наближеними числами з граничними абсолютними похибками

$$\overline{\Delta}(a_3) = 0,02; \quad \overline{\Delta}(a_2) = 0,03; \quad \overline{\Delta}(a_1) = 0,007; \quad \overline{\Delta}(a_0) = 0,005.$$

Визначити відрізок, на якому міститься значення $\mathrm{P}(x_1)$, якщо для числа $x_1$ його наближене значення дорівнює $x_1^* = -0,98$ і $\overline{\Delta}(x_1^*) = 0,004$. Обчислення виконати з чотирма знаками після коми.

**Розв'язування.** Згідно з умовою задачі

$$a_3 \in [3,38;\ 3,42]; \quad a_2 \in [1,17;\ 1,23]; \quad a_1 \in [2,573;\ 2,587];$$
$$a_0 \in [-1,335;\ -1,325]; \quad x_1 \in [-0,984;\ -0,976].$$

Застосуємо схему Горнера

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [3,38;3,42] | [1,17;1,23] | [2,573;2,587] | [-1,335; -1,325] | [-0,984;-0,976] |
| | [-3,3653;-3,2989] | [2,0192;2,1602] | [-4,6712;-4,4820] | |
| [3,38;3,42] | [-2,1953;-2,0689] | [4,5922;4,7472] | [-6,0062;-5,8070] | |

Отже, $\mathrm{P}(x_1) \in [-6,0062;\ -5,8070]$.

## 1.12. Завдання для самостійної роботи

1. В одержаних наближених числах $a_1^*, a_2^*, a_3^*$ усі знаки вірні. Визначити кількість значущих цифр та вірних цифр після коми і граничну абсолютну похибку. Записати ці числа у нормалізованому вигляді. Заокруглити $a_1^*$ до сотих, $a_2^*$ – до тисячних, $a_3^*$ – до десятитисячних. Знайти число $b^* = a_1^* + a_2^* - a_3^*$ та оцінити відносну похибку результату. Знайти числа $a_1^* \cdot a_2^* = c_1^*$; $c_2^* = \dfrac{a_1^*}{a_3^*}$. Оцінити відносну похибку та записати одержані числа $c_1^*$, $c_2^*$ в нормалізованому вигляді.
   1.1. $a_1^* = 10{,}2346$; $a_2^* = 0{,}4038$; $a_3^* = 0{,}05419$;
   1.2. $a_1^* = 2{,}5306$; $a_2^* = 10{,}4867$; $a_3^* = 0{,}18312$;
   1.3. $a_1^* = 15{,}4831$; $a_2^* = 8{,}0015$; $a_3^* = 0{,}00843$;
   1.4. $a_1^* = 10{,}0541$; $a_2^* = -15{,}8136$; $a_3^* = 105{,}41186$;
   1.5. $a_1^* = -1{,}0432$; $a_2^* = 0{,}00518$; $a_3^* = 0{,}54128$;
   1.6. $a_1^* = 6{,}2431$; $a_2^* = -0{,}0876$; $a_3^* = 0{,}50031$;
   1.7. $a_1^* = -0{,}9990$; $a_2^* = 2{,}34510$; $a_3^* = 0{,}04805$;
   1.8. $a_1^* = -3{,}0472$; $a_2^* = 0{,}74309$; $a_3^* = -0{,}00052$;
   1.9. $a_1^* = -4{,}0566$; $a_2^* = 10{,}76482$; $a_3^* = 0{,}00841$;
   1.10. $a_1^* = 3{,}260$; $a_2^* = -136{,}4578$; $a_3^* = 0{,}07932$.

2. Обчислити: а) значення многочлена $P(x)$ для значення $x^*$, яке є заокругленням до сотих числа $a_1^*$; б) значення многочлена $P(x)$ і похідної $P'(x)$, якщо граничні абсолютні похибки для коефіцієнтів многочлена і значення $x^*$ дорівнюють відповідно $\overline{\Delta}_0, \overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \overline{\Delta}_3, \overline{\Delta}(x^*)$.
   2.1. $P(x) = 1{,}2x^3 - 2{,}3x^2 - 1{,}64x - 0{,}25$;
   $\overline{\Delta}_0 = 0{,}004$; $\overline{\Delta}_1 = 0{,}001$; $\overline{\Delta}_2 = 0{,}03$; $\overline{\Delta}_3 = 0{,}02$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0{,}006$;
   2.2. $P(x) = 1{,}4x^3 + 3{,}4x^2 + 2{,}34x - 1{,}89$;
   $\overline{\Delta}_0 = 0{,}005$; $\overline{\Delta}_1 = 0{,}003$; $\overline{\Delta}_2 = 0{,}04$; $\overline{\Delta}_3 = 0{,}01$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0{,}002$;
   2.3. $P(x) = 0{,}2x^3 - 3{,}8x^2 + 2{,}72x - 15{,}31$;
   $\overline{\Delta}_0 = 0{,}003$; $\overline{\Delta}_1 = 0{,}008$; $\overline{\Delta}_2 = 0{,}06$; $\overline{\Delta}_3 = 0{,}01$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0{,}008$;
   2.4. $P(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}3x^2 + 1{,}11x - 8{,}38$;
   $\overline{\Delta}_0 = 0{,}002$; $\overline{\Delta}_1 = 0{,}007$; $\overline{\Delta}_2 = 0{,}08$; $\overline{\Delta}_3 = 0{,}02$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0{,}005$;
   2.5. $P(x) = 3{,}2x^3 + 2{,}3x^2 + 1{,}58x - 1{,}84$;
   $\overline{\Delta}_0 = 0{,}007$; $\overline{\Delta}_1 = 0{,}004$; $\overline{\Delta}_2 = 0{,}04$; $\overline{\Delta}_3 = 0{,}04$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0{,}005$;

2.6. $P(x) = 1,1x^3 + 2,3x^2 - 10,25x - 4,32$;

$\overline{\Delta}_0 = 0,003$; $\overline{\Delta}_1 = 0,008$; $\overline{\Delta}_2 = 0,05$; $\overline{\Delta}_3 = 0,06$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0,004$;

2.7. $P(x) = 15,4x^3 + 12,5x^2 - 1,38x - 1,05$;

$\overline{\Delta}_0 = 0,006$; $\overline{\Delta}_1 = 0,003$; $\overline{\Delta}_2 = 0,04$; $\overline{\Delta}_3 = 0,02$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0,001$;

2.8. $P(x) = 1,8x^3 + 2,4x^2 - 1,53x - 2,89$;

$\overline{\Delta}_0 = 0,007$; $\overline{\Delta}_1 = 0,003$; $\overline{\Delta}_2 = 0,05$; $\overline{\Delta}_3 = 0,02$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0,004$;

2.9. $P(x) = 2,3x^3 + 1,1x^2 - 1,26x - 0,14$;

$\overline{\Delta}_0 = 0,005$; $\overline{\Delta}_1 = 0,003$; $\overline{\Delta}_2 = 0,06$; $\overline{\Delta}_3 = 0,03$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0,004$;

2.10. $P(x) = 1,7x^3 + 2,3x^2 - 3,45x - 0,47$;

$\overline{\Delta}_0 = 0,003$; $\overline{\Delta}_1 = 0,008$; $\overline{\Delta}_2 = 0,02$; $\overline{\Delta}_3 = 0,03$; $\overline{\Delta}(x^*) = 0,001$.

3. Обчислити вираз, уникаючи віднімання близьких наближених чисел.

3.1. $\sqrt{10,23672} - \sqrt{10,12672}$;

3.2. $\sqrt{12,5418} - \sqrt{12,6518}$;

3.3. $\sqrt{15,8458} - \sqrt{15,7458}$;

3.4. $\sqrt{342,54} - \sqrt{340,54}$;

3.5. $\sqrt{10,734} - \sqrt{10,634}$;

3.6. $\sqrt{25,231} - \sqrt{25,031}$;

3.7. $\sqrt{15,8442} - \sqrt{15,7042}$;

3.8. $\sqrt{5,2248} - \sqrt{5,2048}$;

3.9. $\sqrt{9,8642} - \sqrt{9,8042}$;

3.10. $\sqrt{9,8641} - \sqrt{9,7641}$.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $c^* \pm 0,1$; один з катетів $a^* \pm 0,1$. З якою точністю можна визначити другий катет і прилеглий до нього гострий кут? Знайти їх значення.

4.1. $c^* = 16,8$; $a^* = 10,4$;

4.2. $c^* = 11,3$; $a^* = 6,4$;

4.3. $c^* = 28,3$; $a^* = 13,8$;

4.4. $c^* = 74,3$; $a^* = 40,6$;

4.5. $c^* = 26.7$; $a^* = 15.8$;

4.6. $c^* = 18,9$; $a^* = 7,6$;

4.7. $c^* = 17,3$; $a^* = 10,4$;

4.8. $c^* = 34,5$; $a^* = 16,3$;

4.9. $c^* = 20,3$; $a^* = 12,8$;

4.10. $c^* = 12,4$; $a^* = 7,5$.

5. Радіуси основ і твірна зрізаного конуса дорівнюють $R^* \pm 0{,}01$; $r^* \pm 0{,}01$; $l^* \pm 0{,}01$; число $\pi = 3{,}14$. Обчислити за цими даними бічну поверхню зрізаного конуса. Оцінити абсолютну та відносну похибки результату.
   5.1. $R^* = 18{,}65$; $r^* = 12{,}13$; $l^* = 8{,}71$;
   5.2. $R^* = 25{,}18$; $r^* = 16{,}75$; $l^* = 12{,}37$;
   5.3. $R^* = 18{,}31$; $r^* = 9{,}24$; $l^* = 10{,}35$;
   5.4. $R^* = 21.97$; $r^* = 19.84$; $l^* = 11.27$;
   5.5. $R^* = 17.63$; $r^* = 8.72$; $l^* = 10.73$;
   5.6. $R^* = 15{,}86$; $r^* = 8{,}41$; $l^* = 12{,}45$;
   5.7. $R^* = 17{,}34$; $r^* = 11{,}29$; $l^* = 8{,}13$;
   5.8. $R^* = 15{,}17$; $r^* = 7{,}38$; $l^* = 11{,}38$;
   5.9. $R^* = 15{,}34$; $r^* = 10{,}15$; $l^* = 21{,}87$;
   5.10. $R^* = 22{,}73$; $r^* = 13{,}25$; $l^* = 10{,}38$.

6. Радіус основи циліндра дорівнює $R^* \pm 0{,}01$; висота циліндра $h^* \pm 0{,}01$; число $\pi = 3{,}14$. Обчислити за цими даними об’єм циліндра. Оцінити абсолютну та відносну похибки результату.
   6.1. $R^* = 21{,}64$; $h^* = 10{,}13$;
   6.2. $R^* = 18{,}67$; $h^* = 10{,}15$;
   6.3. $R^* = 24{,}36$; $h^* = 12{,}47$;
   6.4. $R^* = 28{,}16$; $h^* = 15{,}38$;
   6.5. $R^* = 19{,}65$; $h^* = 9{,}34$;
   6.6. $R^* = 21{,}63$; $h^* = 9{,}17$;
   6.7. $R^* = 17{,}34$; $h^* = 10{,}89$;
   6.8. $R^* = 12$; $h^* = 15$;
   6.9. $R^* = 20{,}53$; $h^* = 9{,}14$;
   6.10. $R^* = 15{,}68$; $h^* = 12{,}35$.

7. Потрібно виміряти з відносною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють наближено $R^*$ і $r^*$, а твірна $l^*$. З якою точністю потрібно виміряти радіуси та твірну й зі скількома знаками необхідно взяти число $\pi$?
   7.1. $R^* = 21$; $r^* = 12$; $l^* = 15$;
   7.2. $R^* = 15$; $r^* = 10$; $l^* = 26$;
   7.3. $R^* = 18$; $r^* = 7$; $l^* = 23$;
   7.4. $R^* = 54$; $r^* = 23$; $l^* = 41$;
   7.5. $R^* = 15$; $r^* = 8$; $l^* = 20$;
   7.6. $R^* = 34$; $r^* = 15$; $l^* = 28$;

7.7. $R^* = 125$; $r^* = 47$; $l^* = 160$;
7.8. $R^* = 25$; $r^* = 10$; $l^* = 34$;
7.9. $R^* = 19$; $r^* = 11$; $l^* = 23$;
7.10. $R^* = 14$; $r^* = 9$; $l^* = 25$.

8. Потрібно визначити з відносною похибкою до 1% площу круга, радіус якого наближено дорівнює $R^*$. З якою точністю потрібно виміряти радіус круга та зі скількома знаками необхідно взяти число $\pi$?
8.1. $R^* = 13{,}5$;
8.2. $R^* = 23{,}5$;
8.3. $R^* = 28$;
8.4. $R^* = 35{,}3$;
8.5. $R^* = 26{,}5$.
8.6. $R^* = 28{,}5$;
8.7. $R^* = 41{,}8$;
8.8. $R^* = 25{,}5$;
8.9. $R^* = 18$;
8.10. $R^* = 16$.

9. Потрібно визначити з відносною похибкою 1% площу бічної поверхні конуса, радіус основи і твірна якого дорівнюють наближено $R^*$ і $l^*$. З якою точністю потрібно виміряти радіус та твірну й зі скількома знаками необхідно взяти число $\pi$?
9.1. $R^* = 14$; $l^* = 27$;
9.2. $R^* = 12$; $l^* = 23$;
9.3. $R^* = 15$; $l^* = 24$;
9.4. $R^* = 10$; $l^* = 25$;
9.5. $R^* = 17$; $l^* = 28$;
9.6. $R^* = 18$; $l^* = 24$;
9.7. $R^* = 25$; $l^* = 42$;
9.8. $R^* = 14$; $l^* = 23$;
9.9. $R^* = 12$; $l^* = 25$;
9.10. $R^* = 11$; $l^* = 24$.

# РОЗДІЛ 2

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

## 2.1. Відокремлення коренів

Розглянемо рівняння

$$f(x)=0, \tag{2.1}$$

де функція $f(x)$ визначена й неперервна в деякому скінченному або нескінченному інтервалі. Якщо функція $f(x)$ є многочленом $n$-го степеня, то рівняння (2.1) називають алгебраїчним рівнянням $n$-го степеня. Для алгебраїчних рівнянь першого, другого, третього та четвертого степенів існують формули, які виражають корені цих рівнянь через їх коефіцієнти за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення й добування коренів. Для рівнянь, степінь яких вищий від четвертого, таких формул у загальному випадку не існує. Проте навіть у випадках, коли корені алгебраїчних рівнянь виражаються формулами, на практиці доцільно застосовувати наближені методи розв'язування. Зокрема, це стосується алгебраїчних рівнянь третього та четвертого степенів.

Якщо ліва частина рівняння (2.1) є трансцендентною функцією, то рівняння називають трансцендентним. Прикладами таких рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні, окремі типи яких вивчають у шкільному курсі математики.

Припустимо, що рівняння (2.1) має тільки ізольовані корені, тобто для кожного кореня рівняння (2.1) існує деякий окіл, який не містить інших коренів цього рівняння. Наближене обчислення ізольованих дійсних коренів рівняння (2.1) складається з двох етапів: 1) відокремлення коренів, тобто знаходження відрізків якомога меншої довжини, в кожному з яких міститься тільки один корінь цього рівняння; 2) уточнення коренів, тобто обчислення їх із заданою точністю.

Для відокремлення коренів застосовують відому теорему з математичного аналізу.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то всередині цього відрізка міститься принаймні один корінь $\xi$ рівняння (2.1).

Цей корінь $\xi$ буде єдиним, якщо на цьому відрізку $[a, b]$ існує та зберігає сталий знак похідна $f'(x)$, тобто якщо функція $f(x)$ буде монотонною (зростаючою або спадною) на цьому відрізку.

**Приклад 2.1.** Відокремити корені рівняння $x^3-3x+1=0$.

**Розв'язування.** Тут $f(x)=x^3-3x+1$, тому $f'(x)=3x^2-3$. Знайдемо критичні точки та інтервали монотонності даної функції:

$$f'(x)=0; \quad 3(x^2-1)=0; \quad x_1=-1; \quad x_2=1.$$

В інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(1,+\infty)$ функція $f(x)$ зростає, а в інтервалі (-1,1) спадає. Оскільки $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f(-1)=3$, $f(1)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, то рівняння $x^3-3x+1=0$ має три дійсних корені $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, які містяться в інтервалах (-∞,-1), (-1, 1), (1, +∞).

Ці інтервали можна звузити. Оскільки $f(-2)=-1$, $f(0)=1$, $f(2)=3$, то отримаємо

$$-2<\xi_1<-1; \quad 0<\xi_2<1; \quad 1<\xi_3<2.$$

Корені рівняння $f(x)=0$ можна відокремити графічним способом, оскільки корені цього рівняння є абсцисами точок перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю $Ox$. Якщо побудова графіка функції $y=f(x)$ утруднена, то можна звести вихідне рівняння до рівносильного рівняння

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{2.2}$$

де функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ мають простіші аналітичні вирази, ніж функція $f(x)$. Побудувавши графіки функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, одержимо шукані корені як абсциси точок перетину цих графіків.

**Приклад 2.2.** Відокремити корені рівняння $\sin x - x^2+1=0$.

**Розв'язування.** Запишемо це рівняння у вигляді $\sin x = x^2-1$ і побудуємо графіки функцій $y=\sin x$ та $y=x^2-1$.

Ці графіки перетинаються у точках A та B, тому дане рівняння має два дійсних корені $\xi_1$ та $\xi_2$, які є абсцисами цих точок. З рисунка 1 бачимо, що

$$-1<\xi_1<-0{,}4; \quad 1<\xi_2<1{,}5.$$

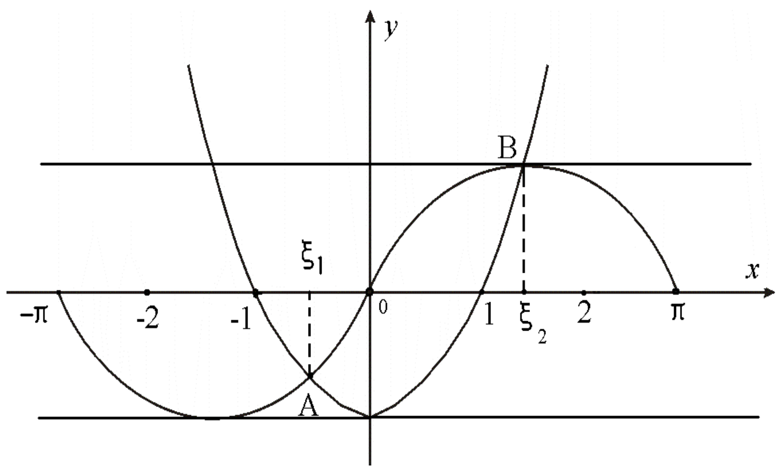


Рисунок 1

## 2.2. Метод половинного поділу

Нехай дано рівняння

$$f(x)=0, \tag{2.1}$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a)\cdot f(b)<0$. Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь $\xi$ рівняння (2.1). Отже, $a<\xi<b$. Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Позначимо $c_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$, де $a_0=a,\ b_0=b$. Якщо $f(c_0)=0$, то $\xi=c_0$ є коренем рівняння (2.1). Якщо $f(c_0)\neq 0$, то вибираємо той з відрізків $[a_0, c_0]$, $[c_0, b_0]$, на кінцях якого функція $f(x)$ приймає значення різних знаків. Позначимо вибраний відрізок $[a_1, b_1]$, тобто

$$\begin{gathered} a_1=\begin{cases} c_0, & \textit{якщо}\ \ \operatorname{sgn} f(a_0)=\operatorname{sgn} f(c_0); \\ a_0, & \textit{якщо}\ \ \operatorname{sgn} f(a_0)\neq\operatorname{sgn} f(c_0); \end{cases} \\ b_1=\begin{cases} c_0, & \textit{якщо}\ \ \operatorname{sgn} f(b_0)=\operatorname{sgn} f(c_0); \\ b_0, & \textit{якщо}\ \ \operatorname{sgn} f(b_0)\neq\operatorname{sgn} f(c_0). \end{cases} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Відрізок $[a_1, b_1]$ знову поділимо навпіл, позначимо $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, виберемо один із відрізків $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ таким чином, як у попередньому випадку, позначимо його через $[a_2, b_2]$ і т.д.

Цей процес може бути скінченним, якщо середина відрізка, одержаного на деякому кроці, співпаде з шуканим коренем $\xi$, або цей процес нескінченний і ми отримаємо нескінченну послідовність вкладених один в одного відрізків $[a_1,\ b_1], [a_2,\ b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ таких, що

$$f(a_n)\cdot f(b_n)<0 \qquad (n=1,2,3,...) \tag{2.4}$$

$$\text{і}\quad b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a). \tag{2.5}$$

Оскільки ліві кінці $a_1, a_2, ..., a_n,...$ утворюють монотонну неспадну обмежену послідовність, а праві кінці $b_1, b_2, ..., b_n ...$ – монотонну незростаючу обмежену послідовність, то ці послідовності мають границі й на основі рівності (2.5) ці границі рівні.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\xi\ .$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$ в нерівності (2.4).

Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то одержимо $[f(\xi)]^2\leq 0$. Звідси випливає, що $f(\xi)=0$, тобто $\xi$ є коренем рівняння (2.1).

Якщо обчислення виконані до $n$-го кроку, тобто отримано відрізок $[a_n, b_n]$, то за наближене значення кореня $\xi$ можна взяти $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

При цьому для абсолютної похибки справедлива така оцінка:

$$\left|\xi - c_n\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{2.6}$$

Метод половинного поділу збігається повільно і при збільшенні точності, з якою потрібно знайти корінь, значно зростає об'єм обчислювальної роботи. Проте цей метод легко реалізується на ЕОМ і якщо кожне обчислення значення функції $f(x)$ нескладне, то його можна успішно застосовувати на практиці.

## 2.3. Метод хорд

Нехай на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь $\xi$ рівняння (2.1).

Припустимо, що функція $f(x)$ та її похідні $f'(x), f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, похідні $f'(x), f''(x)$ не змінюють знака на відрізку $[a, b]$ і $f'(x) \ne 0$, $f''(x) \ne 0$ на цьому відрізку. Припустимо для визначеності, що $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (випадок $f''(x) < 0$ зводиться до попереднього, якщо рівняння (2.1) записати у вигляді $-f(x) = 0$). Тоді графік функції $y = f(x)$ буде вгнутим на $[a,\ b]$. Можливі два випадки:

1) $f(a) > 0$; 2) $f(a) < 0$.

Розглянемо ці випадки.

1) $f(a) > 0$.

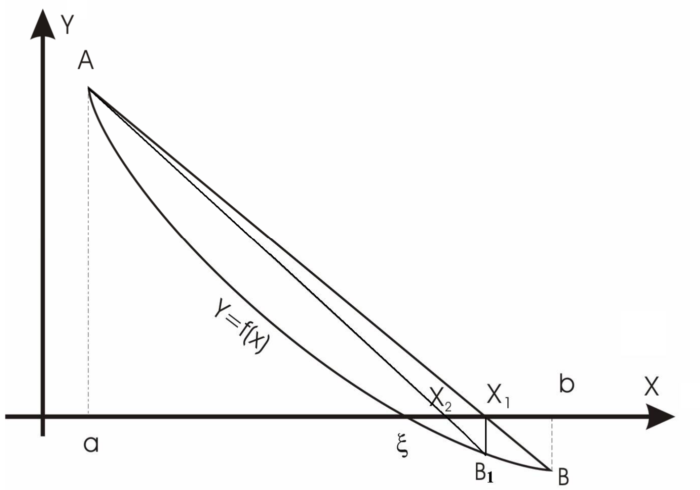


Рисунок 2

Складемо рівняння хорди $AB$ і знайдемо абсцису $x_1$ точки перетину цієї хорди з віссю $Ox$.

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)}(x_0 - a). \tag{2.7}$$

Тут позначено $x_0 = b$.

Складемо рівняння хорди $AB_1$ і знайдемо абсцису $x_2$ точки перетину цієї хорди з віссю $Ox$.

$$\frac{y - f(x_1)}{f(a) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{a - x_1},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a). \qquad (2.8)$$

і т.д.

Можна написати формулу для довільного $n$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad \left(n = 0,1,2,3,...\right). \qquad (2.9)$$

У цьому випадку кінець $a$ нерухомий.

Послідовність $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...\ x_n, ...$ є обмеженою монотонно спадною послідовністю. Отже, вона має границю $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\left(a < \xi < b\right)$.

Перейшовши до границі при $n \to \infty$ у рівності (2.9), отримаємо

$$\xi = \xi + \frac{f(\xi)}{f(a) - f(\xi)}(\xi - a).$$

Звідси випливає, що $f(\xi) = 0$, тобто $\xi$ є коренем рівняння (2.1).

2) $f(a) < 0$.

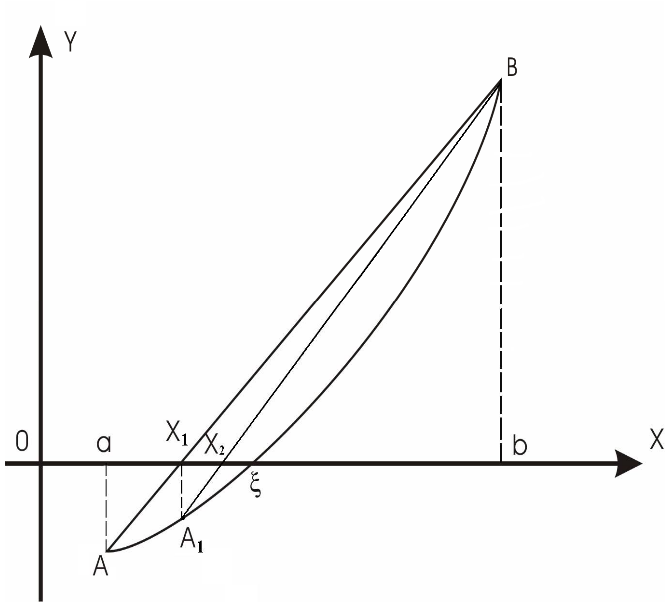


Рисунок 3

У другому випадку нерухомим є кінець $b$. Знайдемо, як і в першому випадку, абсциси точок перетину хорд $AB$, $A_1B, ...$ з віссю $Ox$. Отримаємо формули:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0), \qquad (2.10)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1) \qquad (2.11)$$

і т .д.

У рівності (2.10) позначено $x_0 = a$. Отже,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0,1,2,3,...). \qquad (2.12)$$

Послідовність $x_0, x_1, x_2, ... x_n, ...$ є обмеженою монотонно зростаючою послідовністю. Тому вона має границю $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, причому $\xi$ є коренем рівняння $f(x) = 0$ (доводити так само, як і у першому випадку).

За наближене значення кореня $\xi$ можна взяти $x_n$, обчислене за формулою (2.9) або (2.12). Для оцінювання точності цього наближення можна скористатися **теоремою:** якщо $\xi$ – корінь рівняння $f\left(x\right) = 0$, який міститься на відрізку $\left[a, b\right]$, $x_n$ – наближене значення цього кореня, яке також належить відрізку $\left[a, b\right]$ і $\left|f'\left(x\right)\right| \ge m_1 > 0$ при $a \le x \le b$, то справджується формула

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m_1}. \qquad (2.13)$$

**Доведення.** Для функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[x_n, \xi\right]$ (або $\left[\xi, x_n\right]$) виконуються умови теореми Лагранжа. Застосувавши цю теорему, одержимо $f\left(\xi\right) - f\left(x_n\right) = f'\left(c\right)\left(\xi - x_n\right)$, де $c$ – проміжне значення між $x_n$ і $\xi$, тобто $c \in \left(a, b\right)$. Оскільки $f\left(\xi\right) = 0$ і $\left|f'\left(x\right)\right| \ge m_1$, то отримаємо

$$\left|f\left(\xi\right) - f\left(x_n\right)\right| = \left|f\left(x_n\right)\right| \ge m_1\left|\xi - x_n\right|.$$

Отже, $\left|\xi - x_n\right| \le \dfrac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m_1}$, тобто формулу (2.13) доведено.

Наведемо ще формулу для оцінювання абсолютної похибки наближеного значення $x_n$, якщо відомі два послідовних наближення $x_{n-1}$ та $x_n$.

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \qquad (2.14)$$

де $m_1$ та $M_1$ – відповідно найменше та найбільше значення $\left|f'(x)\right|$ на відрізку $\left[a, b\right]$. Якщо відрізок $\left[a, b\right]$ настільки малий, що $M_1 \le 2m_1$, то з формули (2.14) отримуємо

$$\left|\xi - x_n\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right|. \qquad (2.15)$$

Таким чином, у цьому випадку як тільки $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon$ – задана гранична абсолютна похибка, то з формули (2.15) випливає, що $\left|\xi - x_n\right| < \varepsilon$.

З доведенням формули (2.14) можна ознайомитися, наприклад, в [6], гл. IV, § 4.

**Приклад 2.3.** Методом хорд знайти додатний корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01.

**Розв'язування.** Відокремимо корені цього рівняння. Запишемо його у вигляді $x^4 = 2x + 4$ і побудуємо графіки функцій $y = x^4$ та $y = 2x + 4$ (рис. 4).

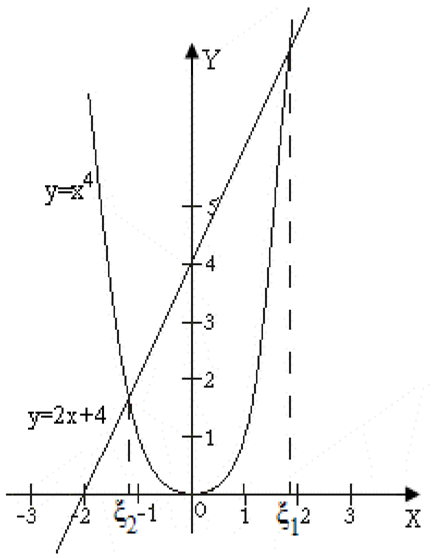


Рисунок 4

Дане рівняння має два дійсних корені $\xi_1$ та $\xi_2$. Додатний корінь $\xi_1$ міститься на відрізку [1,2].

Звузимо цей відрізок методом половинного поділу. Оскільки

$$f(x) = x^4 - 2x - 4 \text{ і } f(1,5) = -1,938 < 0,$$

то корінь міститься на відрізку [1,5; 2]. Оскільки $f(1,7) = 0,952 > 0$, то корінь $\xi_1$ розміщений на відрізку [1,5; 1,7].

$$f'(x) = 4x^3 - 2; \quad f''(x) = 12x^2;$$

$$f''(x) > 0 \text{ при всіх } x.$$

Застосуємо формули (2.10) – (2.12):

$$x_1 = 1,5 - \frac{f(1,5)}{f(1,7) - f(1,5)}(1,7 - 1,5) = 1,634, \qquad f(1,634) = -0,139.$$

$$x_2 = 1,634 - \frac{f(1,634)}{f(1,7) - f(1,634)}(1,7 - 1,634) = 1,642, \qquad f(1,642) = -0,015.$$

$$x_3 = 1,642 - \frac{f(1,642)}{f(1,7) - f(1,642)}(1,7 - 1,642) = 1,643, \qquad f(1,643) = 0,001.$$

Оскільки $f(1,642) < 0$, $f(1,643) > 0$, то з точністю до 0,01 шуканий корінь $\xi$ дорівнює 1,64.

## 2.4. Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай корінь $\xi$ рівняння (2.4) відокремлений на відрізку $[a, b]$, причому похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні й зберігають певні знаки при $a \le x \le b$.

Позначимо через $x_0$ той кінець відрізка $[a, b]$, в якому $f(x) \cdot f''(x) > 0$, тобто $f(x_0)$ і $f''(x_0)$ мають однакові знаки.

На рисунку 5 зображено випадок: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ при $a \le x \le b$. Тому точку $a$ приймаємо за $x_0$. Складемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці А$(x_0, f(x_0))$ і знайдемо абсцису $x_1$ точки перетину цієї дотичної з віссю $Ox$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{2.16}$$

За перше наближення кореня $\xi$ рівняння (2.1) приймемо $x_1$. Через точку A1($x_1, f(x_1)$) знову проведемо дотичну, знайдемо абсцису $x_2$ точки перетину цієї дотичної з віссю $Ox$ і приймемо $x_2$ за друге наближення кореня $\xi$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (2.17)$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо такі наближення кореня $\xi$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \left(n = 0,1,2,3,...\right). \qquad (2.18)$$

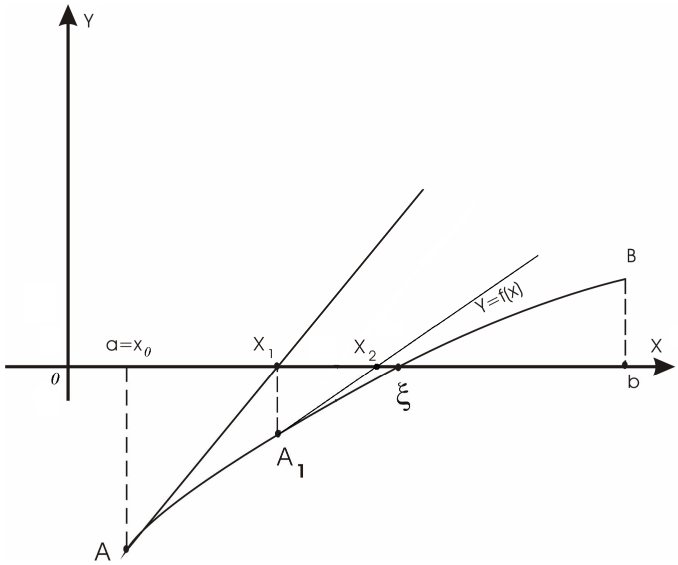


Рисунок 5

**Теорема.** Якщо $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$, причому похідні $f'\left(x\right)$ та $f''\left(x\right)$ неперервні, не дорівнюють нулю і зберігають певні знаки на відрізку $\left[a, b\right]$, то починаючи з початкового наближення $x_0 \in \left[a, b\right]$, яке задовольняє умову $f\left(x_0\right)\cdot f''\left(x_0\right)>0$, можна обчислити за формулою (2.18) єдиний на відрізку $\left[a, b\right]$ корінь $\xi$ рівняння $f(x)=0$ з будь-якою заданою точністю.

**Доведення.** Розглянемо випадок, зображений на рис. 5: $f\left(a\right)<0$, $f\left(b\right)>0$, $f'\left(x\right)>0$, $f''\left(x\right)<0$ при $a \le x \le b$. Інші випадки розглянемо аналогічно. Доведемо методом математичної індукції, що усі наближення $x_n < \xi \left(n = 0, 1, 2, ...\right)$. Приймаємо $x_0 = a$, оскільки $f\left(a\right)\cdot f''\left(a\right)>0$. Очевидно, що $x_0 < \xi$. Припустимо, що справджується нерівність $x_n < \xi$, і доведемо, що $x_{n+1} < \xi$.

Запишемо $\xi$ у вигляді $\xi = x_n + \left(\xi - x_n\right)$ і застосуємо формулу Тейлора другого порядку

$$f\left(\xi\right) = f\left(x_n\right) + f'\left(x_n\right)\left(\xi - x_n\right) + \frac{f''\left(c_n\right)}{2}\left(\xi - x_n\right)^2,$$

де $\xi < c_n < x_n$.

Оскільки $f(\xi)=0$ і $f''(c_n)<0$, то отримаємо

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)>0, \quad \text{тобто} \quad x_n f'(x_n)-f(x_n)<\xi f'(x_n).$$

Отже, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\dfrac{x_n f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}<\xi$ й умову $x_n<\xi$ доведено.

З цієї умови випливає, що $f(x_n)<0$, а з формули (2.18) – $x_{n+1}>x_n$ $(n=0,1,2,...)$, тобто послідовні наближення $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність. Отже, існує границя цієї послідовності: $\overline{\xi}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Перейшовши до границі при $n\to 0$ у рівності (2.18), отримаємо $f(\overline{\xi})=0$, тобто $\overline{\xi}=\xi$.

Для оцінювання абсолютної похибки $n$-го наближення $x_n$ можна користуватися формулою (2.13).

Запишемо також формулу для оцінювання абсолютної похибки $n$-го наближення $x_n$ за відомими двома послідовними наближеннями $x_{n-1}$ та $x_n$:

$$\left|\xi-x_n\right|\le\frac{M_2}{2m_1}(x_n-x_{n-1})^2, \tag{2.19}$$

де $M_2$ – найбільше значення $\left|f''(x)\right|$ на відрізку $[a,b]$.

Доведення цієї формули можна знайти в [6], гл. IV, § 5.

**Приклад 2.4.** Методом дотичних знайти найбільший корінь $\xi$ рівняння $2x-\ln x-6=0$ з точністю до 0,0001.

**Розв'язування.** Застосувавши графічний метод відокремлення коренів рівняння, неважко встановити, що дане рівняння має два корені, розміщені відповідно на відрізках $[0;\ 1]$ та $[3;\ 4]$. Обчислимо більший з цих коренів, тобто корінь $\xi\in[3;\ 4]$.

Маємо $f(x)=2x-\ln x-6;\quad f(3)=-1.09861;\quad f(4)=0{,}61371;$

$$f'(x)=2-\frac{1}{x};\quad f''(x)=\frac{1}{x^2}.$$

На відрізку $[3;\ 4]$ $\ f'(x)>0$ і $f''(x)>0$.

Оскільки $f(4)\cdot f''(4)>0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0=4$. Формулу (2.18) запишемо у вигляді

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n, \quad \text{де} \quad \Delta x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,3,...) \tag{2.20}$$

Результати обчислень запишемо у таблицю.

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $\Delta x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 0,61371 | 1,75000 | – 0,35069 |
| 1 | 3,64931 | 0,00408 | 1,72598 | – 0,00237 |
| 2 | 3,64694 | 0,00001 | | |

Для оцінювання абсолютної похибки наближеного значення $x_2$ застосуємо формулу (2.13). Оскільки при $x \in [3;\, 4]$ $f'(x)$ зростає і $f'(x) > 0$, то $m_1 = f'(3) = 1,66667 > 1,6$. Тому $|\xi - x_2| \le \dfrac{|f(x_2)|}{m_1} < \dfrac{0,00001}{1,6}$, звідки отримуємо

$$|\xi - x_2| < 0,0000063 < 0,00001.$$

Отже, наближене значення кореня $\xi$ з точністю до 0,0001 $\xi^* = 3,6469$.

## 2.5. Комбінований метод хорд і дотичних

Нехай $f(a) \cdot f(b)$<0 і $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають сталі знаки на відрізку $[a,\, b]$. Поєднуючи методи хорд і дотичних, отримаємо метод, на кожному етапі якого знаходимо наближені значення з недостачею й надлишком кореня $\xi$ рівняння $f(x) = 0$.

Можливі два випадки.

1. $f(a) \cdot f''(a) > 0$. У цьому випадку дотичну до графіка функції $y = f(x)$ проводимо в точці $A(a; f(a))$, позначивши $a_0 = a$. За методом дотичних одержимо формулу для обчислення наближень кореня $\xi$.

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \tag{2.21}$$

де $\Delta a_n = -\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $(n = 0,1,2,3,...)$.

Застосувавши метод хорд на відрізку $[a,\, b]$, також одержимо формулу для обчислення наближених значень кореня $\xi$.

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \tag{2.22}$$

де $\Delta b_n = -\dfrac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n)$, $(n = 0,1,2,3,...)$.

2. $f(b) \cdot f''(b) > 0$. Аналогічно одержуємо такі формули:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \tag{2.23}$$

де $\Delta a_n = -\dfrac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n)$;

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \tag{2.24}$$

де $\quad \Delta b_n = -\dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad (n = 0,1,2,3,...)$.

За формулами (2.21) та (2.23) обчислюємо наближені значення кореня $\xi$ з недостачею, а за формулами (2.22) та (2.24) – з надлишком. Тому $a_n < \xi < b_n$.

Якщо абсолютна похибка наближеного значення кореня $\xi$ задана наперед і дорівнює $\varepsilon$, то обчислення припиняємо тоді, коли буде виконуватись умова $b_n - a_n < \varepsilon$. За наближене значення $\xi^*$ кореня $\xi$ доцільно взяти середнє арифметичне одержаних останніх значень: $\xi^* = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

**Приклад 2.5.** Обчислити з точністю до 0,0001 корені рівняння $e^x - 2(x-1)^2 = 0$, застосувавши комбінований метод хорд і дотичних.

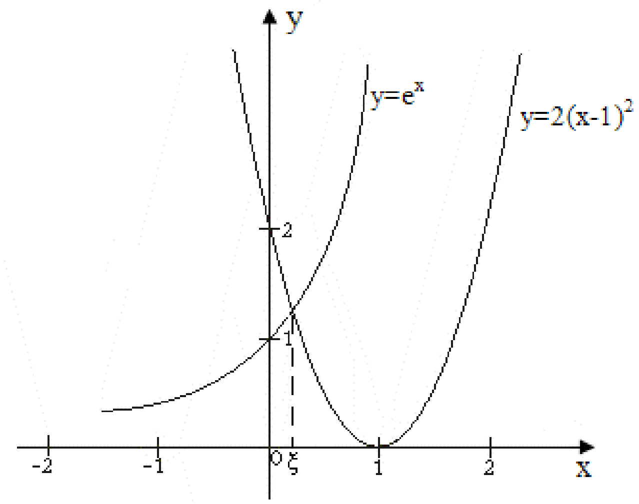


Рисунок 6

**Розв'язування.** Запишемо дане рівняння у вигляді $e^x = 2(x-1)^2$ і побудуємо графіки функцій $y = e^x$ та $y = 2(x-1)^2$ (рис. 6).

Отже, дане рівняння має один корінь $\xi$, який розміщений на відрізку $[0; 0,5]$.

$$f(x) = e^x - 2(x-1)^2,$$
$$f(0) = -1; \quad f(0,5) = 1,14872.$$
$$f'(x) = e^x - 4(x-1),$$
$$f''(x) = e^x - 4.$$
$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0 \text{ на відрізку } [0; 0,5].$$

Оскільки $f(0) \cdot f''(0) > 0$, то застосовуємо формули (2.21), (2.22).

$$a_0 = 0; \quad b_0 = 0,5; \quad f(a_0) = -1; \quad f(b_0) = 1,14872;$$
$$f'(a_0) = 5; \quad \Delta a_0 = \frac{1}{5} = 0,20;$$

$$\Delta b_0 = -\frac{1,14872}{1,14872+1}(0,5-0) = -0,26;$$
$$a_1 = 0,20; \quad b_1 = 0,24;$$
$$f(a_1) = -0,05860; \quad f(b_1) = 0,11605;$$
$$f'(a_1) = 4,42140; \quad \Delta a_1 = \frac{0,05860}{4,42140} = 0,0133;$$
$$\Delta b_1 = -\frac{0,11605}{0,11605+0,05860}(0,24-0,20) = -0,0266\,;$$
$$a_2 = 0,2133; \quad b_2 = 0,2134; \quad f(a_2) = -0,0003; \quad f(b_2) = 0,0004.$$

Оскільки $b_2 - a_2 = 0,0001$, то обчислення можна припинити і за наближене значення кореня $\xi$ взяти число $\xi^* = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Отже, за наближене значення кореня $\xi$ даного рівняння з точністю до 0,0001 приймаємо значення $\xi^* = 0,21335$.

## 2.6. Метод ітерації

Одним із найважливіших способів наближеного розв'язування рівняння $f(x) = 0$ є метод ітерації, який часто називають методом послідовних наближень.

Нехай функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, де міститься тільки один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Запишемо це рівняння у вигляді

$$x = \varphi(x). \tag{2.25}$$

Виберемо на відрізку $[a, b]$ деяким способом наближене значення $x_0$ кореня $\xi$ рівняння (2.25) і побудуємо числову послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...). \tag{2.26}$$

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена та диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому усі її значення належать цьому відрізку. Тоді, якщо існує таке додатне число $q < 1$, що $|\varphi'(x)| \le q < 1$ при $a \le x \le b$, то:

1. послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ збігається незалежно від початкового значення $x_0 \in [a, b]$;
2. границя цієї послідовності $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ є коренем рівняння (2.25) на відрізку $[a, b]$.

Похибка наближеного значення $x_n$ кореня $\xi$, знайденого методом ітерацій, оцінюється нерівністю

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{q}{1-q}\left| x_n - x_{n-1}\right|. \qquad (2.27)$$

Для того, щоб знайти наближене значення кореня з абсолютною похибкою, яка не перевищує заданого числа $\varepsilon$, достатньо визначити $n$ так, щоб виконувалася нерівність

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon. \qquad (2.28)$$

З доведенням цієї теореми і формули (2.27) читач може ознайомитися в [6], гл. IV, § 8.

Дане рівняння $f(x)=0$ можна записати у вигляді $x=\varphi(x)$ різними способами. З наведеної теореми випливає, що повинна виконуватись умова

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1 \qquad (2.29)$$

у деякому околі шуканого кореня $\xi$.

Чим менше число $q$, тим швидше послідовні наближення збігаються до кореня о .

Наведемо один загальний спосіб зведення рівняння $f(x)=0$ до вигляду (2.25). Замінимо рівняння $f(x)=0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = x - \lambda f(x), \qquad (2.30)$$

де число $\lambda \ne 0$.

Позначимо $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$.

Підберемо параметр $\lambda$ так, щоб похідна $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ була малою за абсолютною величиною на відрізку $[a, b]$. Припустимо, що $\varphi'(x_0) = 1 - \lambda f'(x_0) = 0$, або $\varphi'(a) = 1 - \lambda f'(a) = 0$, або $\varphi'(b) = 1 - \lambda f'(b) = 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов наведеної теореми метод ітерації збігається при будь-якому виборі початкового значення $x_0 \in [a, b]$.

Завдяки цьому окрема помилка в обчисленнях, яка не виводить за межі відрізка $[a, b]$, не впливає на остаточний результат, оскільки помилкове значення можна розглядати як нове початкове наближення $x_0$. Можливо тільки, що збільшиться обсяг обчислювальної роботи. Властивість самовиправлення робить метод ітерації одним із найпоширеніших методів обчислень.

**Приклад 2.6.** Обчислити корені рівняння $x \ln x - 1 = 0$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$.

**Розв'язування.** Запишемо дане рівняння у вигляді $\ln x = \frac{1}{x}$. Побудувавши графіки функцій $y = \ln x$ та $y = \frac{1}{x}$, визначимо, що дане рівняння має єдиний корінь $\xi$, який міститься на відрізку [1,5; 2].

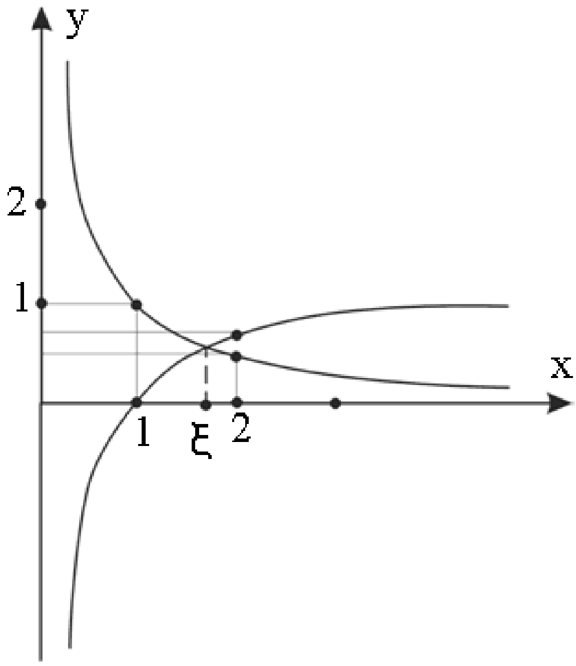


Рисунок 7

Представимо дане рівняння у вигляді $x=\varphi(x)$. Це можна зробити кількома способами:

1. Якщо записати рівняння $x\ln x-1=0$ у вигляді $x=\dfrac{1}{\ln x}$, то
$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln x},\quad \varphi'(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x}\ \text{ і }\ |\varphi'(x)|>1\ \text{ на відрізку } [1{,}5;\,2].$$
2. Якщо дане рівняння записати у вигляді $x=e^{\frac{1}{x}}$, то $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $\varphi'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, $\varphi'(1{,}5)=-0{,}87$, $\varphi'(2)=-0{,}41$ і $|\varphi'(x)|\le q<1$, де $q=0{,}87$ (оскільки похідна $\varphi'(x)$ неперервна на відрізку [1,5; 2] ).
3. Запишемо дане рівняння у вигляді $x=x+\lambda(x\ln x-1)$.
$$\varphi(x)=x+\lambda(x\ln x-1),\quad \varphi'(x)=1+\lambda(\ln x+1).$$

Нехай $\varphi'(1{,}5)=0$. Для визначення параметра одержуємо рівняння
$$1+\lambda(\ln 1{,}5+1)=0.$$

Звідси одержуємо $\lambda=-0{,}71$. Тоді $\varphi'(2)=1-0{,}71(\ln 2+1)=-0{,}202$. Отже, $|\varphi'(x)|\le q_1<1$ на відрізку [1,5; 2], де $q_1=0{,}21$.

Із двох останніх способів вибираємо третій, оскільки $q_1<q$.

Таким чином, задане рівняння $x\ln x-1=0$ ми записали у вигляді
$$x=x-0{,}71(x\ln x-1),\ \text{ тобто }\ \varphi(x)=x-0{,}71(x\ln x-1).$$

За початкове наближення кореня $\xi$ приймемо середину відрізка [1,5; 2], тобто $x_0=1{,}75$.

Послідовні наближення $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ обчислюємо за формулою

$$x_{n+1} = x_n - 0,71\left(x_n \ln x_n - 1\right), \quad \left(n = 0, 1, 2, ...\right).$$

Отримаємо:

$$x_1 = 1,75 - 0,71\left(1,75\ln 1,75 - 1\right) = 1,765,$$
$$x_2 = 1,765 - 0,71\left(1,765\ln 1,765 - 1\right) = 1,7630,$$
$$x_3 = 1,7630 - 0,71\left(1,7630\ln 1,7630 - 1\right) = 1,76325,$$
$$x_4 = 1,76325 - 0,71\left(1,76325\ln 1,76325 - 1\right) = 1,76322.$$

Оскільки повинна виконуватися нерівність (2.28)

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{1 - 0,21}{0,21} \cdot 0,00001, \text{ тобто } \left|x_n - x_{n-1}\right| \le 3,77 \cdot 10^{-5},$$

то обчислення припиняємо.

Отже, наближене значення кореня $\xi^* = 1,76322$ з точністю до $10^{-5}$.

Зауважимо, що при підстановці $\xi^*$ у ліву частину даного рівняння $x\ln x - 1 = 0$ отримуємо $\xi^* \ln \xi^* - 1 = 4,5 \cdot 10^{-6}$.

## 2.7. Завдання для самостійної роботи

1. Визначити кількість дійсних коренів рівняння та обчислити найбільший з них з точністю до 0,001: а) методом половинного поділу; б) методом хорд та дотичних; в) методом ітерації.

   1.1. $4\lg x - x + 2 = 0$;
   1.2. $e^{-x} - 2x + 3 = 0$;
   1.3. $\ln x + 2x - 3 = 0$;
   1.4. $e^x + x^2 - 2 = 0$;
   1.5. $4x - \cos x = 0$;
   1.6. $x^3 - 6x + 3 = 0$;
   1.7. $e^{2x} + x - 2 = 0$;
   1.8. $2 - x - \lg x = 0$;
   1.9. $\sin x + x - 1 = 0$;
   1.10. $2 - x - \ln x = 0$.

# РОЗДІЛ 3

# МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B, \tag{3.1}$$

де $A$ – квадратна матриця порядку $n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$B = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n)^T$ – вектор-стовпець правих частин рівнянь;

$X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)^T$ – вектор-стовпець невідомих.

Якщо визначник матриці $A$ не дорівнює нулю, то система (3.1) має єдиний розв'язок. У цьому випадку систему (3.1) можна розв'язати за формулами Крамера. Проте для великих значень $n$ цей метод важко реалізувати, оскільки він потребує кількості арифметичних дій порядку $n$! Тому застосовують інші методи розв'язування, зокрема метод Гаусса, який потребує кількості арифметичних дій порядку $n^3$.

Методи розв'язування системи (3.1) поділяють на дві групи: прямі та ітераційні.

У прямих (або точних) методах розв'язок $X$ системи (3.1) виражається у вигляді точних формул через коефіцієнти системи й знаходиться за скінченну наперед відому кількість арифметичних дій. Але внаслідок похибок заокруглення прямі методи насправді не приводять до точного розв'язку системи (3.1) і назвати їх точними можливо лише, залишаючи осторонь похибки заокруглення. До точних методів належать формули Крамера, метод Гаусса, метод головних елементів та інші.

Ітераційні методи (їх називають також методами послідовних наближень) полягають у тому, що розв'язок $X$ системи (3.1) шукають як границю при $k \to \infty$ послідовних наближень $X^{(k)}$, де $k$ – номер ітерації. Ітерації проводять до одержання розв'язку із заданою точністю. До ітераційних методів належать метод простої ітерації, метод Зейделя та інші.

## 3.1. Метод Гаусса

Запишемо систему (3.1) у розгорнутому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,\\
&.............................................\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Визначник системи (3.2)

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.3}
$$

Метод Гаусса полягає у послідовному вилученні невідомих із рівнянь системи (3.2).

Припустимо, що коефіцієнт при $x_1$ у першому рівнянні $a_{11} \neq 0$. Поділивши перше рівняння на $a_{11}$, одержимо:

$$
x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1, \tag{3.4}
$$

де $c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ $\left(j = \overline{2, n}\right)$, $d_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Користуючись рівнянням (3.4), вилучимо $x_1$ з усіх рівнянь системи (3.2), крім першого. Для цього помножимо рівняння (3.4) на $a_{21}$ і віднімемо від другого рівняння системи (3.2). Потім помножимо (3.4) на $a_{31}$ і віднімемо від третього рівняння і т.д. У результаті отримаємо систему рівнянь, еквівалентну даній системі

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n &= d_1,\\
a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)},\\
&..................................\\
a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Тут позначено

$$
a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1},\ b_i^{(1)} = b_i - d_1 a_{i1} \quad (i = \overline{2, n};\ j = \overline{2, n}). \tag{3.6}
$$

У системі (3.5) $x_1$ міститься тільки в першому рівнянні, тому перший крок методу Гаусса виконано.

Розглянемо скорочену систему, яка містить усі рівняння системи (3.5), починаючи з другого.

$$
\begin{aligned}
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)},\\
a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}.
\end{aligned}
\qquad (3.7)
$$

Якщо $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то поділимо перше рівняння системи (3.7) на $a_{22}^{(1)}$ і, користуючись одержаним рівнянням, вилучимо невідоме $x_2$ з усіх рівнянь системи (3.7), крім першого.

Вилучаючи аналогічно невідомі $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$, отримаємо систему рівнянь виду

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1j}x_j + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1,\\
x_2 + \ldots + c_{2j}x_j + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_j + \ldots + c_{jn}x_n &= d_j,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= d_n,
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

яка еквівалентна системі (3.2).

Матриця $C$ системи (3.8) має трикутний вигляд

$$
C = \begin{pmatrix}
1 & c_{12} & c_{1j} & c_{1n}\\
0 & 1 & c_{2j} & c_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 1 & c_{jn}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}. \qquad (3.9)
$$

Зведення системи (3.2) до системи (3.8) називають прямим ходом методу Гаусса, а знаходження значень невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ із системи (3.8) – зворотним ходом.

Оскільки матриця системи (3.8) має трикутний вигляд, то можна послідовно визначити всі невідомі, починаючи з $x_n$.

$$
x_n = d_n, \quad x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1,\,n}\,x_n \text{ і т.д.}
$$

Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$
x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}x_j; \quad (i = \overline{n-1,1}); \quad x_n = d_n. \qquad (3.10)
$$

При здійсненні прямого ходу методу Гаусса немає потреби проводити дії з рівняннями системи (3.2), а можна усі перетворення виконувати над розширеною матрицею цієї системи. Запишемо загальні формули, за допомогою яких розширена матриця системи (3.2)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

зводиться в результаті виконання прямого ходу методу Гаусса до розширеної матриці системи (3.8)

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

Нехай вже виконані перші $k-1$ кроки, тобто із системи (3.2) вилучені змінні $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Отримаємо систему

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1,k-1}x_{k-1} + c_{1k}x_k + ... + c_{1n}x_n &= d_1, \\ x_2 + ... + c_{2,k-1}x_{k-1} + c_{2k}x_k + ... + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k-1} + c_{k-1,k}x_k + ... + c_{k-1,n}x_n &= d_{k-1}, \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + ... + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nk}^{(k-1)}x_k + ... + a_{nn}^{(k-1)}x_n &= b_n^{(k-1)}. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Поділимо $k-$те рівняння цієї системи на $a_{kk}^{(k-1)}$, припустивши, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Одержимо рівняння

$$x_k + c_{k,k+1}x_k + ... + c_{k,n}x_n = d_k, \qquad (3.14)$$

де $c_{kj} = \dfrac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ $\left(j = \overline{k+1, n}\right)$, $d_k = \dfrac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$.

Помножимо рівняння (3.14) на $a_{ik}^{(k-1)}$ $(i = k + \overline{1,n})$ та віднімемо одержане співвідношення від $i$-го рівняння системи (3.13). Рівняння системи (3.13), починаючи з $(k+1)$-го, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} a_{k+1,k+1}^{(k)}\, x_{k+1} + ... + a_{k+1,n}^{(k)}\, x_n &= b_{k+1}^{(k)}, \\ a_{k+2,k+1}^{(k)}\, x_{k+1} + ... + a_{k+2,n}^{(k)}\, x_n &= b_{k+2}^{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,k+1}^{(k)}\, x_{k+1} + ... + a_{n,n}^{(k)}\, x_n &= b_n^{(k)}, \end{aligned}$$

де $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}$; $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k$; $(i = \overline{k+1, n};\ j = \overline{k+1, n})$.

Отже, здійснено $k$-тий крок прямого ходу методу Гаусса.

Таким чином, елементи розширеної матриці $\overline{A}$ перетворюються за формулами:

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}, \quad (k, j = \overline{1, n});$$

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (j = \overline{k+1, n}; \ k = \overline{1, n}); \tag{3.15}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, \quad (i, j = \overline{k+1, n}; \ k = \overline{1, n}).$$

$$b_k^{(0)} = b_k, \quad d_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \ \left(k = \overline{1, n}\right);$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k, \quad (i = \overline{k+1, n}; \ k = \overline{1, n}). \tag{3.16}$$

Число $a_{kk}^{(k-1)}$ називають ведучим елементом на $k-$му кроці вилучення. Істотним обмеженням даного методу є припущення, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad (k = \overline{1, n})$. Навіть, якщо деякий ведучий елемент не дорівнює нулю, а досить близький до нуля, то в процесі обчислень можуть нагромаджуватися похибки. Вихід із цієї ситуації полягає в тому, що за ведучий елемент на $k-$му кроці вибирають не $a_{kk}^{(k-1)}$, а інше число, тобто на $k-$му кроці вилучають не $x_k$, а іншу змінну.

Однією з модифікацій методу Гаусса є схема з вибором головного елемента. Розглянемо розширену матрицю $\overline{A}$ системи (3.2). Серед елементів $a_{ij}$ цієї матриці виберемо найбільший за модулем елемент $a_{pq}$, який називають першим головним елементом. Поділимо рядок з номером $p$ матриці $\overline{A}$ на цей елемент і одержимо перший головний рядок, в якому замість $a_{pq}$ стоїть число 1. За допомогою першого головного рядка вилучимо з усіх неголовних рядків змінну $x_q$.У результаті отримаємо нову матрицю, в якій усі елементи $q-$го стовпця дорівнюють нулю, крім елемента, що знаходиться в рядку з номером $p$.

Відкинувши перший головний рядок та $q-$ий стовпець, одержимо матрицю з меншою на одиницю кількістю рядків і стовпців. Знову виберемо найбільший за модулем елемент цієї матриці, який не входить у стовпець вільних членів (другий головний елемент). Поділимо рядок, що містить другий головний елемент, на цей елемент і одержимо другий головний рядок і т. д. Оскільки визначник системи (3.2) $|A| \neq 0$, то через $n$ кроків ми отримаємо матрицю еквівалентної системи, яка складається з $n$ головних рядків. Після належної зміни нумерації невідомих ця матриця матиме трикутний вигляд.

**Приклад 3.1.** Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{aligned}
7,24x_1 + 0,93x_2 - 4,65x_3 + 1,29x_4 &= -0,13,\\
-2,61x_1 + 3,12x_2 + 4,97x_3 - 0,78x_4 &= -1,56,\\
3,18x_1 + 0,84x_2 - 2,88x_3 \qquad\qquad &= -4,13,\\
0,92x_1 + 1,38x_2 \qquad\qquad - 2,54x_4 &= 3,69.
\end{aligned}$$

**Розв'язування.** Запишемо розширену матрицю цієї системи і виконаємо перетворення, які зводять розширену матрицю до трикутної форми. Усі обчислення наведено в таблиці.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7,24<br>- 2,61<br>3,18<br>0,92 | 0,93<br>3,12<br>0,84<br>1,38 | - 4,65<br>4,97<br>- 2,88<br>0 | 1,29<br>- 0,78<br>0<br>- 2,54 | - 0,13<br>- 1,56<br>- 4,13<br>3,69 |
| 1<br>0<br>0<br>0 | 0,1285<br>3,4554<br>0,4314<br>1,2618 | - 0,6423<br>3,2936<br>- 0,8375<br>0,5909 | 0,1782<br>- 0,3149<br>- 0,5667<br>- 2,7039 | - 0,0180<br>- 1,6070<br>- 4,0728<br>3,7066 |
| | 1<br>0<br>0 | 0,9532<br>- 1,2487<br>- 0,6118 | - 0,0911<br>- 0,5272<br>- 2,5889 | - 0,4651<br>- 3,8722<br>4,2935 |
| | | 1<br>0 | 0,4222<br>- 2,3306 | 3,1010<br>6,1907 |
| | | | 1 | - 2,6563 |
| | | 1 | 0 | 4,2225 |
| | 1 | 0 | 0 | - 4,7320 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 3,7755 |

Отже, $x_1 = 3,7755, \quad x_2 = -4,7320, \quad x_3 = 4,2225, \quad x_4 = -2,6563.$

## 3.2. Метод простої ітерації

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.2), визначник якої $|A| \neq 0$. Припускаючи, що діагональні елементи матриці $A$ не дорівнюють нулю, тобто $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, ..., n)$, розв'яжемо перше рівняння цієї системи відносно $x_1$, друге – відносно $x_2$ і т. д. Одержимо еквівалентну систему:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + ... + \alpha_{1n} x_n + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + ... + \alpha_{2n} x_n + \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + ... + \alpha_{n,n-1} x_{n-1} + \beta_n, \end{aligned} \tag{3.17}$$

де $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$; $\quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$;

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

Введемо матриці

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .... & \alpha_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & \alpha_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ \alpha_{nn} & \alpha_{n2} & .... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)^T$$

і запишемо систему (3.17) в матричній формі

$$X = \alpha X + \beta, \qquad (3.18)$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – стовпець невідомих.

**Зауваження.** Систему (3.2) можна звести до вигляду (3.18) так, щоб $\alpha_{ii} \neq 0$. Для цього запишемо діагональні елементи матриці $A$ у вигляді

$$a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)}, \quad \text{де } a_{ii}^{(1)} \neq 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Тоді дана система (3.2) еквівалентна системі (3.18), якщо

$$\alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}} \quad \text{при } i \neq j, \; \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}^{(1)}} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Систему (3.18) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. Нульове наближення розв'язку цієї системи можна вибирати довільно. Приймемо, наприклад, за нульове наближення стовпець вільних членів

$$X^{(0)} = \beta.$$

Перше наближення розв'язку системи (3.18) обчислюємо за формулою $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta$, друге наближення – $X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta$ і т.д. Якщо вже обчислено $k$-е наближення $X^{(k)}$, то $(k+1)$-е наближення $X^{(k+1)}$ одержуємо за формулою

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta \quad (k = 0, 1, 2, ...). \qquad (3.19)$$

Якщо послідовність $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, ... , $X^{(k)}$,... має границю $X = \lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи (3.18). Справді, перейшовши до границі при $k \to \infty$ у рівності (3.19), одержимо: $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} + \beta$ або $X = \alpha X + \beta$.

Отже, стовпець $X$ є розв'язком системи (3.18).

Запишемо формули наближень у розгорнутому вигляді:

$$x_i^{(0)} = \beta_i, \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \quad (i = 1, 2, ..., n; \; k = 0, 1, 2, ...) . \qquad (3.20)$$

Наведемо формулювання достатніх умов збіжності ітераційного процесу для системи (3.18), з виведенням яких читач може ознайомитися в [6], гл. IX, § 1.

**Теорема.** Якщо елементи матриці $\alpha$ задовольняють одну з умов

а) $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| = g_1 < 1$

або

(3.21)

б) $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| = g_2 < 1,$

то процес ітерації для системи лінійних рівнянь (3.18) збігається до її єдиного розв'язку при будь-якому нульовому наближенні $X^{(0)}$.

**Наслідок.** Для системи лінійних рівнянь (3.2) процес простої ітерації збігається до її єдиного розв'язку, якщо виконуються нерівності

а) $\left|a_{ii}\right| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad (i = 1, 2, ..., n)$

або

(3.22)

б) $\left|a_{jj}\right| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad (j = 1, 2, ..., n),$

тобто ітераційний процес збігається, якщо модулі діагональних елементів матриці $A$ системи (3.2) або для кожного рядка перевищують суму модулів недіагональних елементів цього рядка, або для кожного стовпця перевищують суму модулів недіагональних елементів цього стовпця.

Оцінюють похибку наближеного розв'язку $x_i^{(k)}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ за однією з таких формул:

$$\max_i \left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{g_1}{1-g_1} \max_i \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|, \tag{3.23}$$

якщо виконана умова (3.21; а), або

$$\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{g_2}{1-g_2} \sum_{i=1}^{n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|, \tag{3.24}$$

якщо виконана умова (3.21; б).

У випадку оцінювання похибки за формулою (3.23) для того, щоб знайти наближений розв'язок системи (3.18) з абсолютною похибкою, яка не перевищує заданого числа $\varepsilon$, тобто, щоб виконувались умови $\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$, достатньо визначити $k$ так, щоб справджувалась нерівність

$$\max_i \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \frac{1-g_1}{g_1} \varepsilon . \tag{3.25}$$

Аналогічну нерівність можна записати також у випадку оцінювання похибки наближеного розв'язку за формулою (3.24).

**Приклад 3.2.** Методом простої ітерації знайти з точністю до $\varepsilon = 0{,}005$ розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -1,2x_1 + 0,3x_2 - 0,4x_3 = 2,9, \\ 0,2x_1 + 2,5x_2 - 0,6x_3 = -1,5, \\ 0,3x_1 + 0,6x_2 + 1,5x_3 = 3,6. \end{cases}$$

**Розв'зування.** Зведемо цю систему до вигляду (3.18). Для цього перше рівняння розв'яжемо відносно $x_1$, друге – відносно $x_2$ третє – відносно $x_3$.

$$\begin{cases} x_1 = 0,2500x_2 - 0,3333x_3 - 2,4167, \\ x_2 = -0,0800x_1 + 0,2400x_3 - 0,6000, \\ x_3 = -0,2000x_1 - 0,4000x_2 + 2,4000. \end{cases}$$

Коефіцієнти отриманої системи задовольняють умову (3.21; а). Справді,

$$\sum_{j=1}^{3} \left|\alpha_{1j}\right| = 0,5833, \quad \sum_{j=1}^{3} \left|\alpha_{2j}\right| = 0,3200, \quad \sum_{j=1}^{3} \left|\alpha_{3j}\right| = 0,6000,$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{3} \left|\alpha_{ij}\right| = g_1 = 0,6 < 1.$$

Отже, процес простої ітерації збігається; при цьому точність $k$–го наближення можна оцінити за формулою (3.23).

За нульове наближення візьмемо, наприклад, елементи стовпця вільних членів

$$x_1^{(0)} = -2,4167; \quad x_2^{(0)} = -0,6000; \quad x_3^{(0)} = 2,4000.$$

Наступні наближення будемо обчислювати за формулами (3.20). Закінчимо обчислення тоді, коли буде виконана умова (3.25).

$$x_1^{(1)} = 0,2500 \cdot (-0,6000) - 0,3333 \cdot 2,4000 - 2,4167 = -3,3666,$$

$$x_2^{(1)} = -0,0800 \cdot (-2,4167) + 0,2400 \cdot 2,4000 - 0,6000 = 0,1693,$$

$$x_3^{(1)} = -0,200 \cdot (-2,4167) - 0,4000 \cdot (-0,6000) + 2,4000 = 3,1233 \quad \text{і т.д.}$$

Отримані результати запишемо у таблицю.

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | – 2,4167 | – 0,6000 | 2,4000 |
| 1 | – 3,3666 | 0,1693 | 3,1233 |
| 2 | – 3,4144 | 0,4189 | 3,0056 |
| 3 | – 3,3137 | 0,3945 | 2,9153 |
| 4 | – 3,2897 | 0,3648 | 2,9049 |
| 5 | – 3,2937 | 0,3604 | 2,9120 |
| 6 | – 3,2972 | 0,3624 | 2,9153 |
| 7 | – 3,2978 | 0,3634 | 2,9145 |

Оскільки $\frac{1-g_1}{g_1}\varepsilon = \frac{1-0,6}{0,6} \cdot 0,005 = 0,0033$, то нерівність (3.25) справджується при $k = 7$. Тому за наближені значення невідомих потрібно взяти $x_1^{(7)}$, $x_2^{(7)}$, $x_3^{(7)}$:

$$x_1 = -3,298; \quad x_2 = 0,363; \quad x_3 = 2,914.$$

## 3.3. Зведення лінійної системи до вигляду, придатного для ітерацій

Розглянемо довільну лінійну систему вигляду (3.1) $AX = B$, визначник якої $|A| \neq 0$.

За допомогою елементарних перетворень рівнянь системи (3.1) цю систему завжди можна звести до еквівалентної системи (3.18), для якої умови (3.21) збіжності ітераційного процесу будуть виконані ([6], гл. VIII, § 11).

На практиці це зведення роблять таким чином. Із даної системи вибирають рівняння, в кожному з яких є коефіцієнт, модуль якого більший від суми модулів усіх інших коефіцієнтів рівняння. Кожне вибране рівняння записують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним. Із рівнянь системи, які залишилися, складають лінійно незалежні між собою лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб одержувати рівняння, аналогічні вибраним, і щоб усі вільні рядки системи були заповнені. При цьому потрібно, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, яка є рівнянням нової системи.

**Приклад 3.2.** Звести до вигляду, придатного для ітерацій, системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 8, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6; \end{aligned}$  б) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,5, && \text{(I)} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0,6, && \text{(II)} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -0,4. && \text{(III)} \end{aligned}$

**Розв'язування.**

а). Перше рівняння задовольняє умову (3.22), оскільки $4 > 1+1$. Друге рівняння даної системи приймемо за третє рівняння нової системи, а третє рівняння даної системи запишемо другим рівнянням нової системи.

Одержимо систему

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Усі рівняння отриманої системи задовольняють умову (3.22). З першого рівняння цієї системи виразимо $x_1$, з другого рівняння – $x_2$, з третього рівняння – $x_3$. Одержимо систему вигляду (3.18)

$$x_1 = 0,25x_2 - 0,25x_3 + 0,5,$$
$$x_2 = -0,25x_1 - 0,25x_3 + 1,5,$$
$$x_3 = -0,2x_1 + 0,4x_2 + 1,6,$$

яка задовольняє умову (3.21) збіжності ітераційного процесу.

б). У рівнянні (I) коефіцієнт при $x_2$ за модулем більший від суми модулів інших коефіцієнтів, тому це рівняння можна прийняти за друге рівняння нової системи.

Перше рівняння нової системи одержимо таким чином: рівняння (III) помножимо на 4 і додамо до рівняння (II). В результаті отримаємо рівняння $9x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1$.

Для одержання третього рівняння нової системи рівняння (II) помножимо на 3, рівняння III помножимо на $-3$ і обидва отримані співвідношення додамо до рівняння (I).

Третє рівняння нової системи має вигляд $-2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4,5$.

Отже, ми отримали систему

$$9x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,5,$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4,5.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку, з першого рівняння цієї системи виразимо $x_1$, з другого – $x_2$, з третього – $x_3$ і одержимо систему вигляду (3.18), до якої можна застосувати метод ітерації.

## 3.4. Метод Зейделя

Розв'язання лінійної системи за методом Зейделя є деякою модифікацією методу простої ітерації. Якщо при обчисленні $(k+1)$-го наближення будь-якого з невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ за методом простої ітерації використовують тільки $k$-ті наближення цих невідомих, то при обчисленні $(k+1)$-го наближення невідомого $x_i$ за методом Зейделя враховують вже обчислені $(k+1)$-і наближення невідомих $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$.

Виберемо початкові наближення коренів системи (3.18)

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}.$$

Якщо вже відомі $k$-ті наближення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$ коренів системи, то згідно з методом Зейделя $(k+1)$-і наближення обчислюємо за формулами

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1,$$

$$x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \beta_2,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, \qquad (3.24)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n,$$

$$(k = 0, 1, 2, ...).$$

Достатні умови збіжності (3.21) справджуються також і для методу Зейделя ([6], гл. IX, § 3-5).

Природно сподіватися, що ітерації за способом Зейделя дадуть при однаковій кількості кроків точніші результати, ніж прості ітерації. Зазвичай ці сподівання справджуються. Проте потрібно мати на увазі, що умови збіжності методу простої ітерації та методу Зейделя різні. Тому можливі випадки, коли процес Зейделя збігається повільніше, ніж процес простої ітерації, а також можливі випадки, коли один із цих процесів для даної системи виявляється розбіжним, а інший збігається.

**Приклад 3.3.** Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя.

$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$

$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22,$$

$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38.$$

**Розв'язування.** Зведемо цю систему до вигляду (3.18). Для цього рівняння даної системи запишемо в такому порядку:

$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38,$$

$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$

$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22.$$

Перше з цих рівнянь розв'яжемо відносно $x_1$, друге – відносно $x_2$, третє – відносно $x_3$. Одержимо еквівалентну систему

$$x_1 = 0,21x_2 - 0,09x_3 + 0,38,$$

$$x_2 = 0,12x_1 + 0,13x_3 + 0,82,$$

$$x_3 = 0,28x_1 - 0,19x_2 + 0,22,$$

яка задовольняє достатню умову (3.21) збіжності ітераційного процесу.

За початкове (нульове) наближення візьмемо, наприклад, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. Наступні наближення будемо обчислювати за формулами (3.24).

$$x_1^{(1)} = 0,38;\ x_2^{(1)} = 0,12 \cdot 0,38 + 0,13 \cdot 0 + 0,82 = 0,87,$$
$$x_3^{(1)} = 0,28 \cdot 0,38 - 0,19 \cdot 0,87 + 0,22 = 0,16,$$
$$x_1^{(2)} = 0,21 \cdot 0,87 - 0,09 \cdot 0,16 + 0,38 = 0,548,$$
$$x_2^{(2)} = 0,12 \cdot 0,548 + 0,13 \cdot 0,16 + 0,82 = 0,907,$$
$$x_3^{(2)} = 0,28 \cdot 0,548 - 0,19 \cdot 0,907 + 0,22 = 0,201 \quad \text{і т.д.}$$

Одержані результати запишемо у таблицю.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^{(k)}$ | 0 | 0,38 | 0,548 | 0,5524 | 0,5535 | 0,55350 |
| $x_2^{(k)}$ | 0 | 0,87 | 0,907 | 0,9124 | 0,9126 | 0,91263 |
| $x_3^{(k)}$ | 0 | 0,16 | 0,201 | 0,2013 | 0,2016 | 0,20158 |

Оскільки четверте та п’яте наближення розв’язку досить близькі одне до одного, то можна прийняти: $x_1 = 0,5535, \quad x_2 = 0,9126, \quad x_3 = 0,2016.$

## 3.5. Завдання для самостійної роботи

1. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса: а) без вибору головного елемента; б) з вибором головного елемента. Перевірити.

$$1.1.\ A = \begin{pmatrix} 1,34 & -2,15 & -6,05 & 2,48 & 1,75 & 4,85 \\ -3,15 & 3,28 & 7,24 & -4,39 & 5,17 & -1,89 \\ 2,18 & 3,41 & -1,74 & 2,53 & 3,98 & 0,48 \\ -0,93 & 1,78 & 2,91 & -3,47 & -0,93 & 4,85 \\ 5,07 & -2,18 & 3,15 & 6,24 & 4,33 & -5,11 \\ -2,18 & 3,25 & -4,03 & -5,17 & 2,22 & 0,48 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2,07 \\ -0,18 \\ -3,15 \\ 1,87 \\ 4,13 \\ -2,37 \end{pmatrix};$$

$$1.2.\ A = \begin{pmatrix} 1,75 & -4,85 & 5,17 & 2,37 & 1,05 & -2,34 \\ 2,47 & 3,45 & 1,28 & 2,07 & 3,91 & 2,52 \\ -3,72 & 2,93 & 0,74 & 3,28 & 0,64 & 1,75 \\ 1,38 & -3,83 & 4,23 & 3,75 & -1,25 & 2,78 \\ 2,35 & -2,44 & 1,17 & 2,93 & 3,28 & -1,03 \\ 3,44 & -2,56 & -1,38 & -2,81 & 4,62 & 0,65 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3,25 \\ -2,41 \\ 1,44 \\ 2,83 \\ 1,15 \\ 2,35 \end{pmatrix};$$

1.3. $A=\begin{pmatrix} 1,37 & 0,63 & -2,34 & 3,81 & 4,08 & -1,75 \\ -2,81 & 4,62 & 3,13 & -2,13 & 5,11 & 2,73 \\ 0,72 & 2,37 & 1,96 & 2,38 & -1,38 & -1,76 \\ 1,38 & -3,83 & -1,03 & 4,23 & 3,75 & 7,85 \\ -4,83 & 2,68 & 1,39 & 2,72 & 0,58 & 0,63 \\ 3,18 & -3,44 & 2,54 & 1,52 & 2,34 & -1,38 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3,15 \\ 0,47 \\ -2,15 \\ 4,37 \\ 3,61 \\ 1,77 \end{pmatrix}$;

1.4. $A=\begin{pmatrix} 2,32 & -1,74 & -2,43 & 1,74 & 2,36 & 3,81 \\ 0,89 & 2,38 & 5,64 & 7,85 & 6,15 & -0,83 \\ -3,14 & 0,34 & 2,17 & -4,18 & 5,37 & 4,87 \\ 1,37 & 3,62 & -4,91 & -3,38 & 2,82 & 3,15 \\ -2,19 & 5,74 & 6,31 & 4,28 & 7,34 & 2,18 \\ 1,74 & 3,56 & -2,62 & -3,71 & 4,43 & 5,13 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2,54 \\ -1,73 \\ 0,38 \\ 4,13 \\ 3,49 \\ 2,54 \end{pmatrix}$;

1.5. $A=\begin{pmatrix} 1,15 & -2,69 & -3,74 & 4,72 & 3,51 & 3,82 \\ -3,72 & 0,74 & 2,93 & 3,28 & 6,49 & 1,75 \\ 4,13 & 5,82 & 6,34 & 3,77 & -2,43 & -2,35 \\ 0,65 & 4,38 & -3,18 & 7,16 & 8,31 & 2,43 \\ -2,37 & 3,14 & 9,57 & 5,03 & 4,84 & 3,17 \\ 3,56 & -2,94 & 2,07 & -3,91 & 4,05 & -2,52 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4,71 \\ -3,15 \\ 2,36 \\ 1,44 \\ -0,83 \\ 4,37 \end{pmatrix}$;

1.6. $A=\begin{pmatrix} 6,31 & 5,48 & -1,23 & 4,17 & 3,71 & 2,34 \\ -0,35 & 2,42 & 0,78 & 6,81 & 4,38 & -1,43 \\ 2,14 & -3,71 & 2,58 & 5,17 & 8,34 & -3,27 \\ 3,72 & 1,79 & -2,50 & 3,84 & -6,15 & 4,29 \\ 1,38 & -2,14 & 1,75 & 6,31 & 2,16 & 8,42 \\ 3,26 & -1,75 & -3,89 & 5,69 & 8,07 & 2,73 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7,39 \\ 5,62 \\ 3,17 \\ -2,41 \\ 0,73 \\ 2,38 \end{pmatrix}$;

1.7. $A=\begin{pmatrix} 5,63 & 8,17 & 3,72 & -4,18 & 0,75 & 2,73 \\ -3,48 & 2,72 & 5,04 & 3,15 & -4,13 & 4,38 \\ 1,25 & 3,76 & 4,28 & -3,94 & -8,73 & 3,72 \\ 3,58 & 4,91 & -3,47 & -4,01 & -2,31 & 0,79 \\ 2,51 & 0,38 & -2,14 & 5,63 & 4,72 & 3,81 \\ 1,79 & 2,31 & 3,28 & 4,36 & 5,40 & 2,53 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,41 \\ 3,82 \\ -2,15 \\ 5,92 \\ 4,47 \end{pmatrix}$;

$$1.8.\ A=\begin{pmatrix} 2,06 & -5,64 & -2,13 & 5,13 & 0,38 & 0,81 \\ 3,41 & -3,22 & 4,53 & 2,74 & 5,92 & -4,75 \\ 5,63 & 4,12 & 3,72 & -1,82 & 4,35 & 3,20 \\ -1,69 & 3,24 & 5,89 & 6,38 & 7,14 & 5,23 \\ 4,36 & -0,62 & -2,81 & 7,34 & 2,59 & 2,73 \\ -2,34 & -3,48 & 5,73 & 0,13 & 0,48 & -4,65 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2,72 \\ -3,15 \\ 0,89 \\ 2,43 \\ 4,71 \\ 5,39 \end{pmatrix};$$

$$1.9.\ A=\begin{pmatrix} 1,23 & -2,15 & 1,47 & 2,36 & -1,34 & 3,29 \\ -1,84 & 2,58 & -2,41 & 3,48 & 0,95 & 1,24 \\ -2,51 & 1,24 & 2,19 & 3,29 & -1,07 & 2,14 \\ 3,17 & 2,63 & 0,48 & -0,39 & 1,58 & 2,35 \\ 2,75 & -1,89 & 0,93 & 4,33 & 2,12 & 0,38 \\ -1,89 & 3,41 & 0,58 & -1,32 & 0,98 & 2,14 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1,17 \\ 2,36 \\ 2,41 \\ -0,94 \\ 1,43 \\ 2,17 \end{pmatrix};$$

$$1.10.\ A=\begin{pmatrix} 4,29 & -2,15 & -3,47 & 1,36 & 3,58 & 1,29 \\ -2,50 & 3,79 & 4,89 & 3,41 & 5,32 & -3,15 \\ 3,17 & 2,63 & 5,13 & 4,72 & -3,25 & -5,18 \\ 1,24 & -1,36 & 2,78 & 5,37 & -6,83 & 4,20 \\ 2,51 & 2,74 & 4,07 & -2,35 & 4,45 & 3,17 \\ 8,32 & 0,34 & -2,41 & -1,48 & 0,98 & 2,14 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3,87 \\ 2,48 \\ 0,58 \\ 1,34 \\ 5,41 \\ 4,93 \end{pmatrix}.$$

2. Розв’язати систему рівнянь методом простої ітерації.

$$2.1.\ \begin{cases} 0,71x_1+0,15x_2+0,24x_3=0,54, \\ 0,10x_1+0,44x_2-0,13x_3=0,32, \\ 0,12x_1-0,13x_2+0,83x_3=-1,05; \end{cases}$$

$$2.2.\ \begin{cases} -0,13x_1+0,05x_2+0,63x_3=0,37, \\ -0,14x_1+0,34x_2+0,10x_3=0,31, \\ 0,74x_1+0,18x_2-0,13x_3=0,84; \end{cases}$$

$$2.3.\ \begin{cases} 11,75x_1+2,33x_2+4,15x_3=31,51, \\ 5,13x_1+1,75x_2-19,27x_3=18,45, \\ 2,36x_1-10,17x_2+3,43x_3=10,17; \end{cases}$$

$$2.4.\ \begin{cases} 0,34x_1-0,15x_2+0,10x_3=0,33, \\ 0,11x_1+0,12x_2+0,71x_3=0,28, \\ -0,13x_1+0,45x_2+0,14x_3=0,17; \end{cases}$$

2.5. $\begin{cases} 0,85x_1 - 0,17x_2 + 0,23x_3 = 0,94, \\ 0,17x_1 + 0,44x_2 + 1,16x_3 = 1,25, \\ 0,35x_1 + 1,34x_2 - 0,30x_3 = 0,87; \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 2,75x_1 - 1,25x_2 - 0,51x_3 = -0,85, \\ 0,60x_1 + 0,47x_2 - 2,15x_3 = 1,58, \\ -1,21x_1 + 3,14x_2 - 0,48x_3 = 2,41; \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 1,25x_1 - 0,20x_2 + 0,31x_3 = -0,64, \\ -0,32x_1 + 0,10x_2 - 1,54x_3 = 0,38, \\ -0,24x_1 + 1,68x_2 - 0,15x_3 = 0,43; \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 0,20x_1 + 0,14x_2 + 0,81x_3 = 0,74, \\ 0,58x_1 - 0,19x_2 + 0,05x_3 = 0,15, \\ 0,13x_1 + 0,54x_2 + 0,24x_3 = 0,34; \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 1,25x_1 - 0,11x_2 + 0,35x_3 = 2,18, \\ 0,18x_1 + 0,45x_2 + 1,18x_3 = 3,15, \\ 0,27x_1 + 0,93x_2 + 0,23x_3 = 2,48; \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 1,15x_1 - 0,23x_2 + 0,38x_3 = 0,45, \\ 0,21x_1 + 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,83, \\ 0,50x_1 + 1,27x_2 + 0,37x_3 = 2,14; \end{cases}$

3. Розв’язати систему рівнянь методом Зейделя.

3.1. $\begin{cases} 0,60x_1 + 0,78x_2 - 1,87x_3 = 1,65, \\ 3,11x_1 - 1,66x_2 - 0,60x_3 = -0,92, \\ -1,65x_1 + 3,51x_2 - 0,48x_3 = 2,57; \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 0,35x_1 + 1,23x_2 - 0,24x_3 = -0,62, \\ -0,14x_1 - 0,25x_2 + 1,61x_3 = 0,37, \\ -1,53x_1 - 0,32x_2 + 0,11x_3 = 0,48; \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42, \\ 0,65x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34, \\ 0,12x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32; \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 0,75x_1 + 0,19x_2 - 0,15x_3 = 0,76, \\ -0,16x_1 + 0,44x_2 + 0,12x_3 = 0,35, \\ -0,13x_1 + 0,08x_2 + 0,65x_3 = 0,39; \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 0,84x_1+0,12x_2-0,26x_3=0,58, \\ 0,12x_1+0,71x_2+0,15x_3=0,26, \\ -0,13x_1+0,15x_2+0,63x_3=0,38; \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} -0,15x_1+0,10x_2+0,56x_3=0,48, \\ -0,21x_1+0,44x_2+0,18x_3=0,25, \\ 0,74x_1+0,18x_2-0,16x_3=0,81; \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 9,25x_1+1,94x_2+3,75x_3=28,13, \\ 4,23x_1+1,75x_2-18,34x_3=17,54, \\ 2,37x_1-9,18x_2+4,06x_3=10,27; \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 0,15x_1+0,44x_2-0,21x_3=1,23, \\ 0,83x_1+0,13x_2+0,17x_3=0,95, \\ 0,17x_1+0,10x_2+0,96x_3=2,48; \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 0,25x_1+1,14x_2-0,25x_3=-0,48, \\ -0,24x_1-0,35x_2+1,63x_3=0,29, \\ 1,47x_1+0,28x_2-0,13x_3=-0,57; \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 0,19x_1+0,51x_2+1,23x_3=1,34, \\ 0,91x_1-0,18x_2+0,28x_3=0,78, \\ 0,33x_1+1,37x_2-0,30x_3=0,92. \end{cases}$

# РОЗДІЛ 4

# МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Багато практичних задач зводяться до розв'язування систем нелінійних рівнянь. На відміну від систем лінійних рівнянь не існує прямих методів розв'язування нелінійних систем загального вигляду. Для розв'язування систем нелінійних рівнянь зазвичай використовують ітераційні методи. Розглянемо два з них – метод Ньютона та метод простої ітерації.

## 4.1. Метод Ньютона

Для спрощення викладок розглянемо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Припустимо, що система (4.1) має розв'язки і нехай відоме початкове наближення одного з розв'язків цієї системи $x = x_0,\ y = y_0$. Це початкове наближення можна одержати, наприклад, графічним методом, побудувавши в прямокутній декартовій системі координат лінії $F(x, y) = 0$ і $\Phi(x, y) = 0$ та визначивши наближено координати точки перетину цих ліній.

Метод Ньютона для системи рівнянь (4.1) грунтується на розкладанні функцій $F(x, y)$ і $\Phi(x, y)$ у ряд Тейлора, причому члени ряду, які містять частинні похідні другого та вищих порядків, не розглядають.

Завдання полягає у знаходженні поправок (приростів) до початкових значень $x_0, y_0$. Позначимо ці поправки $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ і запишемо розв'язок системи (4.1) у вигляді:

$$x = x_0 + \Delta x^{(0)}; \quad y = y_0 + \Delta y^{(0)}. \tag{4.2}$$

Замість системи (4.1) одержуємо систему

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)},\ y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)},\ y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Розкладемо ці функції в ряд Тейлора в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ та візьмемо тільки лінійні відносно приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ члени розкладу

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= F\left(x_0, y_0\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= \Phi(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оскільки згідно з (4.3) ліві частини виразів (4.4) повинні дорівнювати нулю, то одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} = -F(x_0, y_0), \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} = -\Phi(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Символ $(\ )_0$ означає, що частинну похідну функції обчислюють у точці $M_0(x_0, y_0)$. Визначник системи (4.5) – це визначник Якобі

$$I(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{4.6}$$

обчислений в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо $I(x_0, y_0) \neq 0$, то система (4.5) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta x^{(0)} = -\frac{1}{I(x_0,y_0)}\left( F(x_0,y_0)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \Phi(x_0,y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \right), \\ \Delta y^{(0)} = \frac{1}{I(x_0,y_0)}\left( F(x_0,y_0)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \Phi(x_0,y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

За перше наближення розв'язку системи (4.1) приймаємо значення

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)},\ y_1 = y_0 + \Delta y^{(0)}. \tag{4.8}$$

Друге наближення розв'язку одержуємо таким самим способом:

$$x_2 = x_1 + \Delta x^{(1)}, \quad y_2 = y_1 + \Delta y^{(1)},$$

де $\Delta x^{(1)}, \Delta y^{(1)}$ – поправки, які обчислюємо за формулами вигляду (4.7), в яких усі функції та частинні похідні знайдено в точці $M_1(x_1, y_1)$.

Аналогічно одержуємо третє та наступні наближення розв'язку системи (4.1).

**Приклад 4.1.** Знайти наближено додатні корені системи рівнянь

$$x + 3\lg x - y^2 = 0,$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$$

**Розв'язування.** Якщо побудувати графіки функцій $x + 3\lg x - y^2 = 0$ і $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$, то можна визначити наближено координати їх точок перетину. Таких точок є дві: $A(1{,}4; -1{,}4)$ та $B(3{,}4; 2{,}2)$. Нас цікавлять додатні корені системи, тому точку $B(3{,}4; 2{,}2)$ приймемо за початкову точку $M_0$.

Отже, початкове наближення додатного розв’язку даної системи $x_0 = 3,4;\ y_0 = 2,2.$

$$F(x,y) = x + 3\lg x - y^2,$$

$$\Phi(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x\ln 10}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x.$$

Обчислимо значення функцій $F(x,y),\ \Phi(x,y)$, їх похідних та визначника $I(x,y)$ в точці $M_0(3,4;\,2,2)$.

$$F(3,4;\,2,2) = 0,1544, \qquad \Phi(3,4;\,2,2) = -0,36,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 1,3832, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = -4,4,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = 6,4, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 = -3,4,$$

$$I(3,4;\,2,2) = \begin{vmatrix} 1,3832 & -4,4 \\ 6,4 & -3,4 \end{vmatrix} = 23,4571.$$

За формулами (4.7) обчислимо поправки

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{23,4571}(-0,1544 \cdot 3,4 - 0,36 \cdot 4,4) = 0,0899 \approx 0,090,$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{23,4571}\left(0,1544 \cdot 6,4 + 0,36 \cdot 1,3832\right) = 0,0634 \approx 0,063.$$

Перше наближення розв’язку системи отримуємо за формулами (4.8).

$$x_1 = 3,4 + 0,090 = 3,490, \quad y_1 = 2,2 + 0,063 = 2,263.$$

Щоб знайти друге наближення розв’язку, обчислимо величини $\Delta x^{(1)}$ та $\Delta y^{(1)}$.

$$F(3,490;\ \ 2,263) = -0,0027, \quad \Phi(3,490;\,2,263) = 0,0123,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 1,3733, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = -4,526,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 = 6,697, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_1 = -3,490,$$

$$I(3,490;\,2,263) = 25,5178, \quad \Delta x^{(1)} = -0,0026, \quad \Delta y^{(1)} = -0,0014.$$

Отже, $x_2 = 3,490 - 0,0026 = 3,4874, \quad y_2 = 2,263 - 0,0014 = 2,2616.$

Якщо повторити усі операції з одержаним другим наближенням розв’язку цієї системи, то одержимо поправки $\Delta x^{(2)},\ \Delta y^{(2)}$, менші від $10^{-4}$. Підставивши значення $x_2$ та $y_2$ у ліві частини рівнянь заданої системи отримаємо

$$F(3,4874;\ 2,2616)=7\cdot 10^{-5}, \qquad \Phi(3,4874;\ 2,2616)=-2,2\cdot 10^{-4}.$$

Зупиняючись на другому наближенні, одержимо $x=3,4874,\ y=2,2616.$

## 4.2. Метод простої ітерації

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь із двома невідомими (4.1). Нехай $x=x_0,\ y=y_0$ є початковим наближенням розв'язку системи (4.1) $x=\xi,\ y=\eta.$ Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned} x&=f(x,y),\\ y&=\varphi(x,y) \end{aligned} \tag{4.9}$$

і побудуємо послідовність наближень розв'язку системи (4.9) за формулами:

$$\begin{aligned} &x_1=f(x_0,y_0),\ y_1=\varphi(x_0,y_0);\\ &x_2=f(x_1,y_1),\ y_2=\varphi(x_1,y_1);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_{n+1}=f(x_n,y_n),\ y_{n+1}=\varphi(x_n,y_n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.10}$$

Нехай ітераційний процес (4.10) збігається, тобто існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\eta.$ Припустимо, що функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ неперервні й перейдемо до границі при $n\to\infty$ у рівностях $x_{n+1}=f(x_n,y_n)$ і $y_{n+1}=\varphi(x_n,y_n).$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n); \quad \lim_{n\to\infty} y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n,y_n).$$

Звідси одержимо

$$\xi=f(\xi,\eta);\ \ \eta=\varphi(\xi,\eta),$$

тобто значення $\xi$ і $\eta$ є коренями системи (4.9), а, отже, й системи (4.1). Тому, взявши досить велику кількість ітерацій (4.10), отримаємо наближення розв'язку, яке буде відрізнятися від точного розв'язку системи (4.1) як завгодно мало.

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай в деякій замкненій області $G\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ міститься тільки один розв'язок системи (4.9) $x=\xi,\quad y=\eta.$ Якщо:

1) функції $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ визначені і неперервно диференційовні в $G$;
2) початкові наближення $x_0,\ y_0$ і усі наступні наближення $x_n,\ y_n$ $(n=1,2,3,...)$ містяться в області $G$;
3) в області $G$ виконуються умови

$$\begin{aligned} |f'_x(x,y)|+|\varphi'_x(x,y)|\le g_1<1,\\ |f'_y(x,y)|+|\varphi'_y(x,y)|\le g_2<1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

то послідовність наближень (4.10) збігається до коренів $x=\xi,\ y=\eta$ системи (4.9), тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi;\ \ \lim_{n\to\infty} y_n=\eta.$$

**Зауваження.** Умови (4.11) можна замінити такими умовами:

$$\begin{aligned} &\left|f'_x(x,y)\right| + \left|f'_y(x,y)\right| \le g_1 < 1, \\ &\left|\varphi'_x(x,y)\right| + \left|\varphi'_y(x,y)\right| \le g_2 < 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

З доведенням цієї теореми читач може ознайомитися в [5], гл. I, § 11.

Розглянемо один зі способів, яким можна звести систему рівнянь (4.1) до вигляду (4.9) з дотриманням умов (4.11). Запишемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha\ F(x,y) + \beta\ \Phi(x,y) = 0, \\ &\gamma\ F(x,y) + \delta\ \ \Phi(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

яка еквівалентна системі (4.1) за умови, що визначник $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \ne 0.$

Перепишемо її так:

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha\ F(x,y) + \beta\ \Phi(x,y), \\ y &= y + \gamma\ F(x,y) + \delta\ \Phi(x,y). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} &x + \alpha\ F(x,y) + \beta\ \Phi(x,y) = f(x,y), \\ &y + \gamma\ F(x,y) + \delta\ \ \Phi(x,y) = \varphi(x,y). \end{aligned}$$

Виберемо параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такими, щоб частинні похідні функцій $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ дорівнювали нулю або були досить близькі до нуля при початковому наближенні $x = x_0,\ y = y_0,$ тобто знайдемо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ як наближений розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + \alpha\ F'_x(x_0,y_0) + \beta\ \Phi'_x(x_0,y_0) &= 0 \\ \alpha\ F'_y(x_0,y_0) + \beta\ \Phi'_y(x_0,y_0) &= 0 \\ \gamma\ F'_x(x_0,y_0) + \delta\ \ \Phi'_x(x_0,y_0) &= 0 \\ 1 + \gamma\ F'_y(x_0,y_0) + \delta\ \ \Phi'_y(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

При такому виборі параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ умови (4.11) будуть виконані в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$, оскільки ми припустили, що частинні похідні функцій $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ неперервні.

**Приклад 4.2** Методом простої ітерації знайти корені системи рівнянь

$$\begin{aligned} x^2 + y - 4 = 0, \\ y - \lg x - 1 = 0 \end{aligned}$$

з точністю до 0,001.

**Розв'язування.** Побудуємо лінії $y = 4 - x^2$ та $y = \lg x + 1$. Корені даної системи – це координати точки перетину цих двох ліній.

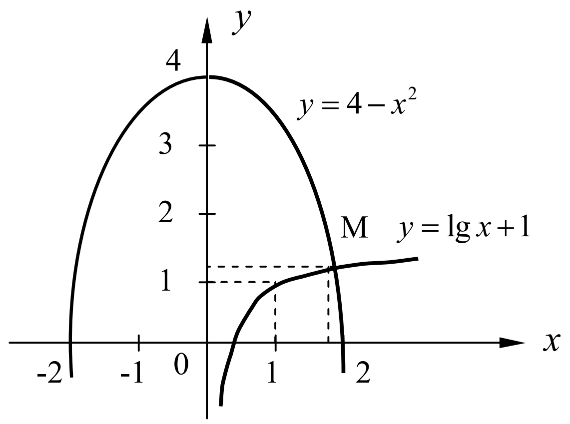


Рисунок 8

З рисунка бачимо, що за нульове наближення цих коренів можна взяти числа $x_0 = 1,75;\ y_0 = 1,25.$

Згідно з умовою задачі

$$F(x, y) = x^2 + y - 4,$$

$$\Phi(x, y) = y - \lg x - 1.$$

Задану систему перепишемо у вигляді

$$x = x + \alpha\, F(x, y) + \beta\, \Phi(x, y),$$

$$y = y + \gamma\, F(x, y) + \delta\, \Phi(x, y).$$

Знайдемо частинні похідні функцій $F(x, y),\ \Phi(x, y).$

$$F'_x(x, y) = 2x;\quad F'_y(x, y) = 1;\quad \Phi'_x(x, y) = -\frac{1}{x \ln 10};\quad \Phi'_y(x, y) = 1.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці $M_0(1,75; 1,25)$ і запишемо систему лінійних рівнянь для визначення параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta.$

$$1 + 3,5\alpha - 0,25\beta = 0,$$

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$3,5\gamma - 0,25\delta = 0,$$

$$1 + \gamma + \delta = 0.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$\alpha = -0,27,\quad \beta = 0,27,\quad \gamma = -0,07,\quad \delta = -0,93\,.$$

Отже, задана система має вигляд

$$x = x - 0,27\, F(x, y) + 0,27\, \Phi(x, y),$$

$$y = y - 0,07\, F(x, y) - 0,93\, \Phi(x, y).$$

Запишемо формули для обчислення послідовних наближень розв'язку системи

$$x_{n+1} = x_n - 0,27\, F(x_n, y_n) + 0,27\, \Phi(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n - 0,07\, F(x_n, y_n) - 0,93\, \Phi(x_n, y_n),$$

$$(n = 0, 1, 2, ....)$$

або

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x^{(n)}, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y^{(n)}, \tag{4.16}$$

де

$$\Delta x^{(n)} = -0,27 F(x_n, y_n) + 0,27 \Phi(x_n, y_n),$$
$$\Delta y^{(n)} = -0,07 F(x_n, y_n) - 0,93 \Phi(x_n, y_n).$$

Обчислимо перше наближення $x_1$, $y_1$ за формулами (4.16) при $n = 0$.

$$F(1,75;\ 1,25) = 1,75 + 1,25 - 4 = 0,31,$$

$$\Phi(1,75; 1,25) = 1,25 - \lg 1,75 - 1 = 0,007,$$

$$\Delta x^{(0)} = -0,27 \cdot 0,31 + 0,27 \cdot 0,007 = -0,08,$$

$$\Delta y^{(0)} = -0,07 \cdot 0,31 - 0,93 \cdot 0,007 = -0,03,$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)} = 1,75 - 0,08 = 1,67,$$

$$y_1 = y_1 + \Delta y^{(0)} = 1,25 - 0,03 = 1,22.$$

Аналогічно обчислюємо друге та третє наближення. Одержані результати запишемо у таблицю.

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $F(x_n, y_n)$ | $\Phi(x_n, y_n)$ | $\Delta x^{(n)}$ | $\Delta y^{(n)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,75 | 1,25 | 0,31 | 0,007 | - 0,08 | - 0,03 |
| 1 | 1,67 | 1,22 | 0,009 | - 0,003 | - 0,003 | 0,002 |
| 2 | 1,667 | 1,222 | 0,0009 | 0,0001 | - 0,0002 | - 0,0002 |
| 3 | 1,6668 | 1,2218 | | | | |

Оскільки $\left|\Delta x^{(2)}\right| < 0,0005$, $\left|\Delta y^{(2)}\right| < 0,0005$, то з точністю до 0,001 можна прийняти $x = 1,667$, $y = 1,222$.

## 4.3. Завдання для самостійної роботи

1. Методом Ньютона знайти корені системи рівнянь з точністю до 0,001.

1.1. $\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0; \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0, \\ x + y + xy - 2 = 0; \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^4 - y^3 - 1 = 0, \end{cases}$
$x > 0,\ y > 0;$

1.4. $\begin{cases} x^2 - y^2 + y - x - 4 = 0, \\ y^2 + x - 5 = 0, \end{cases}$
$x > 0,\ y > 0;$

1.5. $\begin{cases} x + 2\ln x - y^2 = 0, \\ x^2 - y - 1 = 0, \end{cases}$
$x > 0,\ y > 0;$

1.6. $\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + 1, \\ (x + 0,5)^2 + y^2 = 0,8; \end{cases}$
$x > 0, y > 0;$

1.7. $\begin{cases} x-\sin y+1,4=0, \\ \cos x-y+1,2=0; \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} y^3-x^3-6x+2=0, \\ x^3+y^3-6y+3=0, \end{cases}$
$x>0, y>0;$

1.9. $\begin{cases} tg\left(xy+0,2\right)=x^2, \\ 0,6x^2+2y^2=1, \end{cases}$
$x>0, y>0;$

1.10. $\begin{cases} x^2y^2-6x^3-3y^3+8=0, \\ 9x-y^4-2=0, \end{cases}$
$x>0, y>0.$

2. Методом ітерацій знайти корені системи рівнянь з точністю до 0,001.

2.1. $\begin{cases} x^3+y^3-6x+3=0, \\ x^3-y^3-6y+2=0, \end{cases}$
$x>0,\ y>0;$

2.2. $\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x^3-y=0, \end{cases}$
$x>0,\ y>0;$

2.3. $\begin{cases} \sin x-y-1,32=0, \\ \cos y-x+0,85=0; \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x^3-y^4+1=0, \\ x^2+y^2-4=0; \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x^2y^2-3x^3-6y^3+8=0, \\ x^4-9y+2=0, \end{cases}$
$x>0,\ y>0;$

2.6. $\begin{cases} x^2-2y^3+1=0, \\ x^3y-x-4=0; \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x-y^2+1=0, \\ x^2-y-2\ln y=0, \end{cases}$
$x>0, y>0;$

2.8. $\begin{cases} tg\,xy=y^2, \\ 2x^2+0,8y^2=1, \end{cases}$
$x>0, y>0;$

2.9. $\begin{cases} x^2+y^2-4x=0, \\ x+y+xy-2=0; \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} e^{xy}=1,2-x+y^2, \\ x^2+\left(y+0,5\right)^2=0,8 \end{cases}$
$x>0, y>0.$

# РОЗДІЛ 5

# НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

## 5.1. Основні поняття

Нехай величина $y$ є функцією аргументу $x$, тобто будь-якому значенню $x$ з області визначення цієї функції поставлено у відповідність одне значення $y$. Проте на практиці часто неможливо записати цю функціональну залежність у вигляді формули $y = f(x)$. У деяких випадках аналітичний вираз $y = f(x)$ хоч і відомий, але настільки громіздкий, що його важко використовувати в практичних розрахунках.

Найчастіше на практиці функцію задають у вигляді таблиці: дискретній множині значень аргументу $x_0, x_1, x_2 ..., x_n$ поставлено у відповідність множину значень функції $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$. Ці значення є або результатами обчислень, або експериментальними даними. Часто бувають потрібні значення функції і в інших точках, що не співпадають із точками $x_i$. Проте в багатьох випадках одержати ці значення можна тільки шляхом складних обчислень або проведенням дорогих експериментів.

Таким чином, з точки зору економії часу і коштів, ми приходимо до необхідності використання наявних табличних даних для наближеного обчислення значень функції $y$ при будь-якому значенні $x$ із деякої області. Саме цій меті й служить задача про наближення (апроксимацію) функції: дану функцію $f(x)$ потрібно наблизити (апроксимувати) деякою іншою функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення (в деякому розумінні) $\varphi(x)$ від $f(x)$ було найменшим в заданій області. Функцію $\varphi(x)$ називають апроксимуючою. Найчастіше за апроксимуючу функцію беруть алгебраїчний многочлен, оскільки значення многочлена обчислюють просто, наприклад, за схемою Горнера, його легко диференціювати, інтегрувати і т. д.

Якщо наближення будують на заданій дискретній множині точок $\{x_i\}$, то апроксимацію називають точковою. До неї відносять інтерполяцію, середньоквадратичне наближення та інші. При побудові наближення на неперервній множині точок (наприклад, на відрізку $[a, b]$) апроксимацію називають неперервною.

Одним із основних видів точкової апроксимації є інтерполяція, яка полягає в тому, що для функції $f(x)$ будують многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m, \tag{5.1}$$

який приймає в заданих точках $x_i$ ті самі значення $y_i$, що і функція $f(x)$, тобто

$$P(x_i) = y_i, \ (i = 0, 1, 2, ..., n). \tag{5.2}$$

При цьому припускають, що серед значень $x_i$ немає однакових. Точки $x_i$ називають вузлами інтерполяції, а многочлен $P(x)$ – інтерполяційним многочленом. Найвищий степінь многочлена (5.1) може дорівнювати $n$. У цьому випадку інтерполяцію називають глобальною, оскільки один многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{5.3}$$

використовують для інтерполяції функції $f(x)$ на всьому інтервалі зміни аргументу $x$. Коефіцієнти $a_i (i = 0, 1, ..., n)$ многочлена (5.3) визначають із системи рівнянь (5.2). Визначник системи (5.2) має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називають визначником Вандермонда. Він дорівнює добутку всіх можливих різниць $x_i - x_j$, де $0 \le j < i \le n$. Тому цей визначник не перетворюється в нуль, якщо усі значення $x_0, x_1, ..., x_n$ різні.

Отже, система рівнянь (5.2) має єдиний розв'язок при $x_i \ne x_k \ (i \ne k)$.

Інтерполяційні многочлени можна будувати для різних частин інтервалу зміни $x$. У цьому випадку маємо кускову (локальну) інтерполяцію.

Отже, при інтерполяції вимагають, щоб графік інтерполяційного многочлена проходив через задані в таблиці точки графіка функції. Проте в багатьох випадках виконання цієї умови утруднене (наприклад, при задаванні великої кількості вузлів) або навіть недоцільне (якщо, наприклад, табличні дані одержані шляхом вимірювань і містять помилки). Побудова апроксимуючого многочлена з умовою обов'язкового проходження його графіка через усі експериментальні точки означала б повторення допущених при вимірюваннях помилок.

Тому часто апроксимуючий многочлен вибирають так, щоб його графік проходив близько від даних точок, а поняття "близько" уточнюють при розгляді різних видів наближення. Одним із таких видів є середньоквадратичне наближення функції за допомогою многочлена (5.1).

Мірою відхилення многочлена $P(x)$ від заданої функції $f(x)$ на множині точок $(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, ..., n)$ при середньоквадратичному наближенні є величина $S$, що дорівнює сумі квадратів різниць між значеннями многочлена та функції в заданих точках:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left( P(x_i) - y_i \right)^2. \tag{5.4}$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_m$ апроксимуючого многочлена (5.1) потрібно підібрати так, щоб величина $S$ була найменшою. В цьому полягає метод найменших квадратів.

Середньоквадратичне наближення застосовують у багатьох випадках, зокрема при опрацюванні експериментальних даних.

Проте іноді при побудові наближення ставиться більш жорстка умова: вимагається, щоб в усіх точках деякого відрізка $[a, b]$ відхилення многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ за абсолютною величиною було меншим від заданого числа $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \le x \le b.$$

У цьому випадку кажуть, що многочлен $P(x)$ рівномірно апроксимує функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ з точністю $\varepsilon$.

Абсолютним відхиленням $\Delta$ многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називають максимальне значення абсолютної величини різниці між ними на даному відрізку:

$$\Delta = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| \tag{5.5}$$

Можливість побудови многочлена, який рівномірно наближує дану функцію, випливає з теореми Вейєрштрасса про апроксимацію.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то для будь-кого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P(x)$степеня $m = m(\varepsilon)$, абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ менше від $\varepsilon$.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ розкладається у рівномірно збіжний степеневий ряд, то за апроксимуючий многочлен можна взяти частинну суму цього ряду.

Існує також поняття найкращого наближення функції $f(x)$ многочленом $P(x)$ фіксованого степеня. В цьому випадку многочлен $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$ потрібно вибрати так, щоб на заданому відрізку $[a, b]$ величина абсолютного відхилення (5.5) була найменшою. Тоді многочлен $P(x)$ називають многочленом найкращого рівномірного наближення. Існування і єдиність многочлена найкращого рівномірного наближення випливає з такої теореми.

**Теорема.** Для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, і будь-якого натурального числа $m$ існує многочлен степеня, не вищого від $m$, абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ мінімальне, причому такий многочлен єдиний.

## 5.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Розглядаємо функцію $y = f(x)$, для якої задані її значення $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$. Потрібно знайти многочлен $P(x)$ степеня $n$ (5.3), для якого виконуються умови (5.2).

Систему лінійних рівнянь (5.2) запишемо в розгорнутому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0,\\
&a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Як вже було сказано, ця система має єдиний розв'язок, якщо всі значення $x_0, x_1, ..., x_n$ різні. Визначивши значення коефіцієнтів $a_i\,(i = 0, 1, ..., n)$ із системи (5.6), одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ (5.3), який дає розв'язок поставленої задачі.

Але замість того, щоб розв'язувати систему (5.6), можна безпосередньо побудувати многочлен $P(x)$, який задовольняє умови (5.2).

Спочатку знайдемо вираз для многочлена $P_0(x)$, який в точці $x = x_0$ приймає значення $y_0$, а в усіх інших точках $x_1, x_2, ..., x_n$ дорівнює нулю, тобто $P_0(x_0) = y_0,\ P_0(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n).$ Неважко перевірити, що цей многочлен має вигляд

$$
P_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}\ y_0.
$$

Аналогічно будуємо многочлен $P_j(x)$, який в точці $x = x_j$ приймає значення $y_j$, а в усіх інших точках дорівнює нулю, тобто

$$
P_j(x_j) = y_j,\ P_j(x_i) = 0\ \ (i = 0, 1, ..., n; i \neq j).
$$

Це є многочлен вигляду

$$
P_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}\ y_j.
$$

Шуканий многочлен дорівнює сумі усіх цих многочленів

$$
P(x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x),
$$

оскільки в кожній точці $x_j$ один із доданків приймає значення $y_j$, а всі інші доданки дорівнюють нулю.

Отже, многочлен $P(x)$, який задовольняє умови поставленої задачі, знайдено:

$$
P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}\ y_j. \tag{5.7}
$$

Цей многочлен називають інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Доведемо, що цей інтерполяційний многочлен єдиний. Припустимо протилежне: існує ще один многочлен $R(x)$ степеня $n$, який приймає у вузлах інтерполяції задані значення, тобто $R(x_i) = y_i\ \left(i = 0, 1, 2, ..., n\right)$. Тоді різниця $Q\left(x\right) = P\left(x\right) - R\left(x\right)$ є многочленом степеня не вищого від $n$, який перетворюється в нуль у точках $x_0, x_1, ..., x_n$, тобто має $n+1$ коренів. Звідси випливає, що $Q(x) \equiv 0$, тобто $P(x) \equiv R(x)$, оскільки многочлен степеня не вищого від $n$ не може мати $n+1$ коренів.

З формули (5.7) можна одержати вирази для лінійної $(n=1)$ і квадратичної $(n=2)$ інтерполяцій:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, y_1,\ (n=1); \tag{5.8}$$

$$P(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} y_2,\ (n=2). \tag{5.9}$$

## 5.3. Інтерполяційна схема Ейткена

Для практичного знаходження значень функції інтерполяційна формула Лагранжа (5.7) не дуже зручна. Значно зручніше обчислювати за інтерполяційною схемою Ейткена.

Формулу (5.8) для лінійної інтерполяції, тобто у випадку задавання двох точок $(x_0, y_0)$ та $(x_1, y_1)$, можна записати у вигляді

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}. \tag{5.10}$$

Інтерполяцію вищого степеня виконуємо аналогічно, причому для побудови кожного многочлена наступного степеня використовуємо вже побудовані попередні.

Якщо задано три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, то спочатку будуємо два лінійні многочлени $P_{0,1}(x)$ та

$$P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Многочлен другого степеня (5.9) буде мати вигляд

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}, \tag{5.12}$$

тобто значення функції в точці $x$, що відповідає інтерполяції другого степеня (5.9), одержуємо шляхом лінійної інтерполяції між значеннями лінійних многочленів $P_{0,1}(x)$ та $P_{1,2}(x)$.

Ця схема легко узагальнюється на вищі степені. Наприклад, при інтерполяції третього степеня за чотирма точками $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ (кубічна інтерполяція) справедлива формула

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{x_3 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}, \tag{5.13}$$

де многочлен $P_{0,1,2}(x)$ визначається формулою (5.12), а $P_{1,2,3}(x)$ побудований аналогічно.

Взагалі, якщо дано $n+1$ точок $(x_i,\, y_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, то інтерполяційний многочлен $n-$го степеня одержуємо за формулою

$$P_{0,1,...,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,...,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,...,\,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}, \tag{5.14}$$

в яку входять вже побудовані інтерполяційні многочлени попереднього степеня.

Неважко переконатися в тому, що формула (5.14), якщо її виразити послідовно через значення функції $y_0,\, y_1, ..., y_n$, перетвориться у формулу (5.7).

**Приклад 5.1.** Функція $y = f(x)$ задана таблицею

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,3 | 2,2 | 3,5 | 4,4 | 5,5 |
| $y_i$ | 4,6 | 3,7 | 2,3 | 1,2 | 2,1 |

За допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа четвертого степеня із застосуванням схеми Ейткена знайти наближене значення цієї функції при $x = 2,56$.

**Розв'язування.** Обчислення проведемо за формулами (5.10)–(5.14). Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці.

Пояснимо, як одержати деякі значення у таблиці. Наприклад,

$$P_{2,3}(x) = \frac{1}{4,4-3,5}\begin{vmatrix} 2,3 & 0,94 \\ 1,2 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,449;$$

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4-2,2}\begin{vmatrix} 3,312 & -0,36 \\ 3,449 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,334;$$

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4-1,3}\begin{vmatrix} 3,324 & -1,26 \\ 3,334 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,328;$$

$$P_{0,1,2,3,4}(x) = \frac{1}{5,5-1,3}\begin{vmatrix} 3,328 & -1,26 \\ 3,539 & 2,94 \end{vmatrix} = 3,391.$$

| $i$ | $x_i - x$ | $y_i$ | $P_{i,\,i+1}(x)$ | $P_{i,i+1,i+2}(x)$ | $P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$ | $P_{0,1,2,3,4}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1,26 | 4,6 | | | | |
| | | | 3,340 | | | |
| 1 | -0,36 | 3,7 | | 3,324 | | |
| | | | 3,312 | | 3,328 | |
| 2 | 0,94 | 2,3 | | 3,334 | | 3,391 |
| | | | 3,449 | | 3,539 | |
| 3 | 1,84 | 1,2 | | 5,213 | | |
| | | | -0,305 | | | |
| 4 | 2,94 | 2,1 | | | | |

Отже, $f(2{,}56) \approx P(2{,}56) = 3{,}391$.

## 5.4. Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа. Многочлени Чебишева. Оптимальний вибір вузлів інтерполяції

Значення інтерполяційного многочлена Лагранжа $P(x)$ у вузлах інтерполяції $x_i$ $(i = 0,1,..., n)$ дорівнюють відповідним значенням функції $f(x)$ у цих точках. В інших точках $x \in [x_0, x_n]$ в загальному випадку $f(x) \neq P(x)$. $R_n(x) = f(x) - P(x)$ називають залишковим членом інтерполяційної формули (5.7).

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$, де містяться всі вузли інтерполяції, функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно. В цьому випадку залишковий член інтерполяційного многочлена Лагранжа має вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n), \tag{5.15}$$

де $f^{(n+1)}(\xi)$ – значення похідної $(n+1)$-го порядку функції $f(x)$ в деякій точці $\xi \in (a, b)$.

З доведенням цієї формули читач може ознайомитися в [13], р. 5, § 5.2.1.

Якщо ввести позначення найбільшого значення $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ на відрізку $[a, b]$

$$\max_{a \le x \le b} \left|f^{n+1}(x)\right| = M_{n+1},$$

то з рівності (5.15) одержимо оцінку похибки інтерполяції:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|, \tag{5.16}$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,...\,(x - x_n).$$

Аналізуючи формулу (5.16), бачимо, що похибка інтерполяції з точністю до числового множника залежить від добутку двох співмножників: $M_{n+1}$ та $\left|\omega_{n+1}(x)\right|$. Перший співмножник $M_{n+1}$ залежить від властивостей функції $f(x)$ і не підлягає регулюванню. Другий співмножник визначають тільки вибором вузлів інтерполяції: $x_0, x_1, ..., x_n$. Тому виникає запитання: як вибрати вузли інтерполяції на відрізку $[a, b]$, щоб величина $\max\limits_{a \le x \le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$ мала найменше значення?

Для відповіді на це запитання нам потрібно розглянути многочлени Чебишева.

Многочлени Чебишева $\mathrm{T}_n(x)$ $(n = 0,1,2,...)$ визначають на відрізку $[-1, 1]$ формулою

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{5.17}$$

Зокрема, $\mathrm{T}_0(x) = 1$, $\mathrm{T}_1(x) = x$, $\mathrm{T}_2(x) = 2x^2 - 1$, $\mathrm{T}_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Для обчислення многочленів Чебишева можна користуватися рекурентною формулою

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, ...). \tag{5.18}$$

Наприклад,

$$\mathrm{T}_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$\mathrm{T}_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \text{ і т.д.}$$

Наведемо основні властивості многочленів Чебишева.

1. При парному (непарному) $n$ многочлен $\mathrm{T}_n(x)$ є парною (непарною) функцією.
2. Коефіцієнт при $x^n$ многочлена $\mathrm{T}_n(x)$ дорівнює $2^{n-1}$, якщо $n \geq 1$.
3. $\mathrm{T}_n(x)$ має $n$ дійсних коренів в інтервалі $(-1, 1)$, які виражаються формулою
$$\xi_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad (i = 0, 1, 2, ..., n-1).$$
4. $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |\mathrm{T}_n(x)| = 1$.
5. Многочлен
$$\overline{\mathrm{T}}_n(x) = 2^{1-n}\,\mathrm{T}_n(x), \quad n \geq 1 \tag{5.19}$$

серед усіх многочленів $n$-го степеня зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, має на відрізку $[-1, 1]$ найменше значення максимуму модуля, тобто не існує такого многочлена $\overline{P}_n(x)$ $n$-го степеня зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1, щоб

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\overline{P}_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} |\overline{\mathrm{T}}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Завдяки властивості 5 многочлени Чебишева $\mathrm{T}_n(x)$ називають многочленами, які найменше відхиляються від нуля.

Детальніше з властивостями многочленів Чебишева читач може ознайомитися в [1], гл. II, § 8.

Нехай ми виконуємо інтерполяцію на відрізку $[-1, 1]$. Візьмемо за вузли інтерполяції корені многочлена Чебишева $\mathrm{T}_{n+1}(x)$, тобто точки

$$\xi_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad (i = 0, 1, 2, ..., n). \tag{5.20}$$

Тоді многочлен $\omega_{n+1}(x)$ виразиться через $\mathrm{T}_{n+1}(x)$ таким чином:

$$\omega_{n+1}(x) = 2^{-n}\,\mathrm{T}_{n+1}(x).$$

При цьому згідно з властивістю 4 многочленів Чебишева оцінка похибки інтерполяції (5.16) набуде вигляду

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n}, \tag{5.21}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{-1\le x\le 1} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Згідно з властивістю 5 многочленів Чебишева оцінку (5.16) покращити на відрізку $[-1, 1]$ порівняно з оцінкою (5.21) за рахунок іншого вибору вузлів інтерполяції неможливо.

Отже, вузли інтерполяції (5.20) є оптимальними на відрізку $[-1, 1]$.

У випадку інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ лінійною заміною незалежної змінної

$$x = \frac{1}{2}\big((b-a)t + b + a\big), \quad t = \frac{1}{b-a}(2x - a - b) \tag{5.22}$$

відрізок $[a,b]$ переводиться у відрізок $[-1, 1]$. При цьому кореням многочлена Чебишева $\mathrm{T}_{n+1}(x)$ відповідають точки

$$x_i = \frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{(2i+1)\,\pi}{2n+2} + b + a\right), \quad (i = 0,1,2,..., n) \tag{5.23}$$

відрізка $[a, b]$, які будуть оптимальними вузлами інтерполяції на цьому відрізку.

Враховуючи формули (5.16), (5.19), (5.20), (5.22), (5.23) і властивість 4 многочленів Чебишева, одержуємо оцінку похибки інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ при оптимальному виборі вузлів інтерполяції.

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \tag{5.24}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{a\le x\le b} \left| f^{n+1}(x) \right|$.

**Зауваження.** Порівняємо оцінки похибок при апроксимації функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ многочленом Тейлора $n$-го степеня

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.25}$$

та інтерполяційним многочленом Лагранжа (5.7) з вузлами (5.23).

При побудові многочлена Тейлора (5.25) доцільно взяти $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Тоді оцінка похибки многочлена Тейлора має вигляд

$$\left|f(x) - Q(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}, \tag{5.26}$$

тобто вона в $2^n$ разів більша від оцінки (5.24).

Крім того, похибка інтерполяційного многочлена розподілена рівномірніше на відрізку $[a, b]$, ніж у многочлена Тейлора, і для побудови інтерполяційного многочлена не потрібно обчислювати похідних функції, а використовувати тільки значення цієї функції.

## 5.5. Скінченні різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона

Припустимо, що табличні значення аргументу $x_0, x_1, ..., x_n$ є рівновіддаленими, тобто утворюють арифметичну прогресію

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ \ ..., \ \ x_n = x_0 + nh. \tag{5.27}$$

Різницю $h$ арифметичної прогресії називають кроком таблиці. Нехай задані значення функції $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$

$$y_i = f(x_i), \quad (i = 0, 1, ..., n).$$

Складемо різниці значень функції $y = f(x)$.

$$\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0),\\
&\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Ці різниці називають скінченними різницями першого порядку даної функції. За ними можна скласти скінченні різниці другого порядку

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ \dots, \ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \ \text{ і т.д.}$$

Скінченні різниці довільного порядку $m$ обчислюють за формулою

$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i\,. \tag{5.29}$$

Формула (5.29) дає можливість послідовно визначити скінченні різниці різних порядків. Можна також записати співвідношення, які виражають скінченні різниці різних порядків через значення функції

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Неважко довести, що для будь-якого $m$

$$\Delta^m y_0 = y_m - m\,y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2\,!}\,y_{m-2} + ... + (-1)^{m-1} m\,y_1 + (-1)^m y_0. \tag{5.30}$$

Аналогічну формулу можна записати для значення скінченної різниці в довільному вузлі $x_i$

$$\Delta^m y_i = y_{m+i} - m\,y_{m+i-1} + \frac{m(m-1)}{2\,!}\,y_{m+i-2} + ... + (-1)^{m-1}\,m\,y_{i+1} + (-1)^m\,y_i.$$

Наведемо основні властивості скінченних різниць.

1. Якщо $C -$ стала величина, то $\Delta C = 0$.
2. $\Delta(C\,f(x)) = C\,\Delta f(x)$.
3. $\Delta(f_1(x) + f_2(x)) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$.
4. $\Delta(x^n) = n\,h\,x^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2\,!}h^2\,x^{n-2} + ... + n\,h^{n-1}\,x + h^n$.

Можна довести наступне твердження. Якщо $f(x)$ – многочлен степеня $n$ зі старшим членом $a_n x^n$, то для будь-якого $m < n$ скінченна різниця $\Delta^m f(x)$ є многочленом степеня $n-m$ зі старшим членом $n(n-1)\,...\,(n-m+1)\,a_n\,h^m\,x^{n-m}$. Для $m = n$ маємо $\Delta^n\, f\,(x) = n!a_n\,h^n$, а для $m > n$ буде $\Delta^m\, f\,(x) = 0$.

Скінченні різниці доцільно записувати у формі таблиці.

| $x$ | $y$ | $\Delta\, y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | | |
| | | $\Delta\, y_0$ | | | |
| $x_1$ | $y_1$ | | $\Delta^2\, y_0$ | | |
| | | $\Delta\, y_1$ | | $\Delta^3\, y_0$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | | $\Delta^2\, y_1$ | | |
| | | $\Delta\, y_2$ | | $\Delta^3\, y_1$ | |
| $x_3$ | $y_3$ | | $\Delta^2\, y_3$ | ... | |
| | | $\Delta\, y_3$ | ... | | |
| $x_4$ | $y_4$ | ... | | | |
| ... | ... | | | | |

Знайдемо інтерполяційний многочлен для функції $y = f(x)$ у випадку рівновіддалених вузлів (5.27). Визначимо цей многочлен в іншій формі, ніж інтерполяційний многочлен Лагранжа. Запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned} P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)\,(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + ... + \\ + a_n(x-x_0)(x-x_1)\,...\,(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Використовуючи умови $P(x_i) = y_i$ $(i = 0,1,2,\,...,\,n)$, знайдемо коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_n$ цього многочлена.

Оскільки $P(x_0) = y_0$, то одержуємо $a_0 = y_0$.

З умови $P(x_1) = y_1$ маємо $a_0 + a_1 h = y_1$.

Звідси $a_1 = \dfrac{y_1 - a_0}{h} = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$.

З умови $P(x_2) = y_2$ випливає, що $a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2$.

Тому $a_2 = \dfrac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \dfrac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$.

Аналогічно можна знайти інші коефіцієнти многочлена (5.31). З урахуванням співвідношення (5.30) одержимо загальну формулу

$$a_m = \frac{\Delta^m y_0}{m!\; h^m} \quad \left(m = 0, 1, ..., n\right).$$

Підставивши ці вирази у формулу (5.31), одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \quad (5.32)$$

Многочлен (5.32) називають інтерполяційним многочленом Ньютона.

Після деяких перетворень многочлен Ньютона (5.32) можна звести до многочлена Лагранжа (5.7), оскільки існує єдиний інтерполяційний многочлен $P(x)$ степеня $n$, для якого $P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$.

Відзначимо відмінність між формами запису інтерполяційних многочленів (5.7) та (5.32). Кожний доданок многочлена Лагранжа є многочленом степеня $n$ і всі ці доданки рівноправні. Доданки многочлена Ньютона є многочленами, степені яких збільшуються, причому коефіцієнти при них – це послідовні скінченні різниці, поділені на факторіали. Оскільки послідовні скінченні різниці досить швидко зменшуються, то є можливість не враховувати у формулі Ньютона (5.32) доданків, коефіцієнти при яких дуже малі.

Для практичного використання формулу Ньютона (5.32) зазвичай записують у дещо іншому вигляді.

Введемо нову змінну $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, тобто $x = x_0 + t h$. Тоді

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \ \ldots, \ \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

і формулу (5.32) запишемо так:

$$P(x_0 + t h) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5.33)$$

Цей многочлен називають першим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед.

Формулу (5.33) доцільно використувати при обчисленні значень функції $f(x)$ для значень аргументу, розміщених між $x_0$ та $x_1$, тобто для $t < 1$. Якщо $x_i < x < x_{i+1}$, то потрібно прийняти за $x_0$ вузол $x_i$, тобто застосувати формулу

$$P(x_i + t h) = y_i + \frac{t}{1!}\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i, \quad (5.34)$$

де $\quad t = \dfrac{x - x_i}{h}$.

Формули (5.33) та (5.34) використовують для обчислення значень функції в точках, які містяться в лівій частині заданого інтервалу зміни аргументу $x$.

Для інтерполяції в правій частині цього інтервалу застосовують іншу формулу.

Позначимо $\dfrac{x - x_n}{h} = t$, тобто $x = x_n + t h \quad (t < 0)$.

Інтерполяційний многочлен в цьому випадку має вигляд

$$P(x_n + t\,h) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t\,(t+1)}{2!}\,\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t\,(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\,\Delta^n y_0 . \quad (5.35)$$

Цей многочлен називають другим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції назад.

Формулу (5.35) доцільно використувати для значень $x$, що задовольняють умову $x_{n-1} < x < x_n$, тобто для $|t| < 1$. Якщо, наприклад, $x_{n-2} < x < x_{n-1}$, то в цій формулі потрібно замість $x_n$ взяти $x_{n-1}$.

**Зауваження.** Для оцінки похибок інтерполяційних многочленів Ньютона (5.33) та (5.35) на практиці використовують такі наближені формули для їх залишкових членів

$$R_n^{(I)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}\, t\,(t-1)\ldots(t-n), \qquad (5.36)$$

$$R_n^{(II)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_n}{(n+1)!}\, t\,(t+1)\ldots(t+n). \qquad (5.37)$$

При практичних обчисленнях за інтерполяційними формулами Ньютона (5.33) і (5.35) зупиняються на доданках, що містять такі скінченні різниці, які в межах заданої точності можна вважати сталими.

**Приклад 5.2.** Функція $y = f(x)$ задана таблицею

| $x_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,0617 | 2,7462 | 3,4976 | 4,3282 | 5,2515 |

За допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона обчислити наближені значення функції $y = f(x)$ в точках: 1) $x = 0{,}4$; 2) $x = 0{,}95$.

**Розв'язування.** Складемо таблицю скінченних різниць.

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 2,0617 | | | | |
| | | 0,6845 | | | |
| 0,5 | 2,7462 | | 0,0669 | | |
| | | 0,7514 | | 0,0123 | |
| 0,7 | 3,4976 | | 0,0792 | | 0,0012 |
| | | 0,8306 | | 0,0135 | |
| 0,9 | 4,3282 | | 0,0927 | | |
| | | 0,9233 | | | |
| 1,1 | 5,2515 | | | | |

1. Значення $f(0{,}4)$ обчислимо за допомогою першого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції вперед (5.33). За умовою задачі $h = 0{,}2$. Обчислимо значення $t = \dfrac{x - x_0}{h}$; $t = \dfrac{0{,}4 - 0{,}3}{0{,}2} = 0{,}5$. Запишемо

перший інтерполяційний многочлен Ньютона, підставивши у формулу (5.33) значення $y_0, \Delta y_0, ..., \Delta^4 y_0$, які у складеній таблиці підкреслені суцільною лінією.

$$P(0,3+0,2t) = 2,0617 + 0,6845t + 0,0669\,\frac{t(t-1)}{2!} +$$

$$+0,0123\,\frac{t(t-1)\,(t-2)}{3!} + 0,0012\,\frac{t(t-1)\,(t-2)\,(t-3)}{4!}.$$

$$P(0,4) = 2,0617 + 0,6845\cdot 0,5 + \frac{0,0669}{2}\cdot 0,5(-0,5) +$$

$$+\frac{0,0123}{6}\cdot 0,5\,(-0,5)\,(-1,5) + \frac{0,0012}{24}\cdot 0,5\cdot(-0,5)\,(-1,5)\,(-2,5) =$$

$$= 2,0617 + 0,34225 - 0,00836 + 0,00077 - 0,00005 = 2,41311 \approx 2,4131.$$

$$f(0,4) \approx P(0,4) = 2,4131.$$

2. Значення $f(0,95)$ обчислимо за допомогою другого інтерполяційного многочлена Нютона для інтерполяції назад.

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,95 - 1,1}{0,2} = -0,75.$$

Запишемо цей многочлен, підставивши у формулу (5.35) значення $y_4, \Delta y_3, \Delta^2 y_2, \Delta^3 y_1, \Delta^4 y_0$, які в таблиці підкреслені пунктирною лінією.

$$P(1,1+0,2t) = 5,2515 + 0,9233\cdot t + \frac{0,0927}{2!}\,t(t+1) +$$

$$+\frac{0,0135}{3!}\,t(t+1)\,(t+2) + \frac{0,0012}{4!}\,t(t+1)\,(t+2)\,(t+3).$$

Підставивши значення $t = -0,75$, одержимо $P(0,95) = 4,5498.$

Отже, $f(0,95) \approx P(0,95) = 4,5498$.

## 5.6. Поділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею: $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ – значення аргументу, $y_0,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$ – відповідні значення функції, різниці $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0 \quad (i = 0,1,..., n-1)$ і не рівні між собою.

Відношення $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ називають поділеними різницями першого порядку і позначають $f(x_i; x_{i+1}) \quad (i = 0,1,2, ..., n-1)$.

Наприклад, $f(x_0; x_1) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $f(x_1; x_2) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і т.д.

Поділені різниці другого порядку визначають за формулами

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

Аналогічно визначають поділені різниці третього порядку

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})}{x_{i+3} - x_i} \quad \text{і т.д.}$$

При обчисленнях поділені різниці записують у таблицю.

Наведемо основні властивості поділених різниць.

1. Поділені різниці є симетричними функціями своїх аргументів.
2. Якщо $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$, тобто значення аргументу рівновіддалені, то

$$f(x_0; x_1; ...; x_n) = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}.$$

3. Поділені різниці $n$-го порядку від многочлена степеня $n$ приймають стале значення, а поділені різниці вищих від $n$ порядків дорівнюють нулю.

Користуючись поняттям поділених різниць, інтерполяційний многочлен $P(x)$, який задовольняє умови $P(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$, можна представити у вигляді, аналогічному до інтерполяційного многочлена Ньютона (5.32)

$$\begin{aligned} P(x) = y_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + f(x_0; x_1; ...; x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Цей многочлен називають інтерполяційним многочленом Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу.

З виведенням формули (5.38) читач може ознайомитися в [6], гл. XIV, § 19.

**Приклад 5.3.** Знайти наближене значення функції $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у точці $x = 2{,}35$ за допомогою інтерполяційного многочлена четвертого степеня з оптимально вибраними вузлами інтерполяції на відрізку $[2, 4]$ із використанням поділених різниць. Оцінити похибку одержаного значення.

**Розв'язування.** Обчислимо вузли інтерполяції за формулою (5.23). Оскільки за умовою задачі $n = 4,\ a = 2,\ b = 4,$ то ця формула матиме вигляд

$$x_i = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{(2i+1)\pi}{10} + 6\right); \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{10} + 6\right) = 3{,}951057; \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{3\pi}{10} + 6\right) = 3{,}587786;$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{2} + 6\right) = 3; \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{7\pi}{10} + 6\right) = 2,412216;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{9\pi}{10} + 6\right) = 2,048944.$$

Обчислимо значення функції $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у цих вузлах.

$$y_0 = 0,356833; \quad y_1 = 0,383601; \quad y_2 = 0,438691;$$
$$y_3 = 0,516640; \quad y_4 = 0,583919.$$

Знайдемо поділені різниці та запишемо їх у таблицю.

| $x$ | $y$ | Поділені різниці | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1-го порядку | 2-го порядку | 3-го порядку | 4-го порядку |
| 3,951057 | <u>0,356833</u> | | | | |
| | | <u>-0,073686</u> | | | |
| 3,587786 | 0,383601 | | <u>0,021070</u> | | |
| | | -0,093725 | | <u>-0,007806</u> | |
| 3 | 0,438691 | | 0,033082 | | <u>0,003485</u> |
| | | -0,132615 | | -0,014434 | |
| 2,412216 | 0,516640 | | 0,055294 | | |
| | | -0,185203 | | | |
| 2,048944 | 0,583919 | | | | |

Запишемо інтерполяційний многочлен (5.38) для даної функції при $n = 4$:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 0,356833 - 0,073686\,(x - 3,951057) + \\ & + 0,021070\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786) - \\ & - 0,007806\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786)\,(x - 3) + \\ & + 0,003485\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786)\,(x - 3)\,(x - 2,412216). \end{aligned}$$

Підставивши $x = 2,35$, одержимо:

$$P(2,35) = 0,356833 + 0,117975 + 0,041756 + 0,010055 + 0,000279 = 0,526898.$$

Оцінимо похибку інтерполяції за формулою (5.24). Знайдемо $f^{(5)}(x)$ та $M_5$.

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}, \quad f''(x) = \frac{26}{16}x^{-\frac{11}{4}}, \ \ldots, \ f^{(5)}(x) = -64,29199\,x^{-\frac{23}{4}}.$$

$$M_5 = \max_{2 \le x \le 4}\left|f^{(5)}(x)\right| = 64,3 \cdot 2^{-\frac{23}{4}} = 1,19472.$$

Отже,

абсолютна похибка $\left|R_4\right| \le \dfrac{M_5}{5!}\dfrac{2^5}{2^9} = \dfrac{M_5}{5! \cdot 2^4} = 0,00063$;

відносна похибка $\delta = 0,0012$.

**Зауваження.** Теоретична оцінка похибки за формулою (5.24) часто виявляється завищеною. Значення даної функції з шістьма знаками після коми $f(2{,}35)=0{,}526865$. Порівнюючи його зі значенням інтерполяційного многочлена $P(2{,}35)=0{,}526898$, робимо висновок, що насправді абсолютна похибка інтерполяції дорівнює 0,000033 і в значенні $P(2{,}35)=0{,}526898$ чотири знаки після коми вірні.

## 5.7. Інтерполяція сплайнами

Нехай відрізок $\left[a, b\right]$ поділений на $N$ рівних часткових відрізків $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, де $x_i = a + i\,h \quad (i=0,1,..., N-1),\ x_N = b,\ h=\dfrac{b-a}{N}.$

Сплайном називають функцію, яка разом із кількома похідними неперервна на всьому заданому відрізку $\left[a, b\right]$, а на кожному частковому відрізку $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ є деяким алгебраїчним многочленом. Найбільший на усіх часткових відрізках степінь многочлена називають степенем сплайна, а різницю між степенем сплайна та порядком найвищої неперервної на $\left[a, b\right]$ похідної – дефектом сплайна.

На практиці найчастіше застосовують сплайни третього степеня, які мають на $\left[a, b\right]$ неперервну принаймні першу похідну. Ці сплайни називають кубічними і позначають $S_3(x)$. Величину $m_i = S_3'(x_i)$ називають нахилом сплайна в точці $x_i$.

Неважко переконатися, що кубічний сплайн $S_3(x)$, який приймає у вузлах $x_i$ та $x_{i+1}$ відповідно значення $y_i$ та $y_{i+1}$, має на частковому відрізку $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ вигляд

$$\begin{aligned} S_3(x) = {} & \frac{1}{h^3}\left(x_{i+1}-x\right)^2\left(2\left(x-x_i\right)+h\right)y_i + \frac{1}{h^3}\left(x-x_i\right)^2\left(2\left(x_{i+1}-x\right)+h\right)y_{i+1} + \\ & + \frac{1}{h^2}\left(x_{i+1}-x\right)^2\left(x-x_i\right)m_i + \frac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})\,m_{i+1}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Справді, легко перевірити, що $S_3(x_i)=y_i$, $S_3(x_{i+1})=y_{i+1}$. Крім того, після простих обчислень отримуємо $S_3'(x_i)=m_i$, $S_3'(x_{i+1})=m_{i+1}$.

Можна також довести, що будь-який алгебраїчний многочлен третього степеня, який в точках $x_i, x_{i+1}$ приймає відповідно значення $y_i, y_{i+1}$ і похідна якого в цих точках дорівнює відповідно $m_i$ та $m_{i+1}$, співпадає з многочленом (5.39).

Отже, щоб визначити кубічний сплайн $S_3(x)$ на всьому відрізку $\left[a, b\right]$, потрібно задати у вузлах $x_i$ його значення $y_i$ та нахили $m_i \quad (i=0,1,2,..., N)$.

Кубічний сплайн, який у вузлах $x_i$ приймає такі ж значення $y_i$, як і деяка функція $y = f(x)$, називають інтерполяційним сплайном. Його застосовують для наближення на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ разом із кількома її похідними.

Нахили інтерполяційного кубічного сплайна можна задати наступними способами.

1. Приймають

$$m_i = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right), \quad (i = 1, 2, ..., N-1), \tag{5.40}$$

$$m_0 = \frac{1}{2h}\left(4y_1 - y_2 - 3y_0\right), \quad m_N = \frac{1}{2h}\left(3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}\right). \tag{5.41}$$

2. Якщо відомі значення похідної $f'(x)$ в точках $x_i$: $f'(x_i) = y'_i$, то приймають $m_i = y'_i \quad (i = 0, 1, ..., N)$.

Ці способи називають локальними, оскільки за їх допомогою будують сплайн окремо на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$. При цьому у вузлах $x_i$ зберігається неперервність першої похідної $S'_3(x)$, але не гарантується неперервність другої похідної $S''_3(x)$. Тому дефект такого сплайна зазвичай дорівнює двом.

Сплайни зручніші для апроксимації функції на великому проміжку (при великих значення $N$), ніж, наприклад, інтерполяційні многочлени. Апроксимація функції на великому проміжку одним многочленом для досягнення заданої точності вимагає значного збільшення його степеня, що на практиці не завжди прийнятно. Розбиття заданого відрізка $[a, b]$ на кілька частин з побудовою на кожній частині самостійного інтерполяційного многочлена незручне, оскільки в точках стикування перша похідна двох сусідніх інтерполяційних многочленів буде мати розрив. Можливо, що навіть не співпадуть у точці стикування значення інтерполяційних многочленів, якщо ця точка стикування не буде їх спільним вузлом.

**Приклад 5.4.** Функція $y = f(x)$ задана таблицею

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,25 | 1,25 | 2,25 | 3,25 | 4,25 |
| $y_i$ | -1,3546 | 0,5428 | 1,6532 | 1,1722 | 0,7815 |

Побудувати на відрізку $[0{,}25; 4{,}25]$ інтерполяційний сплайн третього степеня для функції $y = f(x)$ і знайти за його допомогою наближене значення функції при $x = 1{,}76$.

**Розв'язування.** Обчислимо нахили інтерполяційного сплайна за формулами (5.40), (5.41). За умовою задачі $h=1$.

$$m_0 = \frac{1}{2h}\left(4y_1 - y_2 - 3y_0\right) = 0,5\left(4\cdot 0,5428 - 1,6532 + 3\cdot 1,3546\right) = 2,2909,$$

$$m_1 = \frac{1}{2h}\left(y_2 - y_0\right) = 0,5\left(1,6532 + 1,3546\right) = 1,5039,$$

$$m_2 = \frac{1}{2h}\left(y_3 - y_1\right) = 0,5\left(1,1722 - 0,5428\right) = 0,3147,$$

$$m_3 = \frac{1}{2h}\left(y_4 - y_2\right) = 0,5\left(0,7815 - 1,1632\right) = -0,4358,$$

$$m_4 = \frac{1}{2h}\left(3y_4 + y_2 - 4y_3\right) = 0,5\left(3\cdot 0,7815 + 1,6532 - 4\cdot 1,1722\right) = -0,3456.$$

За формулою (5.39) побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн на кожному частковому відрізку.

1. $x \in [0,25;\, 1,25]$.

$$S_3(x) = \left(1,25 - x\right)^2\left(2\left(x - 0,25\right) + 1\right)\cdot\left(-1,3546\right) +$$
$$+\left(x - 0,25\right)^2\left(2\left(1,25 - x\right) + 1\right)\cdot 0,5428 + \left(1,25 - x\right)^2\left(x - 0,25\right)\cdot 2,2909 +$$
$$+\left(x - 0,25\right)^2\left(x - 1,25\right)\cdot 1,5039 = -0,3935x^2 + 2,4876x - 1,9519.$$

2. $x \in [1,25;\, 2,25]$.

$$S_3(x) = \left(2,25 - x\right)^2\left(2\left(x - 1,25\right) + 1\right)0,5428 + \left(x - 1,25\right)^2\left(2\left(2,25 - x\right) + 1\right)\cdot 1,6532 +$$
$$+\left(2,25 - x\right)^2\left(x - 1,25\right)\cdot 1,5039 + \left(x - 1,25\right)^2\left(x - 2,25\right)\cdot 0,3147 =$$
$$= -0,4022x^3 + 1,5168x^2 - 0,4030x - 0,5381.$$

Оскільки значення $x = 1,76$ міститься на частковому відрізку $[1,25;\, 2,25]$, то за допомогою одержаного на цьому відрізку сплайна обчислимо $f(1,76)$:

$$f(1,76) \approx S_3(1,76) = -0,4022\cdot 1,76^3 + 1,5168\cdot 1,76^2 - 0,4030\cdot 1,76 - 0,5381 = 1,2583.$$

Отже, $f(1,76) \approx 1,2583$.

Аналогічно, як на двох перших часткових відрізках, будуємо інтерполяційний кубічний сплайн на часткових відрізках $[2,25;\, 3,25]$ та $[3,25;\, 4,25]$.

## 5.8. Метод найменших квадратів

Нехай, вивчаючи невідому функціональну залежність між $x$ та $y$, ми одержали в результаті серії експериментів таблицю значень

| $i$ | 0 | 1 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
| $y_i$ | $y_0$ | $y_1$ | ... | $y_n$ |

Завдання полягає в тому, щоб знайти наближену функціональну залежність $y = f(x)$, значення якої при $x = x_i$ $(i = 0,1,..., n)$ мало відрізняються від дослідних даних $y_i$. Наближена функціональна залежність, що одержана на основі експериментальних даних, називається емпіричною формулою.

Побудова емпіричної формули складається з двох частин: підбору загального вигляду цієї формули та визначення значень параметрів, що містяться в цій формулі. Найчастіше вигляд емпіричної формули визначається з геометричних міркувань: у прямокутній декартовій системі координат $xOy$ будують експериментальні точки й приблизно визначають загальний вигляд залежності шляхом порівняння одержаної кривої з графіками відомих функцій (степеневої, показникової, логарифмічної і т.д.).

Будемо вважати, що тип емпіричної формули встановлений і цю формулу можна представити у вигляді

$$y = \varphi\ (x, a_0, a_1, ..., a_m), \tag{5.42}$$

де $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі сталі параметри.

Завдання полягає в тому, щоб визначити такі значення цих параметрів, при яких емпірична формула (5.42) дає добре наближення даної функції, значення якої в точках $x_i$ дорівнюють $y_i$ $(i = 0, 1,..., n)$. Позначимо

$$\varepsilon_i = \varphi\ (x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i,\ \ (i = 0, 1, ..., n). \tag{5.43}$$

Величини $\varepsilon_i$ називають відхиленнями значень функції (5.42) від експериментальних значень.

Задача про знаходження найкращих значень параметрів $a_0, a_1, ..., a_m$ зводиться до мінімізації відхилень $\varepsilon_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$. Існує кілька способів розв'язування цієї задачі. Найчастіше користуються методом найменших квадратів.

Розглянемо суму квадратів відхилень (5.43)

$$S\ (a_0, a_1,...,a_m) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i)^2\ . \tag{5.44}$$

Метод найменших квадратів полягає в тому, що параметри $a_0, a_1, ..., a_m$ емпіричної формули (5.42) визначаються з умови, що функція $S\ (a_0, a_1, ..., a_m)$ прийме найменше значення. Оскільки ці параметри є незалежними змінними функції $S$, то для знаходження її мінімуму прирівняємо до нуля частинні похідні по всіх цих змінних:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial a_1}=0,\ ...,\ \frac{\partial S}{\partial a_m}=0. \qquad (5.45)$$

Одержані співвідношення (5.45) утворюють систему рівнянь для визначення параметрів $a_0, a_1, ..., a_m$.

Часто на практиці емпірична функція (5.42) є многочленом.

$$\varphi\,(x, a_0, a_1, ..., a_m) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m\ . \qquad (5.46)$$

Формула (5.44) в цьому випадку набуде вигляду

$$S=\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + ... + a_mx_i^m - y_i)^2. \qquad (5.47)$$

Знайдемо частинні похідні функції $S\,(a_0, a_1, ..., a_m)$.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + ... + a_mx_i^m - y_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + ... + a_mx_i^m - y_i)\ x_i,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial S}{\partial a_m}=2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + ... + a_mx_i^m - y_i)\ x_i^m.$$

Система (5.45) в цьому випадку має вигляд

$$a_0\,(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^2 + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^m = \sum_{i=0}^{n}y_i\ ,$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n}x_i + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^3 + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n}x_iy_i\ , \qquad (5.48)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$a_0\sum_{i=0}^{n}x_i^m + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1} + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+2} + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n}x_i^m\,y_i\ .$$

Можна довести, що система (5.48) $m+1$ рівнянь з $m+1$ невідомими $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ має єдиний розв’язок. Розв’язавши цю систему, одержимо коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ многочлена (5.46), які є шуканими параметрами емпіричної формули.

**Приклад 5.5.** Користуючись методом найменших квадратів, знайти емпіричну формулу для функції $y = f\,(x)$, заданої таблицею

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,6 | 1,2 | 1,1 | 2,3 | 4,2 |

**Розв'язування.** Якщо побудувати задані точки, то легко переконатися, що для апроксимації функції $y = f(x)$ можна взяти функцію, графіком якої є парабола, тобто

$$y \approx \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \qquad (5.49)$$

У даному випадку $m = 2,\ n = 4$ і система (5.48) має вигляд

$$\begin{aligned} 5a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{4} y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 &= \sum_{i=0}^{4} x_i\, y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^4 &= \sum_{i=0}^{4} x_i^2\, y_i. \end{aligned} \qquad (5.50)$$

Складемо таблицю

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i\, y_i$ | $x_i^2\, y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2,6 | 1 | 1 | 1 | 2,6 | 2,6 |
| 1 | 2 | 1,2 | 4 | 8 | 16 | 2,4 | 4,8 |
| 2 | 3 | 1,1 | 9 | 27 | 81 | 3,3 | 9,9 |
| 3 | 4 | 2,3 | 16 | 64 | 256 | 9,2 | 36,8 |
| 4 | 5 | 4,2 | 25 | 125 | 625 | 21,0 | 105,0 |
| $\sum$ | 15 | 11,4 | 55 | 225 | 979 | 38,5 | 159,1 |

Система (5.50) набуде вигляду

$$\begin{aligned} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 11{,}4, \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 38{,}5, \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 159{,}1. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, наприклад, методом Гаусса, отримаємо $a_0 = 4{,}91;\ a_1 = -2{,}93;\ a_2 = 0{,}56.$ Таким чином, для заданої таблицею функції $y = f(x)$ ми одержали такий апроксимуючий многочлен другого степеня:

$$y \approx 4{,}91 - 2{,}93x + 0{,}56x^2.$$

Обчислимо відносні похибки одержаної апроксимації в заданих точках, тобто знайдемо значення

$$\delta_i = \left| \frac{\varepsilon_i}{y_i} \right| = \left| \frac{\varphi(x_i) - y_i}{y_i} \right|.$$

Результати обчислень запишемо у таблицю.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\varphi(x_i)$ | $\varepsilon_i$ | $\delta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2,6 | 2,54 | -0,06 | 0,023 |
| 1 | 2 | 1,2 | 1,29 | 0,09 | 0,075 |
| 2 | 3 | 1,1 | 1,16 | 0,06 | 0,055 |
| 3 | 4 | 2,3 | 2,15 | -0,15 | 0,065 |
| 4 | 5 | 4,2 | 4,26 | 0,06 | 0,014 |

## 5.9. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ при заданому значенні $x$, якщо відома таблиця її значень, за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа: а) першого степеня; б) другого степеня; в) четвертого степеня. У випадку в) застосувати схему Ейткена.

1.1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,1 | 3,0 | 4,3 | 5,3 | 6,4 |
| $y_i$ | 3,3 | 2,4 | 3,5 | 4,9 | 5,8 |

$x = 5,15$;

1.2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 2,0 | 2,9 | 4,2 | 5,2 |
| $y_i$ | 2,3 | 1,4 | 2,7 | 3,9 | 4,6 |

$x = 1,85$;

1.3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,5 | 2,4 | 3,2 | 4,3 | 5,5 |
| $y_i$ | 4,9 | 3,9 | 2,4 | 0,8 | 1,3 |

$x = 2,34$;

1.4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,1 | 1,9 | 2,8 | 4.2 | 5,3 |
| $y_i$ | 9,5 | 8,8 | 7,6 | 6,3 | 7,2 |

$x = 2,25$;

1.5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,3 | 3,1 | 4,0 | 5,2 | 6,3 |
| $y_i$ | 3,4 | 2,4 | 3,7 | 4,9 | 5,6 |

$x = 3,48$.

1.6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,7 | 2,4 | 3,3 | 4,3 | 5,5 |
| $y_i$ | 2,2 | 1,7 | 2,9 | 4,1 | 6,0 |

$x = 2,53$;

1.7.

| $x_i$ | 0,9 | 1,3 | 2,1 | 3,0 | 4,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,2 | 1,7 | 3,2 | 4,8 | 6,0 |

$x = 1,62;$

1.8.

| $x_i$ | 3,2 | 4,2 | 5,6 | 6,4 | 7,3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,5 | 1,6 | 3,0 | 4,2 | 5,7 |

$x = 4,63;$

1.9.

| $x_i$ | 1,2 | 2,1 | 3,5 | 4,4 | 5,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,5 | 2,8 | 1,6 | 0,7 | 1,9 |

$x = 1,45;$

1.10.

| $x_i$ | 2,1 | 2,6 | 3,3 | 4,1 | 4,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1,7 | 0,9 | 2,0 | 3,3 | 4,2 |

$x = 2,85.$

2. Обчислити у вказаних точках наближені значення функції $y = f(x)$, яка задана таблицею, за допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона.

2.1.

| $x_i$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1,2536 | 2,6417 | 3,8574 | 4,8879 | 6,1583 |

$x = 0,1;$ $x = 0,7;$

2.2.

| $x_i$ | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,0845 | 3,6481 | 5,2793 | 7,0348 | 8,9124 |

$x = 0,5;$ $x = 1,8;$

2.3.

| $x_i$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,1728 | 4,8573 | 6,0514 | 8,4327 | 12,9145 |

$x = 0,3;$ $x = 0,85;$

2.4.

| $x_i$ | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1,3725 | 2,5652 | 3,8453 | 5,0127 | 6,4281 |

$x = 2,3;\quad x = 2,9;$

2.5.

| $x_i$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 7,0581 | 5,9874 | 4,8672 | 3,7417 | 2,5628 |

$x = 0,1;\quad x = 0,65;$

2.6.

| $x_i$ | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5,8425 | 4,7091 | 3,5173 | 2,5652 | 1,3897 |

$x = 2,15;\quad x = 2,7;$

2.7.

| $x_i$ | 0 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,2734 | 3,4370 | 4,9526 | 6,6432 | 8,5319 |

$x = 0,15;\quad x = 1,1;$

2.8.

| $x_i$ | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,2515 | 4,4452 | 5,6245 | 6,7891 | 7,9408 |

$x = 1,6;\quad x = 2,25;$

2.9.

| $x_i$ | 2,3 | 2,5 | 2,7 | 2,9 | 3,1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1,7726 | 2,9663 | 3,9854 | 4,9973 | 6,2838 |

$x = 2,44;\quad x = 3,0;$

2.10.

| $x_i$ | 0,4 | 0,7 | 1,0 | 1,3 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 8,2018 | 6,9624 | 5,9127 | 4,7458 | 3,5673 |

$x = 0,55;\quad x = 1,4.$

3. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ у точці $x$ за допомогою інтерполяції 4-го порядку, використавши поділені різниці за оптимально вибраними вузлами на відрізку $[a;\, b]$. Оцінити похибку.

3.1. $f(x) = \lg x;\quad [a;\, b] = [2;\, 5];\quad x = 4,23;$

3.2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad [a;\, b] = [4;\, 6];\quad x = 5,17;$

3.3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x;\quad [a;b]=[2;4];\quad x=3{,}76;$

3.4. $f(x)=\ln x+x;\quad [a;b]=[4;6];\quad x=4{,}45;$

3.5. $f(x)=x-\lg x;\quad [a;b]=[2;5];\quad x=3{,}48;$

3.6. $f(x)=e^{-x/3};\quad [a;b]=[2;4];\quad x=2{,}85;$

3.7. $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}};\quad [a;b]=[2;4];\quad x=3{,}49;$

3.8. $f(x)=\sqrt[3]{x^2};\quad [a;b]=[3;5];\quad x=3{,}64;$

3.9. $f(x)=x-\ln x;\quad [a;b]=[4;5];\quad x=4{,}33;$

3.10. $f(x)=\lg x+x;\quad [a;b]=[3;5];\quad x=3{,}84.$

4. За даною таблицею значень функції побудувати методом найменших квадратів многочлени: а) першого степеня; б) другого степеня. У випадку б) знайти наближене значення функції в точці $x$.

4.1. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| $y_i$ | 2,5 | 1,8 | 3,1 | 4,9 | 6,1 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 5,3 | 3,8 | 7,2 | 14,3 | 24,6 | 39,2 |

$x=0{,}35$;

4.2. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 3,3 | 4,3 | 2,9 | 1,1 | 1,4 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | -9,5 | -2,6 | 1,7 | 4,8 | 5,7 | 5,3 |

$x=0{,}64$;

4.3. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 3,5 | 4,5 | 2,9 | 1,5 | 1,8 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | -3,2 | -2,3 | 0,7 | 3,8 | 8,2 | 14,3 |

$x=-0{,}39$;

4.4. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $y_i$ | 4,5 | 7,1 | 8,1 | 7,5 | 8,5 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 5,6 | 3,3 | 2,2 | 2,8 | 5,7 | 11,5 |

$x = 0,56;$

4.5. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_i$ | 5,5 | 6,5 | 5,1 | 3,2 | 3,6 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 16,5 | 7,2 | 1,3 | -1,2 | 0,9 | 7,4 |

$x = -1,24;$

4.6. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 3,7 | 4,7 | 3,2 | 1,4 | 1,7 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 1,8 | 4,3 | 3,7 | 2,2 | -2,3 | -7,6 |

$x = 1,28;$

4.7. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 2,3 | 2,5 | 4,5 | 4,1 | 5,5 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 0,3 | 2,2 | 3,8 | 4,7 | 3,7 | 2,8 |

$x = 2,74;$

4.8. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| $y_i$ | 3,5 | 6,1 | 6,9 | 6,5 | 7,5 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 1,2 | -0,9 | -1,6 | -1,2 | -0,4 | 1,1 |

$x = 2,38;$

4.9. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 3,9 | 4,8 | 3,4 | 1,4 | 1,9 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 2,1 | -1,8 | -0,3 | 8,5 | 21,6 | 41,5 |

$x = -0,55;$

4.10. а)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| $y_i$ | 2,5 | 4,8 | 5,9 | 4,9 | 6,5 |

б)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 1,2 | -1,9 | -3,2 | -2,1 | 1,3 | 5,8 |

$x = 1,36.$

5. Скласти на відрізку $[a; b]$ інтерполяційний кубічний сплайн для функції $y = f(x)$, заданої на цьому відрізку таблицею. Знайти наближене значення функції в точці $x$.

5.1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1,34 | -0,84 | -0,34 | 0,16 | 0,66 |
| $y_i$ | 3,7524 | 5,2118 | 3,1729 | 1,9118 | 0,6375 |

$x = -0,57;$

5.2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,85 | 1,85 | 2,85 | 3,85 | 4,85 |
| $y_i$ | -2,4496 | -1,1536 | 0,5429 | 1,7236 | 1,1392 |

$x = 2,46;$

5.3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,25 | 1,00 | 1,75 | 2,50 | 3,25 |
| $y_i$ | -1,3017 | 1,2873 | 2,5398 | 0,9736 | -0,2537 |

$x = 1,53;$

5.4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1,26 | -0,26 | 0,74 | 1,74 | 2,74 |
| $y_i$ | 0,4815 | 1,2519 | 2,7481 | 3,6814 | 4,8825 |

$x = 1,38;$

5.5.

| $x_i$ | -1,75 | -0,75 | 0,25 | 1,25 | 2,25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -2,4557 | 0,7531 | 1,7643 | 1,1514 | 0,6584 |

$x = 1,83$;

5.6.

| $x_i$ | -0,85 | -0,35 | 0,15 | 0,65 | 1,15 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,7346 | 3,5837 | 4,1807 | 2,9814 | 1,8413 |

$x = 0,85$;

5.7.

| $x_i$ | 0,12 | 0,62 | 1,12 | 1,62 | 2,12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -1,1527 | 0,8347 | 1,5317 | 1,1721 | 0,5438 |

$x = 1,37$;

5.8.

| $x_i$ | -0,34 | 0,16 | 0,66 | 1,16 | 1,66 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,5418 | 1,2318 | 2,5382 | 1,6316 | 0,2534 |

$x = 0,95$;

5.9.

| $x_i$ | 0,35 | 1,35 | 2,35 | 3,35 | 4,35 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10,4215 | 8,6115 | 4,7823 | 2,4135 | 1,2287 |

$x = 1,74$;

5.10.

| $x_i$ | -0,34 | 0,66 | 1,66 | 2,66 | 3,66 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,7425 | 2,6814 | 1,2317 | 0,6814 | -0,8439 |

$x = 3,25$.

# РОЗДІЛ 6

# ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

## 6.1. Апроксимація похідних. Похибка чисельного диференціювання

Як відомо, похідною функції $y = f(x)$ в деякій точці $x$ називають границю відношення приросту функції $\Delta y$ до приросту аргументу $\Delta x$ при прямуванні $\Delta x$ до нуля.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Зазвичай для обчислення похідних у випадку аналітичного задавання функцій використовують готові формули. Проте на практиці функція $y = f(x)$ може бути задана у вигляді таблиці значень і тоді похідну обчислюють наближено, користуючись формулою (6.1).

Якщо припустити, що приріст $\Delta x$ дорівнює деякому скінченному малому за модулем числу, то одержимо наближену формулу для обчислення похідної:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{6.2}$$

Це співвідношення називають апроксимацією (наближенням) похідної за допомогою скінченних різниць.

Розглянемо наближення похідної для функції $y = f(x)$, яка задана таблицею. Нехай крок таблиці, тобто різниця між двома сусідніми значеннями аргументу, сталий і дорівнює $h$. Отже, табличні значення аргументу $x_i = x_0 + i\,h,\ (i = 0, 1, ..., n)$. Відповідні значення функції позначимо $y_0, y_1, ..., y_n$.

Обчислимо похідну $y_1'$ даної функції в точці $x_1$. Залежно від способу обчислення скінченних різниць одержимо різні формули для $y_1'$:

$$\Delta y = y_1 - y_0, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \tag{6.3}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h}; \tag{6.4}$$

$$\Delta y = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h, \quad y_1' = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \tag{6.5}$$

Формула (6.3) записана за допомогою лівих різниць, (6.4) – за допомогою правих різниць, (6.5) – за допомогою центральних різниць.

Можна обчислити також похідні вищих порядків. Наприклад,

$$y_1'' \approx \frac{y_2' - y_1'}{h} \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \quad (6.6)$$

Отже, за формулою (6.2) можна знайти наближені значення похідних будь-якого порядку. Розглянемо питання про точність одержаних значень.

Наблизимо функцію $f(x)$ деякою функцією $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x). \quad (6.7)$$

За апроксимуючу функцію можна взяти частинну суму ряду або інтерполяційну функцію. Тоді похибку апроксимації $R(x)$ визначаємо залишковим членом ряду або інтерполяційної формули.

Апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ можна використати для наближеного обчислення похідних функції $f(x)$. Диференціюючи рівність (6.7) $k$ разів, отримаємо

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, 3, ...).$$

За наближене значення похідної порядку $k$ функції $f(x)$ можна взяти значення відповідної похідної функції $\varphi(x)$, тобто $f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x).$ Величину $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)$ називають похибкою апроксимації похідної.

Якщо функція задана таблицею з кроком $h$, то ця похибка залежить від $h$. Нехай для похибки $R^{(k)}(x)$ виконується умова $\left|R^{(k)}(x)\right| \le A h^m,$ де $A-$деяке додатне число. Тоді цю похибку записують у вигляді $O(h^m)$. Показник степеня $m$ називають порядком похибки апроксимації. При цьому припускається, що значення кроку менше від одиниці.

Оцінку похибки апроксимації похідної можна одержати за допомогою ряду Тейлора

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\,\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\,\Delta x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,\Delta x^n + ... \quad (6.8)$$

Підставимо у формулу (6.8) $x = x_1, \Delta x = -h$ і зупинимося на доданку порядку $h$:

$$y_0 = y_1 - y_1' h + O(h^2).$$

Звідси одержимо $y_1' = \dfrac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$, тобто формула (6.3) має похибку першого порядку. Таку ж похибку має формула (6.4).

Підставляючи у формулу (6.8) $x = x_1$, $\Delta x = -h$ і $\Delta x = h$, отримаємо

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 - y_1' h + \frac{y_1''}{2!} h^2 - \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4), \\ y_2 &= y_1 + y_1' h + \frac{y_1''}{2!} h^2 + \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Віднімаючи від другої рівності першу, одержимо

$$y_1' = \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2),$$

тобто формула (6.5) має похибку другого порядку. Додаючи рівності (6.9), отримаємо

$$y_1'' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h^2),$$

тобто формула (6.6) також має другий порядок точності.

## 6.2. Наближене обчислення похідних за допомогою інтерполяційних многочленів

Нехай функція $f(x)$ задана таблицею зі сталим кроком $h$: $y_i = f(x_i),\quad x_i = x_0 + i\,h \quad (i = 0,1,\ldots,n).$

Складемо для цієї функції інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції вперед (5.33):

$$P(x_0 + t\,h) = y_0 + \frac{t}{1!}\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\,\Delta^n y_0,$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}.$

Диференціюючи цей многочлен по змінній $x$, одержимо

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dP}{dt};$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h}\,\frac{dP}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h^2}\,\frac{d^2P}{dt^2} \quad \text{і т.д.}$$

Приймаючи $y'(x) \approx \dfrac{dP}{dx},\;\; y''(x) \approx \dfrac{d^2P}{dx^2}$ і т.д., отримаємо формули для наближеного обчислення похідних будь-якого порядку. Запишемо ці формули для похідних першого та другого порядків:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\,\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\,\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{5t^4 - 40t^3 + 105t^2 - 100t + 24}{5!}\,\Delta^5 y_0 + \ldots\right), \tag{6.10}$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (t-1)\,\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!}\,\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{5!}\,\Delta^5 y_0 + \ldots\right). \tag{6.11}$$

З формул (6.10) та (6.11) при $t = 0$ отримуємо формули для обчислення похідних $y'$ та $y''$ у вузлі $x_0$:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - ...\right), \tag{6.12}$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...\right). \tag{6.13}$$

Зауважимо, що за формулами (6.12) і (6.13) можна обчислювати значення $y'$ та $y''$ в інших вузлах лівої частини інтервалу зміни аргументу $x$, оскільки кожен такий вузол можна вважати початковим.

Складемо для заданої функції інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад (5.35):

$$P(x_n + t\,h) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t\,(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + ... + \frac{t\,(t+1)\,...\,(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де $t = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Аналогічно, як і у попередньому випадку, отримаємо формули для наближеного обчислення похідних в точках, які містяться в правій частині інтервалу зміни аргументу $x$:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \right. \tag{6.14}$$

$$\left. + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5t^4+40t^3+105t^2+100t+24}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + ...\right),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + (t+1)\,\Delta^3 y_{n-3} + \frac{12t^2+36t+22}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \right.$$

$$\left. + \frac{20t^3+120t^2+210t+100}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + ...\right). \tag{6.15}$$

При $t = 0$ з формул (6.14) та (6.15) одержуємо:

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{1}{5}\Delta^5 y_{n-5} + ...\right), \tag{6.16}$$

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + ...\right). \tag{6.17}$$

За формулами (6.16) та (6.17) можна обчислювати значення $y'$ та $y''$ в інших вузлах правої частини інтервалу зміни аргументу $x$.

**Приклад 6.1.** Функція $y = f\,(x)$ задана таблицею з кроком $h = 0,2$.

| $x_i$ | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,3894 | 0,4794 | 0,5646 | 0,6442 | 0,7174 | 0,7833 |

За допомогою інтерполяційних формул обчислити:
а) $y'(1{,}68)$;   б) $y'(0{,}8)$;   в) $y''(0{,}95)$;   г) $y''(1{,}6)$.

**Розв'язування.** Складемо таблицю скінченних різниць.

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 0,3894 | | | | | |
| | | 0,0900 | | | | |
| 1,0 | 0,4794 | | - 0,0048 | | | |
| | | 0,0852 | | - 0,0008 | | |
| 1,2 | 0,5646 | | - 0,0056 | | 0 | |
| | | 0,0796 | | - 0,0008 | | - 0,0001 |
| 1,4 | 0,6442 | | - 0,0064 | | - 0,0001 | |
| | | 0,0732 | | - 0,0009 | | |
| 1,6 | 0,7174 | | - 0,0073 | | | |
| | | 0,0659 | | | | |
| 1,8 | 0,7833 | | | | | |

а) Для обчислення $y'(1,68)$ використаємо формулу (6.14). $t = \dfrac{1,68-1,8}{0,2} = -0,6.$

$$y'(1,68) \approx \frac{1}{0,2}\Big(0,0659 - 0,1\,(-0,0073) + \frac{1}{6}\,(3\cdot 0,36 - 3,6 + 2)\,(-0,0009) +$$
$$+\frac{1}{24}\,(-4\cdot 0,216 + 18\cdot 0,36 - 13,2 + 6)\,(-0,0001) + \frac{1}{120}\,(5\cdot 0,1296 + 40(-0,216) +$$
$$+105\cdot 0,36 - 60 + 24)\,(-0,0001)\Big) = 0,3367.$$

б) $y'(0,8)$ обчислимо за формулою (6.12).

$$y'(0,8) \approx \frac{1}{0,2}\left(0,0900 - \frac{1}{2}\left(-0,0048\right) + \frac{1}{3}\left(-0,0008\right) + \frac{1}{5}\left(-0,0001\right)\right) = 0,4608.$$

в) Для обчислення $y''(0,95)$ застосуємо формулу (6.11). $t = \dfrac{0,95-0,8}{0,2} = 0,75$.

$$y''(0,95) \approx \frac{1}{0,04}\Big(-0,0048 - 0,25\left(-0,0008\right) + \frac{1}{120}\,(20\cdot 0,75^3 - 120\cdot 0,75^2 +$$
$$+210\cdot 0,75 - 100)(-0,0001)\Big) = -0,1150.$$

г) $y''(1,6)$ обчислимо за формулою (6.17), взявши $x_n = 1,6$.

$$y''(1,6) \approx \frac{1}{0,04}\left(-0,0064 - 0,0008\right) = -0,1800.$$

Інтерполяційні многочлени Ньютона дають вирази для похідних через скінченні різниці функції. Проте часто на практиці вигідніше виражати значення похідних не через різниці, а безпосередньо через значення функції у вузлах. Для одержання таких формул зручно користуватися інтерполяційним многочленом Лагранжа з рівновіддаленими вузлами $(x_i - x_{i-1} = h = const,$ $i = 1, 2, ..., n)$.

Запишемо інтерполяційний многочлен Лагранжа (5.9) для трьох рівновіддалених вузлів $(n = 2)$ та його залишковий член $R(x)$ і знайдемо їх похідні.

$$P(x) = \frac{1}{2h^2}\big((x-x_1)(x-x_2)\,y_0 - 2\,(x-x_0)\,(x-x_2)\;y_1 + (x-x_0)(x-x_1)\;y_2\big),$$

$$R(x) = \frac{y'''(\xi)}{3!}\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2),$$

де $\xi -$ деяка внутрішня точка відрізка $[x_0, x_2]$,

$$P'(x) = \frac{1}{2h^2}\big((2x-x_1-x_2)\;y_0 - 2(2x-x_0-x_2)\;y_1 + (2x-x_0-x_1)\;y_2\big),$$

$$R'(x) = \frac{y'''(\xi)}{3!}\big(\,(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)\big).$$

Запишемо вираз для значення похідної $y'$ в точці $x_0$ (позначимо його $y_0'$):

$$y_0' = P'(x_0) + R'(x_0) = \frac{1}{2h^2}\big((2x_0 - x_1 - x_2)\;y_0 - 2(x_0 - x_2)\;y_1 +$$

$$+ (x_0 - x_1)\;y_2\big) + \frac{y'''(\xi)}{3!}\big(x_0 - x_1\big)\big(x_0 - x_2\big).$$

Отже,

$$y_0' = \frac{1}{2h}\big(-3\,y_0 + 4\,y_1 - y_2\big) + \frac{y'''(\xi)}{3}\,h^2. \tag{6.18}$$

Аналогічно одержимо вирази для значень похідної $y'$ в точках $x_1$ та $x_2$.

$$y_1' = \frac{1}{2h}\,(-y_0 + y_2) - \frac{y'''(\xi)}{6}\,h^2, \qquad y_2' = \frac{1}{2h}\,(y_0 - 4\,y_1 + 3\,y_2) + \frac{y'''(\xi)}{3}\,h^2. \tag{6.19}$$

Таким же способом отримаємо формули для значень похідної другого порядку $y''$ для випадку трьох вузлів:

$$\begin{aligned} y_0'' &= \frac{1}{h^2}\,(y_0 - 2\,y_1 + y_2) - h\,y'''(\xi), \\ y_1'' &= \frac{1}{h^2}\,(y_0 - 2\,y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}\,y^{(4)}(\xi), \\ y_2'' &= \frac{1}{h^2}\,(y_0 - 2\,y_1 + y_2) + h\,y'''(\xi). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Записуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа та його залишковий член для випадку чотирьох вузлів $(n = 3)$, одержимо такі апроксимації похідних:

$$y_0' = \frac{1}{6h}\left(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4}\, y^{(4)}(\xi),$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}\, y^{(4)}(\xi),$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}\, y^{(4)}(\xi),$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}\, y^{(4)}(\xi). \tag{6.21}$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}\, h^2\, y^{(4)}(\xi),$$

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}\, y^{(4)}(\xi),$$

$$y_2'' = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{h^2}{12}\, y^{(4)}(\xi), \tag{6.22}$$

$$y_3'' = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12}\, h^2\, y^{(4)}(\xi).$$

В усіх наведених формулах $\xi -$ це деяка внутрішня точка відрізка $\left[x_0, x_n\right]$.

## 6.3. Наближене обчислення частинних похідних

Розглянемо функцію двох змінних $u = f\left(x, y\right)$, задану таблицею: $u_{ij} = f\left(x_i, y_j\right)$, де $x_i = x_0 + ih_1$, $y_j = y_0 + jh_2$ $\left(i = 0,1,2,...,n;\ j = 0,1,2,...,m\right)$.

Використовуючи означення частинної похідної, можна записати наближені формули для малих значень кроків $h_1$ та $h_2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x + h_1, y) - f(x, y)}{h_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + h_2) - f(x, y)}{h_2}.$$

На основі цих формул одержимо наближені вирази для частинних похідних функції $u = f\left(x, y\right)$ у вузлі $\left(x_i, y_j\right)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}; \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2}.$$

Для одержання інших формул застосуємо розклад функції $u = f\left(x, y\right)$ у ряд Тейлора в околі точки $M\left(x, y\right)$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Delta x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Delta x^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Delta y^3\right) + \ldots$$

Знайдемо $u_{i+1,j} = f(x_i + h_1, y_j)$ при $\Delta x = h_1$, $\Delta y = 0$ та $u_{i-1,j} = f(x_i - h_1, y_j)$ при $\Delta x = -h_1$, $\Delta y = 0$.

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} h_1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} h_1^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} h_1^3 + \ldots$$

$$u_{i-1,j} = u_{ij} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} h_1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} h_1^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} h_1^3 + \ldots$$

Віднімаючи почленно від першої рівності другу, одержимо

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2h_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} + O\left(h_1^3\right).$$

Звідси знайдемо значення похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ у вузлі $\left(x_i,\, y_j\right)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{1}{2h_1}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) + O\left(h_1^2\right).$$

При досить малому значенні кроку $h_1$ одержуємо наближену формулу

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1}\left(u_{i+1,\,j} - u_{i-1,\,j}\right). \qquad (6.23)$$

Аналогічно можна отримати наближені формули для похідної $\frac{\partial u}{\partial y}$ та частинних похідних другого порядку:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_2}\left(u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j-1}\right),\\
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_1^2}\left(u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}\right),\\
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_2^2}\left(u_{i,\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j-1}\right),\\
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1h_2}\left(u_{i+1,\,j+1} - u_{i+1,\,j-1} - u_{i-1,\,j+1} + u_{i-1,\,j-1}\right).
\end{aligned} \qquad (6.24)$$

Наведемо також формули для наближеного обчислення частинних похідних із використанням більшої кількості вузлів (розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1}\left(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_2}\left(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}\right), \tag{6.25}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_1^2}\left(-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{ij} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_2^2}\left(-u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} - 30u_{ij} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2}\right).$$

**Приклад 6.2.** Функція двох змінних $u = f(x, y)$ задана таблично. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків цієї функції в точці $A(1,1;\ 0,8)$ за спрощеною та розширеною схемами.

| $y \backslash x$ | 0,5 | 0,8 | 1,1 | 1,4 | 1,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,4 | 1,221 | 1,377 | 1,553 | 1,751 | 1,974 |
| 0,6 | 1,350 | 1,616 | 1,935 | 2,316 | 2,773 |
| 0,8 | 1,492 | 1,896 | 2,411 | 3,065 | 3,896 |
| 1,0 | 1,649 | 2,226 | 3,004 | 4,055 | 5,474 |
| 1,2 | 1,822 | 2,612 | 3,743 | 5,366 | 7,691 |

**Розв'язування.** За умовою задачі $h_1 = 0,3$; $h_2 = 0,2$; $i = 0,1,2,3,4$; $j = 0,1,2,3,4$. Частинні похідні потрібно обчислити у вузлі $A(x_2; y_2)$, де $x_2 = 1,1$; $y_2 = 0,8$.

1. Застосуємо формули (6.23), (6.24) (спрощена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{0,6}(3,065 - 1,896) = 1,948,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,4}(3,004 - 1,935) = 2,672,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,09}(3,065 - 2 \cdot 2,411 + 1,186) = 1,544,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,04}(3,004 - 2 \cdot 2,411 + 1,935) = 2,925,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{22} = \frac{1}{4 \cdot 0,06}(4,055 - 2,316 - 2,226 + 1,616) = 4,704.$$

2. Застосуємо формули (6.25) (розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{1,2}(4,055 - 2,226 + 2,316 - 1,616) = 2,108,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,8}(4,055 - 2,316 + 2,226 - 1,616) = 2,936,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,09}(-3,896 + 16 \cdot 3,065 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,896 - 1,492) = 1,535,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,04}(-3,743 + 16 \cdot 3,004 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,935 - 1,553) = 2,913.$$

## 6.4. Завдання для самостійної роботи

1. За допомогою інтерполяційних формул обчислити у вказаних точках похідні першого та другого порядків функції, заданої таблицею.

1.1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 |
| $y_i$ | 3,1487 | 3,5138 | 3,9596 | 4,5042 | 5,1693 | 5,9817 |

а) $x = 1,35$; б) $x = 0,5$;

1.2.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,1 | 2,4 | 2,7 | 3,0 | 3,3 | 3,6 |
| $y_i$ | 1,7419 | 1,8755 | 1,9933 | 2,0986 | 2,1939 | 2,2809 |

а) $x = 2,25$; б) $x = 3,3$;

1.3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,1 | 1,5 | 1,9 | 2,3 | 2,7 | 3,1 |
| $y_i$ | 1,9535 | 1,8165 | 1,7255 | 1,6594 | 1,6086 | 1,5680 |

а) $x = 1,1$; б) $x = 2,45$;

1.4.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,3 | 1,6 | 1,9 | 2,2 | 2,5 | 2,8 |
| $y_i$ | 3,3692 | 3,8250 | 4,3263 | 4,8545 | 5,4001 | 5,9571 |

а) $x = 1,65$; б) $x = 2,8$;

1.5.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 |
| $y_i$ | -0,3667 | -0,9750 | -1,5002 | -1,9833 | -2,4429 | -2,8875 |

а) $x = 1,6$; б) $x = 2,75$;

1.6.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
| $y_i$ | 0,9208 | 1,5833 | 2,3018 | 3,0837 | 3,9338 | 4,8552 |

а) $x = 1,62$; б) $x = 2,1$;

1.7.

| $x_i$ | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,3502 | 1,5667 | 2,5751 | 3,5003 | 4,3833 | 5,2429 |

а) $x = 1,2$; б) $x = 2,55$;

1.8.

| $x_i$ | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -0,1192 | 0,0833 | 0,2618 | 0,4237 | 0,5738 | 0,7152 |

а) $x = 1,58$; б) $x = 2,1$;

1.9.

| $x_i$ | 0,4 | 0,7 | 1,0 | 1,3 | 1,6 | 1,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,4598 | 3,3201 | 4,4817 | 6,0496 | 8,1662 | 11,0232 |

а) $x = 0,7$; б) $x = 1,81$;

1.10.

| $x_i$ | 2,2 | 2,6 | 3,0 | 3,4 | 3,8 | 4,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,3424 | 2,4150 | 2,4771 | 2,5315 | 2,5798 | 2,6232 |

а) $x = 2,32$; б) $x = 3,8$.

2. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків у точці $A$ функції $u = f(x, y)$, заданої таблично: а) за спрощеною схемою; б) за уточненими формулами.

2.1.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 |
| 0 | 1,4 | 2097 | 2,242 | 2,369 | 2,482 | 2,583 |
| 1 | 1,6 | 2,183 | 2,335 | 2,467 | 2,583 | 2,688 |
| 2 | 1,8 | 2,262 | 2,419 | 2,556 | 2,675 | 2,782 |
| 3 | 2,0 | 2,335 | 2,497 | 2,637 | 2,760 | 2,869 |
| 4 | 2,2 | 2,403 | 2,570 | 2,712 | 2,837 | 2,948 |

$A(1,5; 1,8)$;

2.2.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 |
| 0 | 0,8 | 1,492 | 1,439 | 1,396 | 1,360 | 1,331 |
| 1 | 1,1 | 1,733 | 1,649 | 1,581 | 1,527 | 1,481 |
| 2 | 1,4 | 2,014 | 1,890 | 1,792 | 1,713 | 1,649 |
| 3 | 1,7 | 2,340 | 2,166 | 2,031 | 1,923 | 1,835 |
| 4 | 2,0 | 2,718 | 2,482 | 2,301 | 2,158 | 2,043 |

$A(2,4; 1,4)$;

2.3.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0,3 | 0,7 | 1,1 | 1,5 | 1,9 |
| 0 | 0,2 | 2,170 | 2,250 | 2,329 | 2,407 | 2,482 |
| 1 | 0,5 | 2,260 | 2,454 | 2,634 | 2,793 | 2,924 |
| 2 | 0,8 | 2,349 | 2,642 | 2,882 | 3,043 | 3,110 |
| 3 | 1,1 | 2,435 | 2,807 | 3,047 | 3,108 | 2,979 |
| 4 | 1,4 | 2,509 | 2,941 | 3,110 | 2,974 | 2,574 |

$A(1,1;\,0,8)$;

2.4.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 1,1 | 1,4 |
| 0 | 0,1 | 1,028 | 0,961 | 0,890 | 0,814 | 0,734 |
| 1 | 0,5 | 0,840 | 0,589 | 0,289 | -0,080 | -0,501 |
| 2 | 0,9 | 0,619 | 0,097 | -0,608 | -1,569 | -2,842 |
| 3 | 1,3 | 0,360 | -0,553 | -1,944 | -4,061 | -7,282 |
| 4 | 1,7 | 0,057 | -1,414 | -3,939 | -8,270 | -15,709 |

$A(0,8;\,0,9)$;

2.5.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0,1 | 0,5 | 0,9 | 1,3 | 1,7 |
| 0 | 0,2 | 1,000 | 1,005 | 1,016 | 1,034 | 1,151 |
| 1 | 0,5 | 1,001 | 1,031 | 1,099 | 1,204 | 1,340 |
| 2 | 0,8 | 1,003 | 1,079 | 1,248 | 1,494 | 1,791 |
| 3 | 1,1 | 1,006 | 1,147 | 1,451 | 1,860 | 2,295 |
| 4 | 1,4 | 1,010 | 1,235 | 1,694 | 2,247 | 2,724 |

$A(0,9;\,0,8)$;

2.6.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 |
| 0 | 1,2 | 2,097 | 2,183 | 2,262 | 2,335 | 2,403 |
| 1 | 1,5 | 2,242 | 2,335 | 2,419 | 2,497 | 2,570 |
| 2 | 1,8 | 2,369 | 2,467 | 2,556 | 2,637 | 2,712 |
| 3 | 2,1 | 2,482 | 2,583 | 2,675 | 2,760 | 2,837 |
| 4 | 2,4 | 2,583 | 2,688 | 2,782 | 2,869 | 2,948 |

$A(1,5;\,1,8)$;

2.7.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,5 | 2,7 |
| 0 | 0,7 | 0,381 | 0,328 | 0,285 | 0,249 | 0,220 |
| 1 | 1,0 | 0,622 | 0,538 | 0,470 | 0,416 | 0,370 |
| 2 | 1,3 | 0,903 | 0,779 | 0,681 | 0,602 | 0,538 |
| 3 | 1,6 | 1,229 | 1,055 | 0,920 | 0,812 | 0,724 |
| 4 | 1,9 | 1,607 | 1,371 | 1,190 | 1,047 | 0,932 |

$A(2{,}3;\,1{,}3)$;

2.8.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0,2 | 0,6 | 1,0 | 1,4 | 1,9 |
| 0 | 0,3 | 0,501 | 0,503 | 0,509 | 0,518 | 0,577 |
| 1 | 0,6 | 0,502 | 0,517 | 0,551 | 0,603 | 0,671 |
| 2 | 0,9 | 0,503 | 0,541 | 0,625 | 0,748 | 0,897 |
| 3 | 1,2 | 0,504 | 0,575 | 0,727 | 0,931 | 1,149 |
| 4 | 1,5 | 0,506 | 0,619 | 0,848 | 1,125 | 1,363 |

$A(1{,}0;\,0{,}9)$;

2.9.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 |
| 0 | 0,2 | 7,250 | 7,062 | 6,841 | 6,582 | 6,279 |
| 1 | 0,5 | 7,183 | 6,811 | 6,319 | 5,669 | 4,808 |
| 2 | 0,8 | 7,112 | 6,511 | 5,614 | 4,278 | 2,283 |
| 3 | 1,1 | 7,036 | 6,142 | 4,663 | 2,161 | -2,048 |
| 4 | 1,4 | 6,956 | 5,721 | 3,380 | -1,070 | -9,481 |

$A(0{,}8;\,0{,}8)$;

2.10.

| | $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $y \backslash x$ | 1,3 | 1,6 | 1,9 | 2,2 | 2,5 |
| 0 | 0,6 | 1,334 | 1,401 | 1,463 | 1,523 | 1,581 |
| 1 | 0,8 | 1,428 | 1,510 | 1,587 | 1,661 | 1,732 |
| 2 | 1,0 | 1,517 | 1,612 | 1,703 | 1,789 | 1,871 |
| 3 | 1,2 | 1,601 | 1,709 | 1,811 | 1,901 | 2,001 |
| 4 | 1,4 | 1,679 | 1,801 | 1,913 | 2,020 | 2,121 |

$A(1{,}9;\,1{,}0)$.

# РОЗДІЛ 7

# ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можна обчислити за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Проте на практиці часто цією формулою неможливо скористатися з двох причин:

1) первісна $F(x)$ не виражається в елементарних функціях;

2) функція $f(x)$ задана у вигляді таблиці.

У цих випадках застосовують методи чисельного інтегрування. Ці методи полягають у тому, що дану функцію $f(x)$ замінюють на відрізку $[a, b]$ апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ простого вигляду (наприклад, многочленом), а потім приймають

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

## 7.1. Формули прямокутників і трапецій

Метод прямокутників є найпростішим методом наближеного обчислення визначених інтегралів.

Нагадаємо означення визначеного інтеграла. Нехай на відрізку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x)$. Поділимо відрізок $[a, b]$ на $n$ часткових відрізків точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ і на кожному частковому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ довільним способом виберемо точку $\xi_i$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$. Знайдемо добуток значення функції в цій точці $f(\xi_i)$ на довжину часткового відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та складемо суму усіх таких добутків

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{7.1}$$

Суму $S_n$ називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (7.1) при прямуванні до нуля найбільшої з довжин часткових відрізків, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на часткові відрізки, ні від вибору точок $\xi_i$ на кожному з них, то цю границю називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Отже,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{7.2}$$

Метод прямокутників грунтується на заміні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ інтегральною сумою (7.1).

За точки $\xi_i$ можна вибрати ліві $(\xi_i = x_{i-1})$ або праві $(\xi_i = x_i)$ кінці часткових відрізків. Позначивши $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, одержимо формули методу прямокутників

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx \approx y_0 h_1 + y_1 h_2 + ... + y_{n-1} h_n, \\ &\int_a^b f(x)\,dx \approx y_1 h_1 + y_2 h_2 + ... + y_n h_n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

На практиці найчастіше приймають $h_i = h = const$ $(i = 1, 2, ..., n)$, тобто відрізок $[a, b]$ ділять на $n$ рівних часткових відрізків. У цьому випадку $h = \dfrac{b-a}{n}$, а формули (7.3) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right), \\ &\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Часто застосовують формулу прямокутників, що використовує значення функції $f(x)$ у точках $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \dfrac{h}{2}$, які є серединами часткових відрізків. Ці точки позначають

$$x_{i-1/2} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Формула в цьому випадку має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + ... + f(x_{n-1/2})\right), \tag{7.5}$$

її називають формулою середніх.

Метод трапецій використовує лінійну інтерполяцію, тобто графік функції $y = f(x)$ замінюється ламаною, яка проходить через точки $(x_i, y_i)$. Якщо припустити, що $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху побудованою ламаною, дасть наближене значення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Ця площа дорівнює сумі площ прямолінійних трапецій, обмежених зверху ланками ламаної.

Площа кожної такої трапеції у випадку розбиття відрізка $[a, b]$ на $n$ рівних часткових відрізків дорівнює $\frac{1}{2}\left(y_{i-1}+y_i\right)h \quad (i=1,2,...,n)$, де $h-$ довжина кожного часткового відрізка.

Отже, площа всієї фігури, обмеженої зверху ламаною,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(y_0+y_1\right)h+\frac{1}{2}\left(y_1+y_2\right)h+...+\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+y_n\right)h.$$

Після простих перетворень отримаємо

$$S_n=h\left(\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right), \quad \text{де} \quad h=\frac{b-a}{n}.$$

Таким чином, одержуємо наближену формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right), \tag{7.6}$$

яку називають формулою трапецій.

Формула трапецій (7.6), яка виведена при припущенні, що $f(x)\geq 0$, справджується для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$. Позначимо праву частину будь-якої з формул (7.4), (7.5) та (7.6) через $S_n$. Тоді похибка кожної з цих формул

$$R_n=\int_a^b f(x)\,dx-S_n.$$

Ця похибка залежить від кроку розбиття і її можна представити у вигляді $R_n=O(h^k)$. Наведемо оцінку похибки для кожної з наближених формул.

Для формул прямокутників (7.4)

$$\left|R_n\right|\leq\frac{h}{2}(b-a)\,M_1, \quad \text{де} \quad M_1=\max_{a\leq x\leq b}\left|f'(x)\right|. \tag{7.7}$$

Для формули середніх (7.5) залишковий член $R_n$ має вигляд

$$R_n=\frac{h^2}{24}(b-a)\,f''(\xi), \tag{7.8}$$

де $\xi-$ деяка точка відрізка $[a, b]$.

Тому для цієї формули справджується оцінка

$$\left|R_n\right|\leq\frac{h^2}{24}(b-a)\,M_2, \tag{7.9}$$

де $M_2=\max_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|$.

Для формули трапецій (7.6) залишковий член $R_n$ має вигляд

$$R_n = -\frac{h^2}{12}(b-a)\, f''(\xi), \tag{7.10}$$

де $\xi$ – деяка точка відрізка $\left[a, b\right]$.

У цьому випадку одержуємо таку оцінку похибки:

$$\left|R_n\right| \le \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \quad \text{де} \quad M_2 = \max_{a \le x \le b}\left|f''(x)\right|. \tag{7.11}$$

Для формули середніх (7.5) і формули трапецій (7.6) можна записати, що $R_n = O(h^2)$. Ці формули є точними для многочленів першого степеня. Якщо $f''(x)$ не змінює знака на відрізку $\left[a, b\right]$, то формули (7.5) та (7.6) дають двосторонні наближення для інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, оскільки згідно з формулами (7.8) та (7.10) їх залишкові члени мають протилежні знаки.

Зауважимо, що формули (7.5) та (7.6) дають двосторонні наближення для інтеграла не тільки тоді, коли $f''(x)$ не змінює знака, проте ми не будемо зупинятися на цьому питанні.

Враховуючи вигляд залишкових членів (7.8) і (7.10) для формул середніх та трапецій, можна записати уточнену формулу середніх і трапецій для обчислення інтеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$

Нехай $I_{пр.с}$ – наближене значення інтеграла $I$, обчислене за формулою (7.5), а $I_{тр}$ – наближене значення цього інтеграла, обчислене за формулою (7.6). Уточнене значення цього інтеграла $I_{уточн}$ обчислюємо за формулою

$$I_{уточн} = \frac{1}{3}\left(2I_{пр.с} + I_{тр}\right). \tag{7.12}$$

Для цієї формули $R_n = O(h^4)$.

## 7.2. Формула Сімпсона

Поділимо відрізок інтегрування $\left[a, b\right]$ точками $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, ..., n,$ $x_0 = a, x_n = b)$ на $n$ рівних часткових відрізків довжиною $h = \dfrac{b-a}{n}$. Будемо вважати, що $n$ – парне число.

Метод Сімпсона наближеного обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f(x) dx$ грунтується на заміні підінтегральної функції $f(x)$ на кожному відрізку $\left[x_0, x_2\right], \left[x_2, x_4\right], ...,$ $\left[x_{n-2}, x_n\right]$ довжиною $2h$ інтерполяційним многочленом другого степеня.

Розглянемо спочатку $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$. Замінимо графік функції $y = f(x)$ параболою, яка проходить через точки $M_1\left(-h, f(-h)\right)$, $M_2\left(0, f(0)\right)$, $M_3\left(h, f(h)\right)$, тобто приймемо $f(x) \approx \varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Для визначення коефіцієнтів $a, b, c$ отримаємо систему лінійних рівнянь:

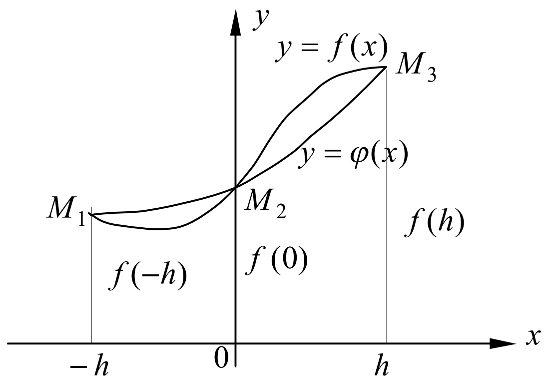


Рисунок 9

$$\begin{aligned} &ah^2 - bh + c = f(-h), \\ &c = f(0), \\ &ah^2 + bh + c = f(h). \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left( a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + c \right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right).$$

Із системи (7.13) одержуємо $2ah^2 + 6c = f(-h) + 4f(0) + f(h)$.

Отже,

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left( f(-h) + 4f(0) + f(h) \right). \tag{7.14}$$

Перейдемо до наближеного обчислення інтеграла $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. На кожному відрізку $\left[x_0, x_2\right]$, $\left[x_2, x_4\right], ..., \left[x_{n-2}, x_n\right]$ застосуємо формулу (7.14)

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right), \\ &\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right), \end{aligned} \tag{7.15}$$

де $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Додаючи ліві та праві частини співвідношень (7.15), одержуємо

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})\right). \qquad (7.16)$$

Цю формулу називають формулою Сімпсона або формулою параболічних трапецій.

Можна довести, що залишковий член (похибка) формули Сімпсона має вигляд

$$R_n = -\frac{h^4}{180}(b-a)\, f^{(4)}(\xi), \qquad (7.17)$$

де $\xi$ – деяка точка відрізка $[a, b]$. Отже,

$$|R_n| \le \frac{h^4}{180}(b-a)\, M_4, \qquad (7.18)$$

де $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$.

Таким чином, для формули Сімпсона $R_n = O(h^4)$. Відзначимо, що формула Сімпсона є точною для многочленів до третього степеня включно, оскільки в цьому випадку $f^{(4)}(x) \equiv 0$ і $R_n = 0$.

Похибки уточненої формули (7.12), яка використовує методи прямокутників і трапецій, та формули Сімпсона (7.16) мають однаковий порядок. Проте формула (7.12) вимагає двократного обчислення інтеграла різними методами. Крім того, для формули Сімпсона потрібно майже вдвічі менше табличних значень функції, ніж для формули (7.12), оскільки для методу прямокутників потрібні додаткові значення функції в точках, що є серединами часткових відрізків. Тому на практиці надають перевагу формулі Сімпсона.

## 7.3. Правило Рунге практичного оцінювання похибки

Вирази для оцінювань похибок формул числового інтегрування (7.9), (7.11), (7.18) містять значення похідних вищих порядків від підінтегральної функції $f(x)$. Безпосереднє використання цих формул часто призводить до громіздких обчислень. Правило Рунге дає змогу оцінити похибку за результатами обчислень з двома різними кроками.

Інтеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ обчислимо за однією з наближених формул, порядок точності якої дорівнює $k$, з двома кроками: $h$ та $2h$. Одержимо наближені значення цього інтеграла: $I_h$ та $I_{2h}$. Згідно з формулами (7.7), (7.8), (7.10), (7.17) отримаємо рівності

$$I - I_h \approx Ch^k, \qquad I - I_{2h} \approx C(2h)^k,$$

де $C$ – константа, яка не залежить від кроку $h$.

Віднімаючи від другої рівності першу, одержимо

$$I_h - I_{2h} \approx Ch^k\left(2^k - 1\right),$$

звідки

$$Ch^k \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^k - 1}.$$

Тому

$$I - I_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^k - 1}. \tag{7.19}$$

Отже, для абсолютної похибки наближеного значення $I_h$ справджується формула

$$\left|R_n\right| \approx \frac{\left|I_h - I_{2h}\right|}{2^k - 1}. \tag{7.20}$$

Якщо обчислення проводити, наприклад, за формулою середніх або трапецій $\left(k = 2\right)$,то одержимо

$$\left|R_n\right| \approx \frac{\left|I_h - I_{2h}\right|}{3}. \tag{7.21}$$

Якщо обчислимо інтеграл методом Сімпсона $\left(k = 4\right)$, то формула (7.20) має вигляд

$$\left|R_n\right| \approx \frac{\left|I_h - I_{2h}\right|}{15}. \tag{7.22}$$

**Зауваження 1.** Для практичного оцінювання похибки за правилом Рунге не обов'язково брати кроки $h$ та $2h$. Якщо виконати обчислення з кроком $h$ та $\lambda h$ $\left(\lambda > 1\right)$ і отримати відповідно наближені значення інтегралів $I_h$ та $I_{\lambda h}$, то для абсолютної похибки наближеного значення $I_h$ одержимо формулу

$$\left|R_n\right| \approx \frac{\left|I_h - I_{\lambda h}\right|}{\lambda^k - 1}. \tag{7.23}$$

**Зауваження 2.** Правило Рунге можна застосовувати в різних числових методах, наприклад, в методах Рунге-Кутта при наближеному розв'язанні задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

**Зауваження 3.** Для уточнення результатів наближеного інтегрування можна застосувати процес Ейткена. Він дає можливість оцінити похибку методу $O(h^k)$ і вказує алгоритм уточнення результатів. Обчислення проводять послідовно три рази при різних кроках розбиття $h_1, h_2, h_3$, причому їх відношення сталі: $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{h_3}{h_2} = q$ (наприклад, при діленні крока навпіл $q = 0{,}5$).

Нехай у результаті наближеного інтегрування одержані значення інтеграла $I_1, I_2, I_3$. Тоді уточнене значення інтеграла обчислюємо за формулою

$$I = I_1 - \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 - 2I_2 + I_3}, \tag{7.24}$$

а порядок точності використаного методу чисельного інтегрування визначаємо співвідношенням

$$k = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}. \tag{7.25}$$

**Приклад 7.1.** Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{0.5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx$, взявши $n = 20$:

а) за формулами прямокутників;
б) за формулою трапецій;
в) за формулою середніх;
г) за уточненою формулою середніх і трапецій;
д) за формулою Сімпсона.

**Розв'язування.** Складемо таблицю значень функції $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$ для $n = 20$ та $h = \frac{1,5 - 0,5}{20} = 0,05$.

Таблиця 1

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,50 | 2,10254 | 7 | 0,85 | 1,28085 | 14 | 1,20 | 0,93958 |
| 1 | 0,55 | 1,92098 | 8 | 0,90 | 1,21574 | 15 | 1,25 | 0,90652 |
| 2 | 0,60 | 1,76973 | 9 | 0,95 | 1,15754 | 16 | 1,30 | 0,87602 |
| 3 | 0,65 | 1,64178 | 10 | 1,00 | 1,10517 | 17 | 1,35 | 0,84781 |
| 4 | 0,70 | 1,53216 | 11 | 1,05 | 1,05782 | 18 | 1,40 | 0,82162 |
| 5 | 0,75 | 1,43717 | 12 | 1,10 | 1,01480 | 19 | 1,45 | 0,79727 |
| 6 | 0,80 | 1,35411 | 13 | 1,15 | 0,97554 | 20 | 1,50 | 0,77455 |

а). Застосуємо формули прямокутників (7.4):

$$I_{np}^{(1)} = h \sum_{i=0}^{19} y_i = 0,05 \cdot 24,75475 = 1,23774,$$

$$I_{np}^{(2)} = h \sum_{i=1}^{20} y_i = 0,05 \cdot 23,42676 = 1,17134.$$

б). Використовуючи формулу трапецій (7.6), одержимо:

$$I_{mp} = h\left(\frac{1}{2}(y_0 + y_{20}) + \sum_{i=1}^{19} y_i\right) = 0,05 \cdot 24,09076 = 1,20454.$$

в). Щоб застосувати формулу середніх (7.5), складемо таблицю значень даної функції в точках $x_{i-1} + \frac{h}{2}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Таблиця 2

| $i$ | $x_{i-1/2}$ | $f\left(x_{i-1/2}\right)$ | $i$ | $x_{i-1/2}$ | $f\left(x_{i-1/2}\right)$ | $i$ | $x_{i-1/2}$ | $f\left(x_{i-1/2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,525 | 2,00743 | 8 | 0,875 | 1,24736 | 15 | 1,225 | 0,92271 |
| 2 | 0,575 | 1,84206 | 9 | 0,925 | 1,18585 | 16 | 1,275 | 0,89097 |
| 3 | 0,625 | 1,70319 | 10 | 0,975 | 1,13068 | 17 | 1,325 | 0,86164 |
| 4 | 0,675 | 1,58493 | 11 | 1,025 | 1,08091 | 18 | 1,375 | 0,83447 |
| 5 | 0,725 | 1,48302 | 12 | 1,075 | 1,03581 | 19 | 1,425 | 0,80923 |
| 6 | 0,775 | 1,39430 | 13 | 1,125 | 0,99473 | 20 | 1,475 | 0,78572 |
| 7 | 0,825 | 1,31636 | 14 | 1,175 | 0,95718 | | | |

Застосувавши формулу середніх (7.5), одержимо

$$I_{пр.с} = h\sum_{i=1}^{20} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0,05 \cdot 24,06855 = 1,20343\,.$$

г). За уточненою формулою (7.12) отримаємо

$$I_{уточн} = \frac{1}{3}\left(2I_{пр.с} + I_{тр}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 1,20343 + 1,20454\right) = 1,20380\,.$$

д). Застосувавши формулу Сімпсона (7.16) і таблицю 1 значень функції $f(x)$, одержимо

$$I_{сімп} = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{20} + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{19}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{18}\right)\right) =$$

$$= \frac{0,5}{3}\left(2,87709 + 4 \cdot 12,02328 + 2 \cdot 10,62893\right) = 1,20380.$$

Обчислимо абсолютну похибку формули Сімпсона за допомогою правила Рунге. Ми знайшли наближене значення даного інтеграла за формулою Сімпсона з кроком $h = 0,05$

$$I_h = 1,20380.$$

Обчислимо також наближене значення цього інтеграла з кроком $2h = 0,10.$

$$I_{2h} = \frac{0,10}{3}\left(2,87709 + 4 \cdot 5,99021 + 2 \cdot 4,63872\right) = 1,20385\,.$$

Отже, $\left|R_{20}\right| \approx \dfrac{\left|1,20380 - 1,20385\right|}{15} \approx 3,33 \cdot 10^{-6}$, тобто $\left|R_{20}\right| < 5 \cdot 10^{-6}$.

Таким чином, обчислюючи наближено даний інтеграл за формулою Сімпсона, ми одержали, що $\displaystyle\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}\,dx \approx 1,20380.$ В отриманому результаті всі знаки вірні. Зауважимо, що таке ж значення ми одержали, застосовуючи уточнену формулу (7.12).

## 7.4. Метод Монте-Карло

У багатьох задачах вихідні дані мають випадковий характер, тому для розв’язування таких задач застосовують статистико-ймовірнісний підхід. На основі такого підходу побудовано низку числових методів, де врахований випадковий характер величин, які обчислюють. До таких методів належить метод Монте-Карло, який застосовують для розв’язування деяких задач обчислювальної математики, зокрема для обчислення інтегралів.

Наприклад, потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$.

Нехай $t$ – рівномірно розподілена на відрізку $[0,\ 1]$ випадкова величина, $\rho(t)$ – густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини:

$$\rho(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1 & \text{при } 0\le t\le 1,\\ 0 & \text{при } t>1.\end{cases} \tag{7.26}$$

Нехай $\varphi(t)$ – функція випадкової величини $t$. Математичне сподівання функції $\varphi(t)$ визначаємо за формулою

$$M(\varphi(t))=\int\limits_0^1 \varphi(t)\rho(t)\,dt=\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt. \tag{7.27}$$

Знайдемо наближене значення математичного сподівання функції $\varphi(t)$. Нехай у результаті $n$ випробувань одержано $n$ значень випадкової величини $t$: $t_1, t_2, ..., t_n$. Ці значення можна взяти, наприклад, з таблиці випадкових чисел. У результаті цих $n$ випробувань функція $\varphi(t)$ прийме значення $\varphi(t_1), \varphi(t_2),...,$ $\varphi(t_n)$. Середнє арифметичне одержаних значень функції $\varphi(t)$ дорівнює $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(t_i)$. При досить великому значенні $n$

$$M(\varphi(t))\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i). \tag{7.28}$$

Із формул (7.27) та (7.28) випливає, що

$$\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i). \tag{7.29}$$

Розглянемо загальний випадок: нехай потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Перейдемо до нової змінної $t$ за допомогою рівності $x=a+(b-a)t$. Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt, \text{ де } \varphi(t)=f(a+(b-a)t).$$

Використовуючи формулу (7.29) для наближеного обчислення інтеграла $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$, отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i) \text{ або } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (7.30)$$

де $x_i = a + (b-a)t_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

**Приклад 7.2.** Обчислити наближене значення інтеграла $\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx$ методом Монте-Карло, взявши $n = 30$. Знайти точне значення цього інтеграла і обчислити абсолютну та відносну похибки одержаного наближеного значення.

**Розв'язування.** З таблиці випадкових чисел візьмемо 30 чисел $t_1, t_2, ..., t_{30}$, які містяться на відрізку $[0, 1]$. Знайдемо відповідні значення $x_i$ за формулою $x_i = 1 + 2t_i$, $(i = 1, 2, ..., 30)$.

Обчислимо значення функції $f(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., 30)$ і застосуємо формулу (7.30).

| $i$ | $t_i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $i$ | $t_i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6987 | 2,3974 | 1,19018 | 16 | 0,2059 | 1,4118 | 1,54680 |
| 2 | 0,0387 | 1,0774 | 1,79689 | 17 | 0,5626 | 2,1252 | 1,25308 |
| 3 | 0,5581 | 2,1162 | 1,25549 | 18 | 0,8516 | 2,7032 | 1,13847 |
| 4 | 0,6531 | 2,3062 | 1,20921 | 19 | 0,6476 | 2,2952 | 1,21163 |
| 5 | 0,5735 | 2,1470 | 1,24732 | 20 | 0,5685 | 2,1270 | 1,25260 |
| 6 | 0,9333 | 2,8666 | 1,11702 | 21 | 0,1313 | 1,2626 | 1,64588 |
| 7 | 0,1998 | 1,3996 | 1,55425 | 22 | 0,3897 | 1,7794 | 1,36595 |
| 8 | 0,1837 | 1,3674 | 1,57444 | 23 | 0,4380 | 1,8760 | 1,32987 |
| 9 | 0,4216 | 1,8432 | 1,34168 | 24 | 0,1618 | 1,3236 | 1,60320 |
| 10 | 0,3384 | 1,6768 | 1,40890 | 25 | 0,4858 | 1,9716 | 1,29785 |
| 11 | 0,4247 | 1,8494 | 1,33942 | 26 | 0,1017 | 1,2034 | 1,69045 |
| 12 | 0,2910 | 1,5820 | 1,45338 | 27 | 0,0858 | 1,1716 | 1,71576 |
| 13 | 0,4731 | 1,9462 | 1,30603 | 28 | 0,8396 | 2,6792 | 1,14194 |
| 14 | 0,6454 | 2,2908 | 1,21261 | 29 | 0,7813 | 2,5626 | 1,16015 |
| 15 | 0,5146 | 2,0292 | 1,28016 | 30 | 0,2712 | 1,5424 | 1,47347 |

$$\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx \approx \frac{2}{30}\sum_{i=1}^{30} f(x_i) = \frac{1}{15}\cdot 41{,}11408 = 2{,}74094 \approx 2{,}7409.$$

Обчислимо цей інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx = \int_1^3 \left(e^{-2x}+2e^{-x}+1\right)dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-6}-2e^{-3}+3+\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}-1\approx 2{,}7026.$$

Абсолютна похибка $\Delta\approx 0{,}038$; відносна похибка $\delta\approx 0{,}014$, тобто $\delta\approx 1{,}4\%$.

## 7.5. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначений інтеграл, взявши $n=20$: а) методом прямокутників; б) методом трапецій; в) за уточненою формулою прямокутників і трапецій; г) методом Сімпсона; д) за формулою Ейткена . Оцінити точність обчислень.

1.1. $\int\limits_0^2\sqrt{1+\sin^3 x}dx$;

1.2. $\int\limits_0^{1,5}\sqrt[3]{\sin 2x+1}dx$;

1.3. $\int\limits_0^{1,5}x^2\sqrt{1+x^5}dx$;

1.4. $\int\limits_0^1\cos(x^3+2x^2)dx$;

1.5. $\int\limits_1^{2,5}\frac{xdx}{\ln(x+2)}$;

1.6. $\int\limits_0^{1,2}x\ln(1+\cos x)dx$;

1.7. $\int\limits_0^{0,5}(x^2+1)e^{-x^2}dx$;

1.8. $\int\limits_0^1\frac{e^x}{\sqrt{2+x^3}}dx$;

1.9. $\int\limits_0^1\frac{e^x}{x+1}dx$;

1.10. $\int\limits_0^{1,1}x\cos(x^3)dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл методом Монте-Карло, взявши $n=40$. Знайти точне значення цього інтеграла й обчислити абсолютну та відносну похибки одержаного наближеного значення.

2.1. $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$;

2.2. $\int\limits_1^2(x-1)e^x dx$;

2.3. $\int\limits_1^2 arctg\sqrt{x}dx$;

2.4. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$;

2.5. $\int\limits_1^2\sqrt{4+x^2}dx$;

2.6. $\int\limits_0^2\sqrt{e^x-1}\,dx$;

2.7. $\int\limits_0^2\sqrt{2x-x^2}dx$;

2.8. $\int\limits_2^3 x\ln(1+2x)\,dx$;

2.9. $\int\limits_2^4\frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$;

2.10. $\int\limits_2^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

# РОЗДІЛ 8

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \tag{8.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{8.2}$$

Припустимо, що для правої частини рівняння (8.1) на деякому відрізку $[x_0, b]$ виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Тоді на відрізку $[x_0, b]$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (8.1), що задовольняє початкову умову (8.2).

Поділимо відрізок $[x_0, b]$ на $n$ рівних часткових відрізків точками $x_i = x_0 + i\,h$ $(i = 0,1,...,n;\; x_n = b)$. Таким чином, довжина кожного часткового відрізка дорівнює $h$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші (8.1), (8.2) можна поділити на дві групи – однокрокові та багатокрокові.

Однокрокові методи полягають у тому, що для знаходження значення розв'язку задачі в точці $x_{i+1}$ використовують інформацію про цей розв'язок тільки на одному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$. До таких методів належать методи Ейлера, Рунге-Кутта.

Багатокрокові методи полягають у тому, що для знаходження розв'язку задачі в точці $x_{i+1}$ використовують інформацію про цей розв'язок на кількох попередніх кроках. Найпоширенішими з цих методів є методи Адамса.

## 8.1. Метод Ейлера

Метод Ейлера полягає в тому, що інтегральна крива, яка є графіком розв'язку даної задачі Коші, наближено замінюється ламаною.

Користуючись рівнянням (8.1), обчислимо в початковій точці $M_0(x_0, y_0)$ інтегральної кривої кутовий коефіцієнт її дотичної $y_0' = f(x_0, y_0)$. Тоді рівняння дотичної до інтегральної кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ запишемо у вигляді

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)\,(x - x_0). \tag{8.3}$$

Замінюючи на відрізку $[x_0, x_1]$ шукану інтегральну криву $y = \varphi(x)$ відрізком дотичної (8.3), знайдемо наближене значення розв'язку $y_1$ в точці $x_1$:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,(x_1 - x_0)$$

або, оскільки $x_1 - x_0 = h$,

$$y_1 = y_0 + f\,(x_0,\, y_0)\, h. \tag{8.4}$$

Підставивши значення $x_1$ та $y_1$ в праву частину рівняння (8.1), знайдемо $y_1' = f\,(x_1, y_1)$. На відрізку $[x_1, x_2]$ замінимо інтегральну криву $y = \varphi(x)$ відрізком дотичної, яка проходить через точку $M_1(x_1,\, y_1)$ і має кутовий коефіцієнт $y_1' = f\,(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = f\,(x_1,\, y_1)\,(x - x_1). \tag{8.5}$$

Підставляючи у рівняння (8.5) $x = x_2$, знайдемо наближене значення шуканого розв'язку $y = \varphi(x)$ в точці $x_2$:

$$y_2 = y_1 + f\,(x_1,\, y_1)\,(x_2 - x_1)$$

або, оскільки $x_2 - x_1 = h$,

$$y_2 = y_1 + f\,(x_1,\, y_1) h. \tag{8.6}$$

Продовжуючи цей процес, послідовно одержимо наближені значення розв'язку $y = \varphi(x)$ в точках $x_3, x_4, ..., x_n = b.$ При цьому значення розв'язку в точці $x_{i+1}$ обчислюємо за формулою

$$y_{i+1} = y_i + f\,(x_i,\, y_i) h \quad (i = 0,1,2,\, ...,\, n-1). \tag{8.7}$$

Таким чином, отримаємо наближені значення шуканого розв'язку в точках $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b.$

Ми розглянули випадок $b > x_0.$ Якщо $b < x_0,$ то формула (8.7) також справедлива, але в цьому випадку крок розбиття $h = \dfrac{b - x_0}{n}$ – від'ємний.

Метод Ейлера найпростіший із чисельних методів розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Недоліком цього методу є його невисока точність. Метод Ейлера має перший порядок точності, тобто похибка цього методу дорівнює $O(h)$ (див. [13], р.8, 8.2).

**Приклад 8.1.** Обчислити за методом Ейлера наближене значення $y(1{,}4)$ розв'язку задачі Коші $y' + \dfrac{y}{x} = e^x,\; y(1) = 1,$ взявши крок $h = 0{,}1$. Знайти точний розв'язок цієї задачі та обчислити похибку одержаного наближеного значення.

**Розв'язування.** Відрізок $[1;\, 1{,}4]$ поділимо на 4 рівних часткових відрізки. Тоді довжина кожного часткового відрізка дорівнює $0{,}1$. Обчислимо наближені значення розв'язку в точках $x_1 = 1{,}1;\; x_2 = 1{,}2;\; x_3 = 1{,}3;\; x_4 = 1{,}4.$

Задане рівняння запишемо у вигляді $y' = e^x - \dfrac{y}{x}$. Отже, $f(x, y) = e^x - \dfrac{y}{x}$. Значення розв'язку будемо обчислювати за формулою (8.7). Результати обчислень запишемо у таблицю.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $h\,f(x_i, y_i)$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $h\,f(x_i, y_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,1718 | 3 | 1,3 | 1,5839 | 0,2451 |
| 1 | 1,1 | 1,1718 | 0,1939 | 4 | 1,4 | 1,8290 | |
| 2 | 1,2 | 1,3657 | 0,2182 | | | | |

Таким чином, $y(1,4) \approx 1,8290$.

Знайдемо точний розв'язок даної задачі Коші: $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 1$.

Рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$ є лінійним рівнянням першого порядку. Його розв'язок шукатимемо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$. $y' = u'v + uv'$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^x.$$

Нехай $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Тоді одержимо: $u'v = e^x$.

Розв'яжемо ці два рівняння.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|.$$

Отже, $v = \dfrac{1}{x}$. Рівняння $u'v = e^x$ матиме вигляд $u'\dfrac{1}{x} = e^x$. Звідси $d\,u = x\,e^x\,d\,x$, $u = \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$ має вигляд

$$y = \frac{1}{x}\left(x\,e^x - e^x + C\right).$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y'(1) = 1$.

$$1 = 1(e - e + C).$$

Отже, $C = 1$ і розв'язок заданої задачі Коші

$$y = \frac{1}{x}\left(x\,e^x - e^x + 1\right).$$

Обчислимо за цією формулою значення $y(1,4)$, залишаючи чотири знаки після коми:

$$y\,(1,4) = 1,8729\,.$$

Абсолютна похибка наближеного значення $y(1,4)$, обчисленого методом Ейлера, $\Delta = 4,39 \cdot 10^{-2} < 5 \cdot 10^{-2}$; відносна похибка $\delta \approx 2,34 \cdot 10^{-2}$, тобто $\delta \approx 2,34\%$.

## 8.2. Модифікований метод Ейлера

Суть цього методу полягає в тому, що спочатку обчислюємо значення розв'язку задачі Коші (8.1), (8.2) в точці $x_{i+1/2} = x_i + \dfrac{h}{2}$ за формулою

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \quad (i = 0,1, ..., n-1). \tag{8.8}$$

Потім знаходимо значення правої частини рівняння (8.1) в точці $\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$, тобто $f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$.

Після цього обчислюємо $y_{i+1}$ за формулою

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right), \quad (i = 0,1,..., n-1). \tag{8.9}$$

Формули (8.8) та (8.9) можна об'єднати в одну формулу

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right), \quad (i = 0,1,..., n-1). \tag{8.10}$$

Цей метод точніший, ніж звичайний метод Ейлера. Похибка модифікованого методу Ейлера дорівнює $O(h^2)$.

**Приклад 8.2.** Обчислити наближене значення $y(1,4)$ розв'язку задачі Коші, розглянутої у прикладі 8.1, модифікованим методом Ейлера. Знайти похибку одержаного наближеного значення.

**Розв'язування.** Виконані обчислення запишемо у таблицю.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$ | $x_{i+1/2}$ | $y_{i+1/2}$ | $h f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,0859 | 1,05 | 1,0859 | 0,1823 |
| 1 | 1,1 | 1,1823 | 0,0965 | 1,15 | 1,2788 | 0,2046 |
| 2 | 1,2 | 1,3869 | 0,1082 | 1,25 | 1,4951 | 0,2294 |
| 3 | 1,3 | 1,6163 | 0,1213 | 1,35 | 1,7376 | 0,2570 |
| 4 | 1,4 | 1,8733 | | | | |

Отже, застосувавши модифікований метод Ейлера, ми отримали $y(1,4) \approx 1,8733$. У прикладі 8.1 одержано точне значення розв'язку з чотирма знаками після коми: $y(1,4) = 1,8729$. Таким чином, абсолютна похибка наближеного значення, обчисленого модифікованим методом Ейлера, $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$, а відносна похибка $\delta \approx 2,3 \cdot 10^{-4}$, тобто $\delta \approx 0,023\,\%$.

## 8.3. Методи Рунге-Кутта

Методи Рунге-Кутта ґрунтуються на використанні формули Тейлора.

Нехай потрібно знайти розв’язок диференціального рівняння (8.1), який задовольняє початкову умову (8.2). Як і при вивченні методу Ейлера, будемо розглядати відрізок $[x_0, b]$, на якому існує єдиний розв’язок задачі Коші (8.1), (8.2). Поділимо цей відрізок на $n$ рівних часткових відрізків точками $x_i = x_0 + i\,h,\ (i = 0, 1, ..., n;\ x_n = b)$.

В околі точки $x_i$ представимо шуканий розв’язок задачі Коші у вигляді формули Тейлора, припускаючи, що виконуються умови, при яких це представлення справедливе.

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)\,(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + ... + \frac{y^{(m)}(x_i)}{m!}(x - x_i)^m + \frac{y^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_i)^{m+1}, \tag{8.11}$$

де $x_i < \xi < x$ або $x < \xi < x_i$.

Підставивши у формулу (8.11) $x = x_{i+1}$, отримаємо

$$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + ... + \frac{y^{(m)}(x_i)}{m!}h^m + O\left(h^{m+1}\right).$$

У правій частині цієї рівності залишимо члени, які містять похідні розв’язку до $m-$го порядку включно.

$$y_{i+1} \approx y_i + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + ... + \frac{y^{(m)}(x_i)}{m!}h^m. \tag{8.12}$$

Ідея побудови методів Рунге-Кутта $m-$го порядку полягає в заміні величини

$$\Delta y_i = y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + ... + \frac{y^{(m)}(x_i)}{m!}h^m$$

на вираз, який містить значення правої частини рівняння (8.1) у деяких проміжних точках часткового відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ та наближує $\Delta y_i$ з точністю до $m-$го порядку.

У загальному випадку методи Рунге-Кутта записують у вигляді

$$y_{i+1} \approx y_i + \Delta y_i \quad \left(i = 0, 1, ..., n-1\right), \tag{8.13}$$

де

$$\Delta y_i = \alpha_1 k_1^{(i)} + \alpha_2 k_2^{(i)} + ... + \alpha_m k_m^{(i)}, \tag{8.14}$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m -$деякі коефіцієнти, $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, ..., k_m^{(i)}$ – числа, які обчислюють за формулами

$$
\begin{aligned}
&k_1^{(i)} = h\,f\,(x_i,\, y_i),\\
&k_2^{(i)} = h\,f\left(x_i + \beta_2 h,\;\; y_i + \gamma_{21} k_1^{(i)}\right),\\
&k_3^{(i)} = h\,f\left(x_i + \beta_3 h,\;\; y_i + \gamma_{31} k_1^{(i)} + \gamma_{32} k_2^{(i)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_m^{(i)} = h\,f\left(x_i + \beta_m h,\;\; y_i + \gamma_{m1} k_1^{(i)} + \gamma_{m2} k_2^{(i)} + \ldots + \gamma_{m,m-1} k_{m-1}^{(i)}\right);
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

$\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m;\;\; \gamma_{pg}\left(0 < g < p \le m\right)$ також деякі параметри.

Порядок точності методів Рунге-Кутта залежить від кількості членів у виразі (8.14) та значень констант $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\;\; \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m;\;\; \gamma_{pg}\left(0 < g < p \le m\right)$.

З питанням про вибір цих констант читач може ознайомитися в [1], гл. VIII, § 2.

Зауважимо, що при $m = 1$ з формули (8.12) одержимо співвідношення

$$y_{i+1} \approx y_i + y'\left(x_i\right) h\,. \tag{8.16}$$

Оскільки $y'\left(x_i\right) = f\left(x_i,\, y_i\right)$, то з (8.16) отримуємо формулу (8.7), за якою обчислюють наближені значення розв’язку задачі Коші методом Ейлера. Отже, метод Ейлера належить до методів Рунге-Кутта першого порядку точності.

На основі формул (8.12)-(8.15) можна побудувати методи Рунге-Кутта різного порядку точності. Найбільшого поширення набули методи Ренге-Кутта четвертого порядку точності. Можна одержати велику кількість можливих варіантів цих методів. Проте найчастіше застосовують метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності, який визначають за такими формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta\, y_i \quad (i = 0, 1, 2,\; \ldots, n-1), \tag{8.17}$$

$$\Delta\, y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2\,k_2^{(i)} + 2\,k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right), \tag{8.18}$$

де

$$
\begin{aligned}
&k_1^{(i)} = h\,f\,(x_i,\, y_i),\\
&k_2^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\;\; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),\\
&k_3^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\;\; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\\
&k_4^{(i)} = h\,f\left(x_i + h,\;\; y_i + k_3^{(i)}\right).
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Зауважимо, що наближену оцінку похибки методу Рунге-Кутта на даному відрізку $\left[x_0, b\right]$ можна одержати за правилом Рунге. Оскільки похибка методу Рунге-Кутта, який визначають за формулами (8.17)-(8.19), дорівнює $O\left(h^4\right)$, то для абсолютної похибки $\Delta$ справджується оцінка вигляду (7.22), тобто

$$\Delta \approx \frac{|y_h - y_{2h}|}{15}, \tag{8.20}$$

де $y_h$ та $y_{2h}$ – результати обчислень за формулами (8.17)-(8.19) відповідно з кроками $h$ і $2h$.

Ознайомитися з методами Рунге-Кутта різного порядку точності читач може в [13], р. 8, 8.3, 8.4.

**Приклад 8.3.** Скласти таблицю значень розв'язку рівняння $y' = y - \frac{2x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, на відрізку $[0; 0,6]$ з кроком $h = 0,2$, застосувавши метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

**Розв'язування.** За умовою задачі $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$. Потрібно знайти значення розв'язку в точках $x_1 = 0,2;\ x_2 = 0,4;\ x_3 = 0,6.$ Обчислимо значення розв'язку $y_1$ в точці $x_1$. За формулами (8.17) і (8.18) одержимо

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \text{ де } \Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2\ k_2^{(0)} + 2\ k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right).$$

При цьому числа $k_j^{(0)}$ $(j = 1,...,4)$ знайдемо за формулами (8.19).

Таким чином,

$$k_1^{(0)} = h\,f(x_0, y_0) = 0,2 \cdot f(0,1) = 0,2,$$

$$k_2^{(0)} = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,2\,f(0,1;\,1,1) = 0,18364,$$

$$k_3^{(0)} = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,2\,f(0,1;1,09182) = 0,18173,$$

$$k_4^{(0)} = h\,f\left(x_0 + h,\ y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0,2\,f(0,2;\,1,18173) = 0,16865,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(0,2 + 2 \cdot 0,18364 + 2 \cdot 0,18173 + 0,16865\right) = 0,18323.$$

Отже, $y_1 = 1 + 0,18323 = 1,18323.$

Значення $y_2$ та $y_3$ знаходимо аналогічно. Процес обчислень проводимо за схемою

| $i$ | $j$ | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ | $k_j = h\,f(x,y)$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\underline{0}$ | $\underline{1}$ | 1 | 0,2 | 0,18323 |
| | 2 | 0,1 | 1,1 | 0,91818 | 0,18364 | |
| | 3 | 0,1 | 1,09182 | 0,90864 | 0,18173 | |
| | 4 | 0,2 | 1,18173 | 0,84324 | 0,16865 | |
| 1 | 1 | $\underline{0{,}2}$ | $\underline{1{,}18323}$ | 0,84517 | 0,16903 | 0,15844 |
| | 2 | 0,3 | 1,26775 | 0,79447 | 0,15889 | |
| | 3 | 0,3 | 1,26268 | 0,78750 | 0,15750 | |
| | 4 | 0,4 | 1,34073 | 0,74404 | 0,14881 | |
| 2 | 1 | $\underline{0{,}4}$ | $\underline{1{,}34167}$ | 0,74540 | 0,14908 | 0,14162 |
| | 2 | 0,5 | 1,41621 | 0,71010 | 0,14202 | |
| | 3 | 0,5 | 1,41268 | 0,70481 | 0,14096 | |
| | 4 | 0,6 | 1,48263 | 0,67326 | 0,13465 | |
| 3 | | $\underline{0{,}6}$ | $\underline{1{,}48329}$ | | | |

Знайдені значення $y_1, y_2, y_3$ розв’язку даної задачі Коші в наведеній таблиці підкреслено. Зауважимо, що точний розв’язок цієї задачі виражається формулою $y = \sqrt{2x+1}$. Якщо обчислити значення розв’язку $y(0,2)$, $y(0,4)$, $y(0,6)$ за цією формулою, то отримаємо: $y(0,2) = 1{,}18322$; $y(0,4) = 1{,}34164$; $y(0,6) = 1{,}48324$. Таким чином, числа $y_1$, $y_2$, $y_3$, обчислені за методом Рунге-Кутта, мають чотири вірних знаки після коми.

## 8.4. Методи Адамса

Методи Адамса належать до багатокрокових методів розв’язування задачі Коші.

Розглянемо задачу Коші (8.1), (8.2). Потрібно знайти розв’язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Виберемо крок $h$ і розглянемо значення аргументу $x_i = x_0 + ih$, де $i = 0, 1, 2, \ldots$. Ідея багатокрокових методів полягає в тому, що для обчислення значення розв’язку $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ використовують результати не одного попереднього кроку, а $m$ попередніх кроків, тобто значення $y_{i-m+1}, y_{i-m+2}, \ldots, y_i$. В цьому випадку метод називають $m$-кроковим.

Підставимо точний розв’язок задачі Коші $y(x)$ у рівняння (8.1), запишемо це рівняння у вигляді

$$dy = f\big(x, y(x)\big)dx$$

і про інтегруємо його обидві частини по $x$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y(x)\right)dx. \qquad (8.21)$$

Обчислимо інтеграл від лівої частини:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = y\left(x_{i+1}\right) - y\left(x_i\right) = y_{i+1} - y_i. \qquad (8.22)$$

Для обчислення інтеграла, що міститься в правій частині рівності (8.21), побудуємо інтерполяційний многочлен $P_{m-1}(x)$ степеня $m-1$ для функції $f\left(x,\, y(x)\right)$ використавши $m$ вузлів: $x_{i-m+1}, x_{i-m+2}, \ldots, x_i$.

Оскільки $f\left(x,\, y(x)\right) \approx P_{m-1}(x)$, то

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y(x)\right)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{m-1}(x)dx. \qquad (8.23)$$

З формул (8.21), (8.22) та (8.23) одержимо

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{m-1}(x)dx. \qquad (8.24)$$

У формулі (8.24) інтерполяційний многочлен $P_{m-1}(x)$ застосовують поза відрізком інтерполяції, тобто в даному випадку його використовують як екстраполяційний многочлен для знаходження наближеного значення розв’язку задачі Коші в точці $x_{i+1}$, що знаходиться поза відрізком $\left[x_{i-m+1},\, x_i\right]$.

Одержані таким чином методи називають екстраполяційними методами Адамса-Башфорта.

Інтерполяційний многочлен $P_{m-1}(x)$ для функції $f\left(x,\, y(x)\right)$ можна побудувати іншим способом, взявши за вузли інтерполяції $m$ значень аргументу $x_{i-m+2}, x_{i-m+3}, \ldots, x_i, x_{i+1}$. В цьому випадку одержують формулу, яка визначає наближене значення розв’язку задача Коші в точці $x_{i+1}$ неявно. Побудовані таким чином методи називають $m$-кроковими інтерполяційними методами Адамса-Мултона. Ці методи називають також неявними методами.

Відзначимо ще одну групу багатокрокових методів, які ґрунтуються на спільному використанні екстраполяційних та інтерполяційних методів Адамса і називають їх методами прогнозу та корекції. Суть їх полягає в наступному. Спочатку за екстраполяційною формулою Адамса-Башфорта обчислюють наближене значення $y_{i+1}$, яке називають «прогнозом» і приймають за початкове наближення. Потім, використовуючи неявний метод Адамса-Мултона, «коректують» наближення, отримане за допомогою формули Адамса-Башфорта. Ознайомитися детальніше з багатокроковими методами читач може в [13], р. 9, 9.1–9.3.

Розглянемо чотирикроковий екстраполяційний метод Адамса-Башфорта. Його часто застосовують у практичних розрахунках і, зазвичай, називають методом Адамса.

Для того, щоб одержати формули у зручному для обчислень вигляді, введемо допоміжну функцію

$$q(x) = h\,y'(x) = h\,f(x, y). \tag{8.25}$$

Позначимо $q_i = q(x_i) = h\,y_i' = h\,f(x_i, y_i)$, де $x_i = x_0 + i\,h$, $y_i = y(x_i)$. Нехай вже відомі наближені значення розв'язку даної задачі Коші $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$. Побудуємо інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад для функції $q(x)$ на відрізку $[x_{i-3}, x_i]$ з вузлами $x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$. Припускаючи, що функція $q(x)$ дорівнює своєму інтерполяційному многочлену, одержимо

$$q(x) = q(x_i + t\,h) = q_i + t\,\Delta q_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\,\Delta^2 q_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\,\Delta^3 q_{i-3}, \tag{8.26}$$

де $t = \dfrac{x - x_i}{h}$.

Наближене значення розв'язку $y_{i+1}$ у вузлі $x_{i+1}$ обчислимо за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta\,y_i. \tag{8.27}$$

Використовуючи вираз (8.26), одержимо формулу для знаходження $\Delta y_i$.

$$\Delta\,y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\frac{dx}{h}. \tag{8.28}$$

Зробивши заміну змінної $x = x_i + t\,h$, $dx = h\,dt$, отримаємо

$$\Delta\,y_i = \int_0^1 q(x_i + t\,h)\,dt = \int_0^1 \left( q_i + t\,\Delta q_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\,\Delta^2 q_{i-2} + \frac{t(t+1)\,(t+2)}{3!}\,\Delta^3 q_{i-3} \right) dt.$$

Обчисливши цей інтеграл, остаточно одержимо

$$\Delta\,y_i = q_i + \frac{1}{2}\,\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\,\Delta^3 q_{i-3}, \quad (i = 3, 4, ...). \tag{8.29}$$

Для того, щоб користуватися формулами (8.27) і (8.29), необхідно знати чотири значення розв'язку: $y_0, y_1, y_2, y_3$. Значення $y_1, y_2, y_3$ можна визначити, наприклад, методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності або за допомогою розкладу розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0$.

Метод Адамса, що визначається формулами (8.27) та (8.29), має четвертий порядок точності, тобто його похибка дорівнює $O(h^4)$. Якщо потрібно одержати значення розв'язку $y(x)$ з точністю до $10^{-m}$, то крок обчислень $h$ визначають з нерівності $h^4 < 10^{-m}$. На практиці це здійснюють так: слідкують за зміною третіх скінченних різниць, вибираючи крок $h$ настільки малим, щоб сусідні різниці $\Delta^3 q_i$ та $\Delta^3 q_{i+1}$ відрізнялися між собою не більше, ніж на одну-дві одиниці заданого розряду.

Якщо у формулі (8.26) врахувати скінченні різниці, наприклад, п'ятого порядку, то одержимо формулу

$$\Delta\,y_i = q_i + \frac{1}{2}\,\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\,\Delta^3 q_{i-3} + \frac{251}{720}\,\Delta^4 q_{i-4} + \frac{95}{288}\,\Delta^5 q_{i-5}, \tag{8.30}$$

$$(i = 5, 6, ...),$$

яка визначає шестикроковий метод Адамса-Башфорта.

Похибка цього методу дорівнює $O(h^6)$, але для його застосування потрібно знати шість значень розв’язку: $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$.

Зауважимо, що простіші формули Адамса-Башфорта одержують зі складніших шляхом простого відкидання членів із різницями вищих порядків.

Порівняємо методи Рунге-Кутта (8.17)-(8.19) та Адамса (8.27), (8.29) четвертого порядку точності. На кожному кроці $h$ за методом Рунге-Кутта потрібно чотири рази обчислювати значення функції $f(x,y)$. За методом Адамса на кожному кроці обчислюють тільки одне значення функції $f(x,y)$. Проте метод Рунге-Кутта можна застосувати, маючи тільки початкове значення $y_0$, і при цьому в будь-який момент можна змінити крок $h$, а метод Адамса вимагає знання значень розв’язку $y_0, y_1, y_2, y_3$ і не дозволяє змінювати крок. На практиці часто комбінують ці методи: на початковому етапі, застосовуючи метод Рунге-Кутта, обчислюють наближені значення розв’язку $y_1, y_2, y_3$, а потім, користуючись методом Адамса, знаходять наступні наближені значення розв’язку.

**Приклад 8.4.** Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса, обчислити наближені значення розв’язку задачі Коші $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1,2]$ з кроком $h = 0,2$.

**Розв’язування.** Наближені значення розв’язку даної задачі Коші $y_1 = 1,18323$, $y_2 = 1,34167$, $y_3 = 1,48329$ вже обчислені методом Рунге-Кутта у прикладі 8.3. Усі наступні значення знайдемо методом Адамса. Виконані обчислення запишемо у таблицю

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $q_i = hf(x_i, y_i)$ | $\Delta q_i$ | $\Delta^2 q_i$ | $\Delta^3 q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | 0,2 | | | |
| | | | | | -0,03097 | | |
| 1 | 0,2 | 1,18323 | | 0,16903 | | 0,01102 | |
| | | | | | -0,01995 | | <u>-0,00529</u> |
| 2 | 0,4 | 1,34167 | | 0,14908 | | <u>0,00573</u> | |
| | | | | | <u>-0,01422</u> | | -0,00266 |
| 3 | 0,6 | 1,48329 | 0,12815 | <u>0,13486</u> | | 0,00307 | |
| | | | | | -0,01115 | | -0,00089 |
| 4 | 0,8 | 1,61144 | 0,11842 | 0,12371 | | 0,00218 | |
| | | | | | -0,00897 | | |
| 5 | 1,0 | 1,72986 | 0,11083 | 0,11474 | | | |
| 6 | 1,2 | 1,84069 | | | | | |

Зробимо деякі пояснення до складеної таблиці. Заповнення таблиці починаємо зі стовпців $x_i$ та $y_i$, записавши в них відповідно значення вузлів і відомі значення розв'язку $y_0, y_1, y_2, y_3$. Потім обчислюємо значення $q_0, q_1, q_2, q_3$ та скінченні різниці першого порядку $\Delta q_0, \Delta q_1, \Delta q_2$, другого порядку $\Delta^2 q_0, \Delta^2 q_1$ та скінченну різницю третього порядку $\Delta^3 q_0$.

Застосувавши формулу (8.29) при $i=3$, отримаємо

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0,$$

тобто

$$\Delta y_3 = 0{,}13486 + \frac{1}{2}\left(-0{,}01422\right) + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00573 + \frac{3}{8}\left(-0{,}00529\right) = 0{,}12815.$$

Усі числа, які ми використали для обчислення $\Delta y_3$, в даній таблиці підкреслено.

З формули (8.27) при $i=3$ одержимо:

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1{,}48329 + 0{,}12815 = 1{,}61144.$$

Потім обчислимо $q_4$ та скінченні різниці $\Delta q_3, \Delta^2 q_2$ і $\Delta^3 q_1$. Підставляючи отримані значення у формулу (8.29) при $i=4$, одержимо величину $\Delta y_4$. З формули (8.27) при $i=4$ знайдемо $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ і т.д.

Таким чином, методом Адамса ми обчислили такі наближені значення розв'язку даної задачі Коші: $y_4 = 1{,}61144$; $y_5 = 1{,}72986$; $y_6 = 1{,}84069$.

## 8.5. Чисельні методи розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку

Нехай потрібно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x,y,z), \end{cases} \tag{8.31}$$

який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0. \tag{8.32}$$

Розв'язок задачі Коші (8.31), (8.32) можна знайти за допомогою таких же методів, як і для одного диференціального рівняння. Розглянемо застосування методів Рунге-Кутта і Адамса четвертого порядку точності. Таблицю значень функцій $y$ та $z$ будемо складати для значень аргументу $x$, які утворюють арифметичну прогресію:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,2,...).$$

Позначимо $y(x_i) = y_i$, $z(x_i) = z_i$.

За методом Рунге-Кутта послідовні значення шуканих функцій обчислюємо за формулами

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;\; z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \qquad (i = 0,1,2,...), \tag{8.33}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),\\ \Delta z_i &= \frac{1}{6}\left(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}\right), \end{aligned} \tag{8.34}$$

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= h\,f(x_i, y_i, z_i),\\ k_2^{(i)} &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2},\, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right),\\ k_3^{(i)} &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2},\, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right),\\ k_4^{(i)} &= h\,f\left(x_i + h,\, y_i + k_3^{(i)},\, z_i + l_3^{(i)}\right); \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned} l_1^{(i)} &= h\varphi(x_i, y_i, z_i),\\ l_2^{(i)} &= h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2},\, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right),\\ l_3^{(i)} &= h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2},\, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right),\\ l_4^{(i)} &= h\varphi\left(x_i + h,\, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}\right). \end{aligned} \tag{8.36}$$

Нехай методом Рунге-Кутта знайдено по три значення шуканих функцій:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),\;\; y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),\;\; y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h),$$
$$z_1 = z(x_1) = z(x_0 + h),\;\; z_2 = z(x_2) = z(x_0 + 2h),\;\; z_3 = z(x_3) = z(x_0 + 3h).$$

Для одержання наступних значень застосуємо метод Адамса.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} &F(x,y,z) = h\,f(x,y,z), &&\Phi(x,y,z) = h\varphi(x,y,z),\\ &F_i = F(x_i, y_i, z_i), &&\Phi_i = \Phi(x_i, y_i, z_i); \end{aligned} \tag{8.37}$$

$\Delta F_i,\ \Delta^2 F_i,\ \Delta^3 F_i,\ \Delta\Phi_i,\ \Delta^2\Phi_i,\ \Delta^3\Phi_i$ – скінченні різниці першого, другого та третього порядків функцій $F(x,y,z)$ і $\Phi(x,y,z)$.

Запишемо основні формули методу Адамса для системи диференціальних рівнянь:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \tag{8.38}$$

$$\Delta y_i = F_i + \frac{1}{2}\Delta F_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{i-3},$$
$$\Delta z_i = \Phi_i + \frac{1}{2}\Delta\Phi_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\Phi_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\Phi_{i-3},\ (i = 3,4,\ldots). \quad (8.39)$$

**Приклад 8.5.** Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса, обчислити значення розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}, \end{cases} \qquad y(0) = 1,\ z(0) = 2$$

на відрізку $[0;\, 1{,}2]$ з кроком $h = 0{,}2$.

**Розв'язування.** Перші три значення функцій $y(x)$ та $z(x)$ обчислимо методом Рунге-Кутта за формулами (8.33)-(8.36). Обчислимо спочатку значення $y_1$ та $z_1$. За умовою задачі

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 2,\ h = 0{,}2,\ f(x,y,z) = 1 - \frac{1}{z},\ \varphi(x,y,z) = \frac{1}{y-x}.$$

$$k_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot f(0;1;2) = 0{,}1,$$
$$l_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot \varphi(0;1;2) = 0{,}2,$$
$$k_2^{(0)} = 0{,}2 \cdot f\left(0{,}1;1{,}05;2{,}1\right) = 0{,}10476,$$
$$l_2^{(0)} = 0{,}2 \cdot \varphi\left(0{,}1;1{,}05;2{,}1\right) = 0{,}21053,$$
$$k_3^{(0)} = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;1{,}05238;2{,}10526) = 0{,}10500,$$
$$l_3^{(0)} = 0{,}2 \cdot \varphi(0{,}1;1{,}05238;2{,}10526) = 0{,}21000,$$
$$k_4^{(0)} = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;1{,}10500;2{,}21000) = 0{,}10950,$$
$$l_4^{(0)} = 0{,}2 \cdot \varphi(0{,}2;1{,}10500;2{,}21000) = 0{,}22099,$$
$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 2\cdot 0{,}10476 + 2\cdot 0{,}10500 + 0{,}10950) = 0{,}10484,$$
$$\Delta z_0 = \frac{1}{6}(0{,}2 + 2\cdot 0{,}21053 + 2\cdot 0{,}21000 + 0{,}22099) = 0{,}21034,$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}10484 = 1{,}10484,$$
$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 2 + 0{,}21034 = 2{,}21034.$$

Аналогічно обчислюємо значення $y_2, z_2$ та $y_3, z_3$. Результати обчислень наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

| $i$ | $j$ | $x$ | $y$ | $z$ | $k_j = hf(x,y,z)$ | $l_j = h\varphi(x,y,z)$ | $\Delta y$ | $\Delta z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0,1 | 0,2 | 0,10484 | 0,21034 |
| | 2 | 0,1 | 1,05 | 2,1 | 0,10476 | 0,21053 | | |
| | 3 | 0,1 | 1,05238 | 2,10526 | 0,10500 | 0,21000 | | |
| | 4 | 0,2 | 1,10500 | 2,21000 | 0,10950 | 0,22099 | | |
| 1 | 1 | 0,2 | 1,10484 | 2,21034 | 0,10952 | 0,22103 | 0,11390 | 0,23246 |
| | 2 | 0,3 | 1,15960 | 2,32086 | 0,11383 | 0,23267 | | |
| | 3 | 0,3 | 1,16175 | 2,32668 | 0,11404 | 0,23209 | | |
| | 4 | 0,4 | 1,21888 | 2,44243 | 0,11811 | 0,24424 | | |
| 2 | 1 | 0,4 | 1,21874 | 2,44280 | 0,11813 | 0,24428 | 0,12209 | 0,25691 |
| | 2 | 0,5 | 1,27780 | 2,56494 | 0,12203 | 0,25714 | | |
| | 3 | 0,5 | 1,27975 | 2,57137 | 0,12222 | 0,25649 | | |
| | 4 | 0,6 | 1,34096 | 2,69929 | 0,12591 | 0,26992 | | |
| 3 | | 0,6 | 1,34083 | 2,69971 | | | | |

Значення функцій $y(x)$ та $z(x)$ для $x_4 = 0,8,\ x_5 = 1,0,\ x_6 = 1,2$ обчислимо методом Адамса за формулами (8.37)-(8.39). За допомогою чисел $x_0, x_1, x_2, x_3$; $y_0, y_1, y_2, y_3$; $z_0, z_1, z_2, z_3$ визначимо значення $F_0, F_1, F_2, F_3, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ і складемо таблицю скінченних різниць величин $F$ та $\Phi$.

Таблиця 2

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta z_i$ | $F_i = hf(x_i, y_i, z_i)$ | $\Delta F_i$ | $\Delta^2 F_i$ | $\Delta^3 F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | | | 0,1 | | | |
| | | | | | | | 0,00952 | | |
| 1 | 0,2 | 1,10484 | 2,21034 | | | 0,10952 | | -0,00091 | |
| | | | | | | | 0,00861 | | $9 \cdot 10^{-5}$ |
| 2 | 0,4 | 1,21874 | 2,44280 | | | 0,11813 | | -0,00082 | |
| | | | | | | | 0,00779 | | $8 \cdot 10^{-5}$ |
| 3 | 0,6 | 1,34083 | 2,69971 | 0,12951 | 0,28391 | 0,12592 | | -0,00074 | |
| | | | | | | | 0,00705 | | $7 \cdot 10^{-5}$ |
| 4 | 0,8 | 1,47034 | 2,98362 | 0,13621 | 0,31378 | 0,13297 | | -0,00067 | |
| | | | | | | | 0,00638 | | |
| 5 | 1,0 | 1,60655 | 3,29740 | 0,14229 | 0,34676 | 0,13935 | | | |
| 6 | 1,2 | 1,74884 | 3,64416 | | | | | | |

Таблиця 2 (продовження)

| $i$ | $\Phi_i = h\varphi(x_i, y_i, z_i)$ | $\Delta\Phi_i$ | $\Delta^2\Phi_i$ | $\Delta^3\Phi_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,2 | | | |
| | | 0,02103 | | |
| 1 | 0,22103 | | 0,00222 | |
| | | 0,02325 | | <u>0,00022</u> |
| 2 | 0,24428 | | <u>0,00244</u> | |
| | | <u>0,02569</u> | | 0,00026 |
| 3 | <u>0,26997</u> | | 0,00270 | |
| | | 0,02839 | | 0,00028 |
| 4 | 0,29836 | | 0,00298 | |
| | | 0,03137 | | |
| 5 | 0,32973 | | | |

За формулами (8.39) при $i = 3$ обчислимо $\Delta y_3$ і $\Delta z_3$:

$$\begin{aligned} \Delta y_3 &= F_3 + \frac{1}{2}\Delta F_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 F_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 F_0, \\ \Delta z_3 &= \Phi_3 + \frac{1}{2}\Delta\Phi_2 + \frac{5}{12}\Delta^2\Phi_1 + \frac{3}{8}\Delta^3\Phi_0. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Усі значення, які потрібно підставляти у вирази (8.40), в таблиці 2 підкреслено.

Отже,

$$\Delta y_3 = 0,12592 + \frac{1}{2}\cdot 0,00779 + \frac{5}{12}(-0,00082) + \frac{3}{8}\cdot 0,00009 = 0,12951,$$

$$\Delta z_3 = 0,26997 + \frac{1}{2}\cdot 0,02569 + \frac{5}{12}\cdot 0,00244 + \frac{3}{8}\cdot 0,00022 = 0,28391.$$

За формулами (8.38) при $i = 3$ обчислимо

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1,34083 + 0,12951 = 1,47034,$$

$$z_4 = z_3 + \Delta z_3 = 2,69971 + 0,28391 = 2,98362.$$

Тепер, знаючи $y_4$ та $z_4$, обчислимо $F_4, \Phi_4$ і скінченні різниці $\Delta F_3,\ \Delta^2 F_2,\ \Delta^3 F_1,\ \Delta\Phi_3,\ \Delta^2\Phi_2,\ \Delta^3\Phi_1$.

Із формул (8.39) при $i = 4$ отримаємо

$$\Delta y_4 = F_4 + \frac{1}{2}\Delta F_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 F_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 F_1 = 0,13297 + \frac{1}{2}\cdot 0,00705 +$$

$$+ \frac{5}{12}(-0,00074) + \frac{3}{8}\cdot 0,00008 = 0,13621,$$

$$\Delta z_4 = \Phi_4 + \frac{1}{2}\Delta\Phi_3 + \frac{5}{12}\Delta^2\Phi_2 + \frac{3}{8}\Delta^3\Phi_1 = 0,29836 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 0,02839 + \frac{5}{12}\cdot 0,00270 + \frac{3}{8}\cdot 0,00026 = 0,31378.$$

Отже, $y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 1,60655$; $z_5 = z_4 + \Delta z_4 = 3,29740$.

Аналогічно обчислимо

$$\Delta y_5 = 0,13935 + \frac{1}{2}\cdot 0,00638 + \frac{5}{12}(-0,00067) + \frac{3}{8}\cdot 0,00007 = 0,14229,$$

$$\Delta z_5 = 0,32973 + \frac{1}{2}\cdot 0,03137 + \frac{5}{12}\cdot 0,00298 + \frac{3}{8}\cdot 0,00028 = 0,34676.$$

$$y_6 = y_5 + \Delta y_5 = 1,74884, \qquad z_6 = z_5 + \Delta z_5 = 3,64416.$$

Отже, ми одержали значення розв’язку даної задачі Коші на відрізку $[0; 1,2]$ з кроком $h = 0,2$. В таблиці 2 вони записані у другому, третьому та четвертому стовпцях. Зауважимо, що додаткові дослідження, які тут не наведено, дають підставу стверджувати, що в одержаних результатах чотири знаки після коми вірні.

## 8.6. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти чотири значення розв’язку задачі Коші з кроком $h$: а) методом Ейлера; б) методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Знайти точний розв’язок та обчислити похибку результатів а) та б) в точці $x_4$.

   1.1. $y' = x - y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.2. $y' = 2xy\cos(x^2)$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.3. $y' = y\cos x$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.4. $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.5. $y' + ychx = 0$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.6. $y' = y^2 + \dfrac{y}{x}$; $y(1) = 1$; $h = 0,1$;

   1.7. $y' = x^2 + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.8. $y' = 2y - 3$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

   1.9. $y' = y - x$; $y(0) = 1,5$; $h = 0,1$;

   1.10. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$; $h = 0,1$.

2. Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса четвертого порядку точності, обчислити значення розв'язку задачі Коші на відрізку $[a; b]$ з кроком $h$.

2.1. $y' = \sqrt[3]{x^2 + 3y}$; $y(2) = 3$; $[2; 2,6]$; $h = 0,1$;

2.2. $y' = 1 + x + y^2$; $y(0) = 1,2$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.3. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0,5$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.4. $4y' = y^2 + 4x^2$; $y(0) = 1,1$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.5. $y' = (x + y)(1 - xy)$; $y(0) = 1$; $[0; 0,6]$; $h = 0,1$;

2.6. $y' = x + y^2$; $y(0) = 0,5$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.7. $y' = \dfrac{2,5}{x + y}$; $y(1) = 1$; $[1; 1,6]$; $h = 0,1$;

2.8. $y' = x + \cos\dfrac{y}{2}$; $y(0,5) = 1$; $[0,5; 1,1]$; $h = 0,1$;

2.9. $y' = x^2 + e^{-y}$; $y(1) = 0,5$; $[1; 1,6]$; $h = 0,1$;

2.10. $y' = 2x + \ln y$; $y(0,5) = 1,5$; $[0,5; 1,7]$; $h = 0,2$.

# РОЗДІЛ 9

# МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

## 9.1. Основні поняття

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого в деякому розумінні варіанта з усіх можливих. У процесі розв'язування задачі оптимізації зазвичай потрібно визначити оптимальні значення деяких параметрів, які характеризують дану задачу. При розв'язуванні інженерних задач ці параметри називають проектними параметрами, а в економічних задачах – параметрами плану. Кількість n проектних параметрів $x_1, x_2, ... x_n$ характеризує вимірність і ступінь складності задачі оптимізації.

Вибір оптимального розв'язку здійснюють за допомогою деякої функції від проектних параметрів. Цю функцію називають цільовою. В процесі розв'язування задачі оптимізації потрібно знайти такі значення проектних параметрів, при яких цільова функція має найменше або найбільше значення. Цільову функцію можна записати у вигляді

$$u = f\ (x_1, x_2, ..., x_n). \tag{9.1}$$

Прикладами цільової функції є міцність або маса конструкції, потужність обладнання, об'єм випуску продукції, величина прибутку та інше. У випадку одного проектного параметра $(n = 1)$ цільова функція (9.1) є функцією однієї змінної і її графік – це деяка лінія на площині. При $n = 2$ цільова функція є функцією двох змінних і її графіком є деяка поверхня у тривимірному просторі.

Цільову функцію не завжди визначають за формулою. Інколи її можна задавати таблицею. Проте в усіх випадках вона повинна бути однозначною функцією проектних параметрів.

Задачі оптимізації можна поділити на два типи: безумовні та умовні. Безумовна задача оптимізації полягає у знаходженні максимуму або мінімуму функції (9.1) та визначенні відповідних значень аргументів $x_1, x_2, ... x_n$ на деякій множині $G$ $n$-вимірного простору. Зазвичай розглядають задачі мінімізації; задачі про пошук максимуму зводять до задач мінімізації шляхом зміни знаку цільової функції на протилежний.

Умовні задачі оптимізації або задачі з обмеженнями – це такі задачі, при формулюванні яких задають деякі умови (обмеження) на множині $G$. Ці обмеження задають сукупністю деяких функцій від проектних параметрів, які задовольняють рівняння або нерівності. Кількість обмежень може бути довільною.

Обмеження-рівності записують у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\
&\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

Аналогічно вводять обмеження-нерівності

$$
\begin{aligned}
&a_1 \le \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_1, \\
&a_2 \le \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_k \le \varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_k.
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Методи розв'язування задач оптимізації з обмеженнями розглядають в одному з розділів прикладної математики – математичному програмуванні.

## 9.2. Одновимірна оптимізація. Метод золотого перерізу

Одновимірну задачу оптимізації формулюють так: знайти найменше або найбільше значення цільової функції $y = f(x)$, заданої на множині $G$, і визначити значення проектного параметра $x \in G$, при якому цільова функція приймає екстремальне значення. Існування розв'язку поставленої задачі випливає із наступної теореми.

**Теорема Вейєрштрасса.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку найбільше та найменше значення, тобто на відрізку $[a, b]$ існують такі точки $x_1$ і $x_2$, що для будь-якого $x \in [a, b]$ справджуються нерівності

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана аналітично і вона диференційовна на відрізку $[a, b]$.

Як відомо з курсу математичного аналізу, функція $y = f(x)$ досягає свого найбільшого та найменшого значень або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Тому для визначення найменшого та найбільшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ потрібно обчислити її значення на кінцях відрізка та в усіх критичних точках, які містяться на даному відрізку, і з одержаних значень вибрати найменше та найбільше. Часто рівняння $f'(x) = 0$ для знаходження критичних точок необхідно розв'язувати числовим методом.

Якщо цільова функція задана таблично, то методи математичного аналізу використати неможливо. Тому в задачах оптимізації застосовують методи пошуку, які ґрунтуються на обчисленні значень цільової функції в окремих точках і виборі серед них найменшого або найбільшого значень. Одним із найефективніших методів пошуку, в якому при обмеженій кількості обчислень значень функції $f(x)$ досягається найкраща точність, є метод золотого перерізу. Він полягає в побудові послідовності відрізків $[a_0, b_0], [a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots$, які стягуються в точку $\xi$ мінімуму функції $f(x)$. На кожному кроці, крім першого, значення функції $f(x)$ обчислюється тільки один раз. Цю точку називають золотим перерізом, її вибирають спеціальним способом.

Золотим перерізом називають такий поділ відрізка $[a, b]$ точкою $c$ на дві нерівні частини, при якому відношення довжини більшої частини відрізка до довжини всього відрізка дорівнює відношенню довжини меншої частини до довжини більшої частини відрізка.

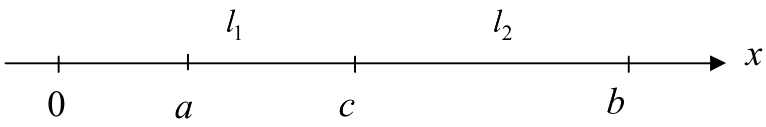


Рисунок 10

Нехай довжина відрізка $[a, b]$ дорівнює $l$, довжина меншої частини відрізка дорівнює $l_1$, довжина більшої частини – $l_2$.

Отже,

$$\frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l_2}. \tag{9.4}$$

Звідси $l_2^2 = l_1 l$; $l_2^2 = l_1(l_1 + l_2)$;

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \frac{l_1}{l_2} - 1 = 0. \tag{9.5}$$

Оскільки $l_1 > 0,\ l_2 > 0$, то з рівняння (9.5) одержуємо, що $\dfrac{l_1}{l_2} \approx 0{,}618.$

З умови (9.4) випливає, що $l_2 = 0{,}618l$. Тоді $l_1 = 0{,}382l$ і $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{0{,}382}{0{,}618}$.

Знайдемо значення $c$ як координату точки, яка ділить відрізок $[a, b]$ у відношенні $\lambda = \dfrac{0{,}382}{0{,}618}$; $c = \dfrac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Звідси

$$c = 0{,}618a + 0{,}382b. \tag{9.6}$$

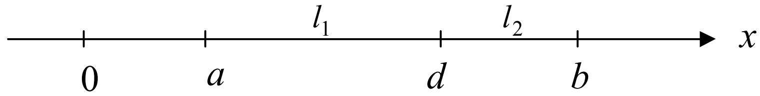


Рисунок 11

Якщо $l_1 > l_2$, як зображено на рис.11, то аналогічно можна визначити:

$$d = 0,382\,a + 0,618\,b. \tag{9.7}$$

Кожна з точок $c$ і $d$ здійснює золотий переріз відрізка $[a, b]$. Крім цього, точка $c$ здійснює золотий переріз відрізка $[a, d]$, а точка $d$ – золотий переріз відрізка $[c, b]$.

Розглянемо задачу мінімізації функції $f(x)$. Припустимо, що всередині відрізка $[a, b]$ існує тільки один мінімум функції $f(x)$. Обчислимо значення функції в точках $c$ та $d$ і порівняємо їх між собою.

Якщо $f(c) < f(d)$, то приймаємо

$$a_1 = a;\;\; b_1 = d;\;\; d_1 = c;\;\; c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1. \tag{9.8}$$

Якщо $f(c) \ge f(d)$, то приймаємо

$$a_1 = c;\;\; b_1 = b;\;\; c_1 = d;\;\; d_1 = 0,382a_1 + 0,618b_1. \tag{9.9}$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо формули для визначення координат точок поділу $c_k$ і $d_k$ $(c_k < d_k)$ на $(k+1)$-му кроці мінімізації

$$\begin{aligned} c_k &= 0,618\,a_k + 0,382\,b_k, \\ d_k &= 0,382\,a_k + 0,618\,b_k. \end{aligned} \tag{9.10}$$

При цьому, якщо $f(c_k) < f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = d_k, \quad d_{k+1} = c_k\,. \tag{9.11}$$

Якщо $f(c_k) \ge f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = c_k, \quad b_{k+1} = b_k, \quad c_{k+1} = d_k\,. \tag{9.12}$$

При цьому довжина відрізка $[a_k, b_k]$

$$h_k = b_k - a_k = 0,618^k\,(b - a). \tag{9.13}$$

Процес мінімізації закінчують при $h_k < \varepsilon$, де $\varepsilon$ – задана абсолютна похибка. Проектний параметр мінімізації $\xi$ задовольняє умову $a_k < \xi < b_k$. За наближене значення параметра $\xi$ можна взяти

$$\xi^* = \frac{a_k + b_k}{2}. \tag{9.14}$$

**Приклад 9.1.** Визначити найменше значення функції $f(x) = e^{-x} - 2\cos x$ на відрізку $[0, 1]$. Точку $\xi$, в якій дана функція приймає це найменше значення, знайти з абсолютною похибкою $\varepsilon \le 0,01$.

**Розв'язування.** Перевіримо, чи приймає дана функція своє найменше значення на відрізку $[0, 1]$ в деякій внутрішній точці $\xi$ цього відрізка. Знайдемо критичні точки функції $f(x)$, які містяться на відрізку $[0, 1]$. $f'(x) = -e^{-x} + 2\sin x$. Оскільки $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1,315$, то існує принаймні одна така точка $\xi$, $0 < \xi < 1$, що $f'(\xi) = 0$.

Можна переконатися, наприклад, графічним способом, що така точка $\xi$ на відрізку $[0,1]$ єдина. Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < \xi$ і $f'(x) > 0$ при $x > \xi$, то в точці $x = \xi$ функція $f(x)$ має мінімум. Отже, функція $f(x)$ приймає в точці $x = \xi$ своє найменше значення на відрізку $[0,1]$.

Позначимо $\gamma_k = f(c_k) - f(d_k)$ ($k$ = 0,1,2,…). За умовою задачі $a_0 = a = 0$, $b_0 = b = 1$. Застосовуючи формули (9.6), (9.7), отримаємо $c = c_0 = 0{,}382$, $d = d_0 = 0{,}618$. Обчислюємо $f(c_0) = -1{,}17335$, $f(d_0) = -1{,}09106$. Оскільки $f(c_0) < f(d_0)$, тобто $\gamma_0 < 0$, то $\xi \in [0; 0{,}618]$ Згідно з формулою (9.8) приймаємо $a_1 = 0$, $b_1 = 0{,}618$, $d_1 = 0{,}382$ і обчислюємо $c_1 = 0{,}618a_1 + 0{,}382b_1 = 0{,}236$. Обчислюємо $f(c_1) = -1{,}15478$. Оскільки $f(c_1) > f(d_1)$, тобто $\gamma_1 > 0$, то $\xi \in [0{,}236; 0{,}618]$. Згідно з формулою (9.12) приймаємо $a_2 = 0{,}236$, $b_2 = 0{,}618$, $c_2 = 0{,}382$ і обчислюємо $d_2 = 0{,}382a_2 + 0{,}618b_2 = 0{,}472$. Подальші обчислення проводимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, як тільки справдиться нерівність $h_k = b_k - a_k < 0{,}01$.

Результати обчислень доцільно записати у таблицю.

| $k$ | $a_k$ | $b_k$ | $c_k$ | $d_k$ | $f(c_k)$ | $f(d_k)$ | Знак $\gamma_k$ | $h_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0,382 | 0,618 | -0,17335 | -1,09106 | – | 1 |
| 1 | 0 | 0,618 | 0,236 | 0,382 | -1,15478 | -1,17335 | + | 0,618 |
| 2 | 0,236 | 0,618 | 0,382 | 0,472 | -1,17335 | -1,15757 | – | 0,382 |
| 3 | 0,236 | 0,472 | 0,326 | 0,382 | -1,17286 | -1,17335 | + | 0,236 |
| 4 | 0,326 | 0,472 | 0,382 | 0,416 | -1,17335 | -1,16975 | – | 0,146 |
| 5 | 0,326 | 0,416 | 0,360 | 0,382 | -1,17412 | -1,17335 | – | 0,090 |
| 6 | 0,236 | 0,382 | 0,347 | 0,360 | -1,17399 | -1,17412 | + | 0,056 |
| 7 | 0,347 | 0,382 | 0,360 | 0,369 | -1,17412 | -1,17395 | – | 0,035 |
| 8 | 0,347 | 0,369 | 0,355 | 0,360 | -1,174120 | -1,174117 | – | 0,022 |
| 9 | 0,347 | 0,360 | 0,352 | 0,355 | -1,174090 | -1,174120 | + | 0,013 |
| 10 | 0,352 | 0,360 | | | | | | 0,008 |

Оскільки $h_{10} = 0{,}008 < 0{,}01$, то процес мінімізації закінчено. За наближене значення $\xi$ приймаємо $\xi^* = \dfrac{0{,}352 + 0{,}360}{2} = 0{,}356$; $f_{\min} = f(0{,}356) = -1{,}174124$.

## 9.3. Багатовимірні задачі оптимізації

У попередньому параграфі ми розглянули одновимірну задачу оптимізації, в якій цільова функція залежить лише від одного аргументу. Проте в більшості реальних задач оптимізації цільова функція залежить від багатьох проектних параметрів.

Щоб знайти мінімум диференційовної функції кількох змінних $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, потрібно дослідити її значення в критичних точках, які визначаються системою рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad ..., \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{9.15}$$

Проте можуть виникнути значні труднощі при розв'язуванні нелінійної системи (9.15). Крім того, в багатьох випадках цільова функція не задається аналітично, а відомий тільки спосіб для визначення значень цільової функції в довільних точках області $G$ за допомогою деякого алгоритму чи вимірювання. Задача мінімізації полягає в наближеному визначенні найменшого значення функції в цій області, якщо відомі її значення в окремих точках. Можна ввести дискретну множини точок (вузлів), поділивши інтервали зміни параметрів $x_1, x_2, ..., x_n$ на частини з кроками $h_1, h_2, ..., h_n$, обчислити значення цільової функції в одержаних вузлах і серед цих значень знайти найменше. Але в багатовимірних задачах оптимізації цей метод загального пошуку потребує дуже великого обсягу обчислень. Тому до цих задач застосовують чисельні методи, які ґрунтуються на цілеспрямованому пошуку. Розглянемо один із таких методів, який називають методом градієнтного спуску. З курсу математичного аналізу відомо, що напрям найшвидшого зростання функції $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ визначається її градієнтом

$$grad u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Отже, напрям, який є протилежним до градієнтного, визначає напрям найшвидшого спадання функції.

Розглянемо ідею методу градієнтного спуску. Вибираємо деяку початкову точку й обчислюємо градієнт даної функції в цій точці. Робимо крок у напрямку, протилежному до градієнтного, і приходимо в точку, значення функції в якій зазвичай менше від початкового. Якщо значення функції не змінилося або навіть зросло, то потрібно зменшити крок. У новій точці процедуру повторюємо: обчислюємо градієнт і знову робимо крок у протилежному до нього напрямку. Процес продовжується до одержання найменшого значення цільової функції. Пошук закінчується тоді, коли рух із отриманої точки з будь-яким кроком призводить до зростання значення цільової функції. Зауважимо, що коли мінімум функції досягається всередині даної області, то в цій точці градієнт даної функції дорівнює нулю; це також є сигналом про закінчення процесу мінімізації.

У методі градієнтного спуску потрібно на кожному кроці оптимізації обчислювати градієнт цільової функції. Тому доцільно зменшити кількість таких кроків. Це досягається в деяких методах, які є модифікаціями методу градієнтного спуску. Одним із них є метод найшвидшого спуску. Він полягає в тому, що після визначення у початковій точці напрямку, протилежного до градієнтного, в цьому напрямку роблять не один крок, а рухаються доти, доки цільова функція спадає, досягаючи в деякій точці мінімуму. В цій точці знову визначають напрям спуску, тобто напрям, протилежний до градієнтного, і шукають нову точку мінімуму цільової функції і т. д. У цьому методі спуск проводять набагато більшими кроками і градієнт обчислюють у меншій кількості точок. Зауважимо, що метод найшвидшого спуску зводить багатовимірну задачу оптимізації до послідовності одновимірних задач на кожному кроці оптимізації, при цьому напрям одновимірної оптимізації визначають градієнтом цільової функції.

Розглянемо, наприклад, двічі неперервно диференційовну в області $G$ функцію двох змінних $u = f\left(x_1, x_2\right)$. Нехай в деякій внутрішній точці $M^*\left(x_1^*, x_2^*\right)$ області $G$ ця функція має найменше значення. Припустимо, що ми знайшли точку $M_k\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$, яка є $k$-тим наближенням до точки $M^*\left(x_1^*, x_2^*\right)$. Обчислимо градієнт функції у точці $M_k$

$$grad\, f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) = \left(\frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\right)$$

і будемо рухатися у напрямку вектора $\overrightarrow{M_k M} = -\alpha\, grad\, f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, де $\alpha$ – деяке додатне число.

Якщо точка $M$ має координати $x_1$ та $x_2$, то $x_1 - x_1^{(k)} = -\alpha \dfrac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}$, $x_2 - x_2^{(k)} = -\alpha \dfrac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}$.

Звідси отримаємо

$$x_1 = x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2 = x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \qquad (9.16)$$

Розглянемо функцію

$$F(\alpha) = f\left(x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\right) \qquad (9.17)$$

і знайдемо значення $\alpha = \alpha^{(k)}$, яке мінімізує функцію $F(\alpha)$.

Тоді з формул (9.16) знайдемо наближення

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \qquad (9.18)$$

і процес обчислень продовжимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, якщо, наприклад,

$$\max_i \left| \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \tag{9.19}$$

де $\varepsilon$ – задана абсолютна похибка.

Для випадку функції $n$ змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Функція $F(\alpha)$ матиме вигляд

$$F(\alpha) = f\left(\vec{x}^{(k)} - \alpha\ grad\, f\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right), \quad \alpha > 0. \tag{9.20}$$

Формули (9.18) запишемо так:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} grad\, f\left(\vec{x}^{(k)}\right), \quad (k = 0, 1, 2, ...). \tag{9.21}$$

## 9.4. Застосування методу найшвидшого спуску до задачі мінімізації квадратичної функції

Нехай у деякому околі критичної точки $M^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є двічі неперервно диференційовною. Як відомо з курсу математичного аналізу, якщо в цій точці диференціал другого порядку $d^2u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від диференціалів $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, то у цій критичній точці функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має мінімум (максимум).

Зауважимо, що квадратичною формою від змінних $t_1, t_2, ..., t_n$ називають функцію

$$\Phi(t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{9.22}$$

Числа $a_{ij}$ називають коефіцієнтами квадратичної форми, а матрицю з цих коефіцієнтів $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матрицею квадратичної форми. Сформулюємо критерій знаковизначеності квадратичної форми – критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма (9.22) була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{9.23}$$

При виконанні умов (9.23) матрицю $A$ також називають додатно визначеною.

Для того, щоб квадратична форма (9.22) була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \; ...., \; (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (9.24)$$

При виконанні нерівностей (9.24) матрицю $A$ також називають від'ємно визначеною.

Метод найшвидшого спуску досить просто реалізується для квадратичної функції вигляду

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}), \quad (9.25)$$

де $A$ – симетрична додатно визначена матриця порядку $n$, $\vec{b}$ та $\vec{x}$ – вектори з векторного простору $E_n, \left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ – скалярний добуток векторів з $E_n$.

Можна довести, що ця функція має єдиний екстремум, а саме мінімум. У даному випадку

$$grad \; f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, \quad (9.26)$$

величину $\alpha^{(k)}$ визначають за формулою

$$\alpha^{(k)} = \frac{(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}{(A(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}. \quad (9.27)$$

**Приклад 9.2.** Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$ з точністю $\varepsilon = 0,02$, взявши за початкове наближення вектор $\vec{x}^{(0)}$, якщо $A$ – симетрична додатно визначена матриця третього порядку, $(\vec{x}, \vec{y})$ – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язування.** За формулою (9.26) при $k = 0$ обчислимо $grad \; f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$:

$$grad \; f(\vec{x}^{(0)}) = A\vec{x}^{(0)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,8 + 1,3 - 1,2 \\ 0,6 + 5,2 + 2,4 \\ -0,6 + 2,6 + 7,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 8,2 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

Формулу (9.27) запишемо у вигляді $\alpha^{(k)} = \dfrac{\gamma^{(k)}}{\eta^{(k)}}$.

$$\gamma^{(0)} = (A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = (-0,1)^2 + 0,2^2 + 0,2^2 = 0,09.$$

$$A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 + 0,2 - 0,2 \\ -0,1 + 0,8 + 0,4 \\ 0,1 + 0,4 + 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 1,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(0)} = (A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = -0,1(-0,3) + 0,2 \cdot 1,1 + 0,2 \cdot 1,7 = 0,59.$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{\gamma^{(0)}}{\eta^{(0)}} = \frac{0,09}{0,59} = 0,1525.$$

За формулою (9.21) при $k = 0$ знаходимо перше наближення:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \alpha^{(0)} grad\, f\left(\vec{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - 0,1525 \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix}.$$

Наступні обчислення виконуємо аналогічно. Знаходимо $grad\, f(\vec{x}^{(1)}) = A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}$:

$$grad\, f\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix}.$$

$$A\left(A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0667 \\ -0,0542 \\ -0,2670 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(1)} = (-0,0544)^2 + 0,0322^2 + (-0,0643)^2 = 0,00813.$$

$$\eta^{(1)} = -0,0544(-0,0667) + 0,0322(-0,05442) - 0,0643(-0,2670) = 0,01905.$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)}}{\eta^{(1)}} = \frac{0,00813}{0,01905} = 0,4268.$$

Друге наближення:

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - \alpha^{(1)} grad\, f\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - 0,4268 \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix}.$$

Знову обчислюємо $grad\ f\left(\vec{x}^{(2)}\right)$:

$$grad\, f\left(\vec{x}^{(2)}\right) = A\vec{x}^{(2)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ 0,0545 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(2)} = (-0,0256)^2 + 0,0555^2 + 0,0545^2 = 0,00671$$

$$A(A\vec{x}^{(2)}-\vec{b})=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0,0256\\0,0555\\0,0545\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0758\\0,3054\\0,4636\end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(2)}=-0,0256(-0,0758)+0,0555\cdot 0,3054+0,0545\cdot 0,4636=0,04416.$$

$$\alpha^{(2)}=\frac{\gamma^{(2)}}{\eta^{(2)}}=\frac{0,00671}{0,04416}=0,1519.$$

Третє наближення:

$$\vec{x}^{(3)}=\vec{x}^{(2)}-\alpha^{(2)}grad\, f(\vec{x}^{(2)})=\begin{pmatrix}0,6385\\1,2558\\1,1969\end{pmatrix}-0,1519\begin{pmatrix}-0,0256\\0,0555\\-0,0545\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6424\\1,2474\\1,1886\end{pmatrix}.$$

Обчислюємо $grad\, f\left(\vec{x}^{(3)}\right)$:

$$grad\, f\left(\vec{x}^{(3)}\right)=A\vec{x}^{(3)}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6424\\1,2474\\1,1886\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0140\\0,0092\\0,0162\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\max\limits_i\left|\dfrac{\partial f(x_1^{(3)},\,x_2^{(3)},\,x_3^{(3)})}{\partial x_i}\right|=0,0162<0,02,$ то обчислення закінчуємо.

Знайдемо найменше значення функції, яке дорівнює $f\left(\vec{x}^{(3)}\right)$.

$$f(\vec{x}^{(3)})=\frac{1}{2}\,(A\vec{x}^{(3)},\,\vec{x}^{(3)})-(\vec{b},\vec{x}^{(3)}).$$

$$A\vec{x}^{(3)}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6424\\1,2474\\1,1886\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,9860\\8,0092\\8,9838\end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{x}^{(3)})=\frac{1}{2}(1,9860\cdot 0,6424+8,0092\cdot 1,2474+8,9838\cdot 1,1886)-$$

$$-(2\cdot 0,6424+8\cdot 1,2474+9\cdot 1,1886)=\frac{1}{2}\cdot 21,9446-21,9614=-10,9891.$$

Отже, $f_{\min}=-10,9891$ при $x_1=0,6424,\ x_2=1,2474,\ x_3=1,1886.$

## 9.5. Задачі лінійного програмування. Геометричний метод розв’язування задач лінійного програмування з двома змінними

Важливим розділом математичного програмування є лінійне програмування, що вивчає задачі оптимізації, в яких цільова функція є лінійною функцією проектних параметрів, а обмеження задають у вигляді лінійних рівнянь та нерівностей.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування можна подати в такому вигляді: знайти такі числові значення невід’ємних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq< b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq< b_2, \\ &.............................................. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq< b_m \end{aligned} \qquad (9.28)$$

і для яких цільова функція

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (9.29)$$

досягає екстремуму (мінімуму або максимуму).

Невід’ємні значення $x_1 = \gamma_1,\ x_2 = \gamma_2, ..., x_n = \gamma_n$, які задовольняють систему лінійних обмежень (9.28), називають допустимим розв’язком задачі лінійного програмування. Допустимий розв’язок, для якого цільова функція (9.29) досягає екстремуму, називають оптимальним розв’язком.

Канонічна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &.............................................. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (9.30)$$

і умову невід’ємності

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, ...,\ \ x_n \geq 0, \qquad (9.31)$$

для яких цільова функція (9.29) досягає мінімуму.

Нерівності різних знаків системи (9.28) завжди можна звести до нерівностей одного знака множенням їх обох частин на $-1$, так що завжди розглядають нерівності одного знаку $(\geq$ або $\leq)$.

Стандартна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ &.............................................. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{aligned} \qquad (9.32)$$

і умову невід’ємності (9.31), для яких цільова функція (9.29) досягає мінімуму.

Від стандартної форми задачі мінімізації можна перейти до відповідної їй канонічної форми і навпаки.

У випадку двох змінних задачі лінійного програмування можна розв’язувати геометричним методом. Як відомо, рівняння $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ визначає на площині в декартовій системі координат пряму лінію. Якщо $b_1 = 0$, то відповідна пряма проходить через початок координат. Нерівність

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ визначає в декартовій системі півплощину з граничною прямою $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Другу півплощину визначає нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1$.

Розглянемо систему $m$ лінійних нерівностей з двома змінними

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m. \end{aligned} \qquad (9.33)$$

Кожна з нерівностей системи (9.33) визначає півплощину. Перетин цих $m$ півплощин визначає множину усіх розв'язків системи (9.33). Нас цікавить множина невід'ємних розв'язків, тобто тих, які містяться в I чверті координатної площини. Можна довести, що для двовимірного випадку множина невід'ємних розв'язків системи (9.33) є многокутною областю $G$. Вона може бути як обмеженою, так і необмеженою і навіть порожньою (якщо система нерівностей суперечлива). Ця область є опуклою, тобто будь-які дві її точки можна з'єднати відрізком, усі точки якого належать області $G$.

Опорною прямою називають пряму, яка має з областю принаймні одну спільну точку і при цьому вся область розміщена з одного боку від цієї прямої.

Нехай задана лінійна цільова функція двох змінних $u = c_1x_1 + c_2x_2$ і потрібно серед допустимих розв'язків $(x_1, x_2) \in G$ знайти такий розв'язок, при якому цільова функція $u$ приймає найменше або найбільше значення.

Напрям найшвидшого зростання функції $u = c_1x_1 + c_2x_2$ визначається її градієнтом $grad\ u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$. Напрям, протилежний до градієнтного, визначає напрям найшвидшого спадання цієї функції.

Припустимо, що цільова функція $u$ дорівнює деякому сталому значенню $c$. Це стале значення цільова функція $u$ приймає в усіх точках прямої

$$c_1x + c_2x_2 = c, \qquad (9.34)$$

яка перпендикулярна до вектора $grad\,u$ і її називають лінією рівня функції $u$.

При переміщенні цієї прямої паралельно самій собі в напрямі вектора $grad\,u$ цільова функція $u$ буде зростати, а при переміщенні прямої в протилежному напрямі – спадати.

Побудуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, яка проходить через початок координат. Будемо переміщувати цю лінію рівня паралельно самій собі в напрямі вектора $grad\,u$ при знаходженні найбільшого значення цільової функції в області допустимих значень $G$ або в напрямі вектора $-grad\,u$ при знаходженні найменшого значення цільової функції. Точки, які є спільними для лінії рівня та області $G$ за умови, що лінія рівня стає опорною прямою, будуть оптимальними.

Таким чином, оптимізація лінійної цільової функції $u$ на многокутнику допустимих розв'язків відбувається в точках перетину цього многокутника з опорними прямими, які відповідають даній цільовій функції. При цьому перетин може бути в одній точці (вершині многокутника) або в нескінченній множині точок (на стороні многокутника).

**Приклад 9.3.** Знайти такі значення змінних $x_1, x_2$, які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 &\geq 12, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 7, \\ x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,&\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

і при яких цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ досягає найменшого та найбільшого значень.

**Розв'язування.** Побудуємо прямі

$$8x_1 + 5x_2 = 12, \quad (1)$$
$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \ (2)$$
$$x_1 + x_2 = 7, \ (3)$$
$$x_2 = 1, \ (4)$$

та зобразимо область $G$ допустимих розв'язків даної задачі (чотирикутник $ABDE$).

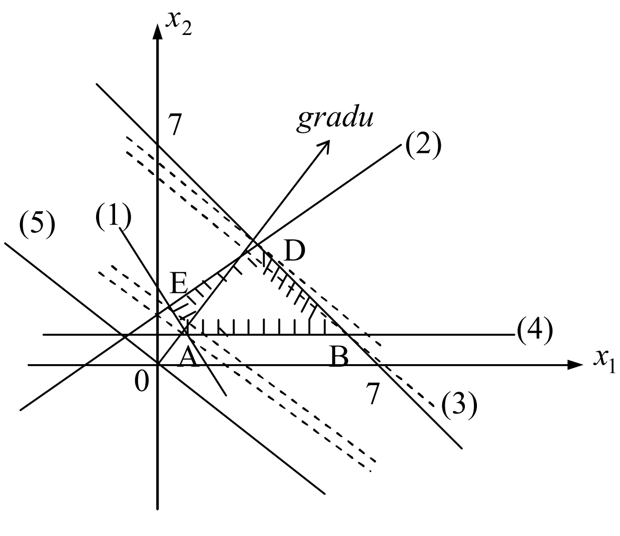


Рисунок 12

Побудуємо лінію рівня (5) $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, та вектор $grad\ u = (2, 3)$. Будемо переміщувати пряму $2x_1 + 3x_2 = 0$ паралельно самій собі в напрямі градієнта функції $u$. Оскільки в цьому напрямі цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ зростає, то найменшого значення в області допустимих розв'язків $G$ вона досягає у вершині $A$, а найбільшого – у вершині $D$.

Щоб знайти координати точок $A$ та $D$, розв'яжемо дві системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 &= 12, \\ x_2 &= 1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 6, \\ x_1 + x_2 &= 7. \end{aligned}$

З першої системи одержимо $x_1 = \dfrac{7}{8},\ x_2 = 1,$ тобто $A\left(\dfrac{7}{8},\ 1\right)$; з другої – $x_1 = 3,\ x_2 = 4,$ тобто $D\ (3,\ 4)$.

Отже, найменше значення цільової функції

$$u_{\min} = 2 \cdot \frac{7}{8} + 3 = 4{,}75\,,$$

а найбільше значення

$$u_{\max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

**Зауваження.** Якщо поставимо задачу про екстремум, наприклад, цільової функції $u_1 = -2x_1 + 3x_2$ при тих самих обмеженнях на область допустимих значень, то за допомогою аналогічних міркувань можна пересвідчитися, що мінімального значення функція $u_1$ набуде у вершині $B$, а максимального – в будь-якій точці відрізка $ED$.

## 9.6. Симплексний метод

Геометричний метод розв’язування задач лінійного програмування можна застосувати й у тривимірному просторі, проте це застосування пов’язане з такими громіздкими побудовами, що стає практично неможливим.

Розглянемо симплексний метод, який дає можливість розв’язувати задачі лінійного програмування з будь-якою скінченною кількістю змінних. Покажемо застосування цього методу до випадку, коли обмеження (9.28) задаються у вигляді нерівностей одного знаку $\le$ і усі праві частини нерівностей $b_i \ge 0\ \ (i = 1, 2, ..., m)$. Для спрощення викладу приймемо, наприклад, $m = 3,\ n = 4$.

Отже, розглянемо задачу мінімізації: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, x_3, x_4$, які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &\le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &\le b_3, \end{aligned} \tag{9.35}$$

умову невід’ємності

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \tag{9.36}$$

і для яких цільова функція

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \tag{9.37}$$

досягає мінімуму.

Систему лінійних нерівностей (9.35) перетворимо у систему лінійних рівнянь, додавши до лівої частини кожної нерівності по одній невід'ємній змінній $x_5, x_6, x_7$ :

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + x_5 = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + x_6 = b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + x_7 = b_3. \end{aligned} \qquad (9.38)$$

Змінні $x_5, x_6, x_7$ називають додатковими змінними. В цільову функцію (9.37) їх вводять із нульовими коефіцієнтами, тобто вигляд цільової функції не змінюється.

Приймемо змінні $x_5, x_6, x_7$ за базисні й виразимо їх із системи (9.38) через всі інші змінні:

$$\begin{aligned} &x_5 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4, \\ &x_6 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4, \\ &x_7 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4. \end{aligned} \qquad (9.39)$$

За опорний розв'язок візьмемо такий розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних $x_1, x_2, x_3, x_4$:

$$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0,\ x_4^{(0)} = 0,\ x_5^{(0)} = b_1,\ x_6^{(0)} = b_2,\ x_7^{(0)} = b_3. \qquad (9.40)$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції (9.37) $u^{(0)} = 0$.

Подальше розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом ділиться на ряд етапів, які полягають у тому, що від одного розв'язку потрібно перейти до іншого за умови, щоб цільова функція не зростала. Цього досягають вибором нового базису і нових значень вільних змінних.

Вияснимо, чи є розв'язок (9.40) оптимальним. Оскільки $x_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,...,7)$, то ми можемо тільки збільшувати їх значення. Якщо всі коефіцієнти $c_1, c_2, c_3, c_4$ у формулі (9.37) невід'ємні, то при збільшенні будь-якої змінної $x_1, ..., x_4$ цільова функція не може зменшитися. В цьому випадку розв'язок (9.40) буде оптимальним.

Нехай серед коефіцієнтів формули (9.37) є хоча б один від'ємний, наприклад, $c_1 < 0$. Це означає, що при збільшенні змінної $x_1$ цільова функція (9.37) буде зменшуватися порівняно зі значенням $u^{(0)}$, яке відповідає розв'язку (9.40). Тому за новий опорний розв'язок вибираємо розв'язок при таких значеннях вільних параметрів:

$$x_1 = x_1^{(1)},\ x_2 = x_3 = x_4 = 0. \qquad (9.41)$$

При цьому базисні змінні обчислюємо за формулами

$$x_5 = b_1 - a_{11}x_1^{(1)},\ \ x_6 = b_2 - a_{21}x_1^{(1)},\ \ x_7 = b_3 - a_{31}x_1^{(1)}. \qquad (9.42)$$

Якщо всі коефіцієнти $a_{11}, a_{21}, a_{31}$ не є додатні, то $x_1$ можна збільшувати необмежено; в цьому випадку не існує оптимального розв'язку задачі.

Зазвичай серед цих коефіцієнтів є додатні числа, а тому існує можливість зробити деякі базисні змінні від'ємними.

Тому змінну $x_1$ можна збільшувати тільки доти, доки всі базисні змінні залишаються невід'ємними. Нехай, наприклад, у формулі (9.42) $a_{11} > 0$ та $a_{21} > 0$.

Знайдемо числа $\frac{b_1}{a_{11}}$ та $\frac{b_2}{a_{21}}$ і виберемо з них менше.

Нехай $\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}\right\} = \frac{b_2}{a_{21}}$.

Тоді змінну $x_1$ можна збільшити тільки до значення $\frac{b_2}{a_{21}}$, оскільки при більших значеннях $x_1$ базисна змінна $x_6$ буде від'ємною.

Новий опорний розв'язок запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} x_1^{(1)} = \frac{b_2}{a_{21}},\ x_2^{(1)} = 0,\ x_3^{(1)} = 0,\ x_4^{(1)} = 0, \\ x_5^{(1)} = b_1 - a_{11}\frac{b_2}{a_{21}},\ x_6^{(1)} = 0,\ x_7^{(1)} = b_3 - a_{31}\frac{b_2}{a_{21}}. \end{gathered} \tag{9.43}$$

Цільова функція при цих значеннях проектних параметрів має значення $u^{(1)} = c_1 \cdot \frac{b_2}{a_{21}}$. Оскільки за припущенням $c_1 < 0,\ b_2 > 0$ і $a_{21} > 0$, то $u^{(1)} < u^{(0)}$.

На цьому закінчується перший етап оптимізації. Тепер потрібно зробити другий крок, використовуючи аналогічну процедуру. Приймемо ненульові змінні в (9.43) $x_1, x_5, x_7$ за базисні змінні, а нульові змінні $x_2, x_3, x_4, x_6$ за вільні. Із системи (9.38) виразимо $x_1, x_5, x_7$ через вільні змінні $x_2, x_3, x_4, x_6$. Вираз для цільової функції також виразимо через вільні параметри. Після другого кроку ми або знайдемо нові оптимальні значення змінних і відповідне їм значення цільової функції $u^{(2)} < u^{(1)}$, або доведемо, що розв'язок (9.43) є оптимальним. Загалом після скінченної кількості кроків прийдемо до оптимального розв'язку. Зауважимо, що на відміну від методу простого перебирання симплексний метод дає можливість вести пошук оптимального розв'язку цілеспрямовано, зменшуючи на кожному кроці значення цільової функції.

Якщо для системи обмежень (9.28) не справджуються прийняті припущення, то для розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом використовують штучний базис.

**Приклад 9.4.** У розпорядженні бригади робітників є ресурси: 420кг металу, 150м$^2$ скла та 210год. робочого часу. Бригаді доручено виготовляти вироби двох видів: $A$ та $B$. Ціна одного виробу виду $A - 48$ грн., а виду $B - 40$ грн. На виготовлення одного виробу $A$ потрібно 4 кг металу, 2 м$^2$ скла і 3год. робочого часу, а на виготовлення одного виробу $B - 6$ кг металу, 1м$^2$ скла і 2год. робочого часу. Потрібно так спланувати обсяг випуску продукції, щоб її вартість була максимальною.

**Розв'язування.** Складемо математичну модель цієї задачі. Нехай $x_1$ та $x_2$ – кількість виробів видів $A$ та $B$, які потрібно запланувати; $x_1$ та $x_2$ є цілими невід'ємними числами. Наявні ресурси сировини і робочого часу задамо у вигляді обмежень – нерівностей

$$\begin{aligned} &4x_1 + 6x_2 \le 420, \\ &2x_1 + x_2 \le 150, \\ &3x_1 + 2x_2 \le 210. \end{aligned} \tag{9.44}$$

Повну вартість запланованої до виробництва продукції виражають формулою

$$u = 48x_1 + 40x_2. \tag{9.45}$$

Таким чином, потрібно визначити такі значення проектних параметрів $x_1$ та $x_2$, які задовольняють систему лінійних нерівностей (9.44) і для яких цільова функція (9.45) досягає максимуму.

Введемо додаткові змінні $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$, при цьому виберемо їх так, щоб нерівності (9.44) перетворилися у рівняння

$$\begin{aligned} &4x_1 + 6x_2 + x_3 = 420, \\ &2x_1 + x_2 + x_4 = 150, \\ &3x_1 + 2x_2 + x_5 = 210. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Зауважимо, що цільова функція (9.45) не змінить свого вигляду. Фактично $x_3, x_4$ та $x_5$ будуть означати залишки ресурсів, що не використані у виробництві.

Якщо змінити знак цільової функції (9.45), тобто розглянути нову цільову функцію

$$z = -u = -48x_1 - 40x_2, \tag{9.47}$$

то одержимо задачу мінімізації для цільової функції (9.47).

Приймемо $x_3, x_4, x_5$ за базисні змінні й виразимо їх через вільні змінні $x_1$ та $x_2$ з рівнянь (9.46)

$$\begin{aligned} &x_3 = 420 - 4x_1 - 6x_2, \\ &x_4 = 150 - 2x_1 - x_2, \\ &x_5 = 210 - 3x_1 - 2x_2. \end{aligned} \tag{9.48}$$

За початковий опорний візьмемо розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних

$$x_1^{(0)} = 0,\ \ x_2^{(0)} = 0,\ \ x_3^{(0)} = 420,\ \ x_4^{(0)} = 150,\ \ x_5^{(0)} = 210. \tag{9.49}$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції

$$z^{(0)} = 0. \tag{9.50}$$

Значення (9.50) не є мінімальним, оскільки значення цільової функції $z$ можна зменшити шляхом збільшення вільних параметрів $x_1$ та $x_2$. У формулі (9.47) обидва коефіцієнти від'ємні, але оскільки $48 > 40$, то приймемо $x_2 = 0$, а будемо збільшувати змінну $x_1$ доти, доки базисні змінні будуть невід'ємними.

З формул (9.48) випливає, що $x_1$ можна збільшувати до значення $x_1 = 70$, бо при більших його значеннях базисна змінна $x_5$ буде від'ємною.

Таким чином, при $x_1 = 70, x_2 = 0$ одержимо новий опорний розв'язок (значення змінних $x_3, x_4, x_5$ знаходимо за формулами (9.48))

$$x_1^{(1)} = 70, \; x_2^{(1)} = 0, \; x_3^{(1)} = 140, \; x_4^{(1)} = 10, \; x_5^{(1)} = 0. \qquad (9.51)$$

Значення цільової функції (9.47) для цього розв'язку

$$z^{(1)} = -3360. \qquad (9.52)$$

Новий розв'язок (9.51) кращий, оскільки значення цільової функції зменшилося порівняно з (9.50).

Наступний крок почнемо з вибору нового базису. Приймемо ненульові змінні в (9.51) $x_1, x_3, x_4$ за базисні змінні, а змінні $x_2, x_5$ – за вільні. Із системи (9.46) знайдемо:

$$\begin{aligned} x_1 &= 70 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5, \\ x_3 &= 140 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_5, \\ x_4 &= 10 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5. \end{aligned} \qquad (9.53)$$

Виразимо цільову функцію (9.47) через вільні параметри $x_2, x_5$, замінивши $x_1$ за допомогою першої з формул (9.53)

$$z = -3360 - 8x_2 + 16x_5. \qquad (9.54)$$

Значення цільової функції (9.54) можна зменшити за рахунок збільшення $x_2$, оскільки коефіцієнт при цій змінній від'ємний. При цьому зростання змінної $x_5$ недопустиме, бо це призвело б до зростання цільової функції. Тому приймемо $x_5 = 0$.

Максимальне значення змінної $x_2$ визначають співвідношеннями (9.53). Швидше від змінної $x_1$ нульового значення досягне змінна $x_3$ при $x_2 = 42$. Подальше збільшення $x_2$ неможливе, оскільки змінна $x_3$ буде від'ємною.

Отже, одержуємо наступний опорний розв'язок при $x_2 = 42, x_3 = 0$ (значення змінних $x_1, x_3, x_4$ знаходимо за формулами (9.53))

$$x_1^{(2)} = 42, x_2^{(2)} = 42, x_3^{(2)} = 0, x_4^{(2)} = 24, x_5^{(2)} = 0. \qquad (9.55)$$

Значення цільової функції (9.47) для цього розв'язку

$$z^{(2)} = -3696. \qquad (9.56)$$

Для виконання наступного кроку змінні $x_1, x_2, x_4$ приймемо за базисні, а $x_3, x_5$ – за вільні змінні. Із системи (9.46) знайдемо:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 42 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5, \\
x_2 &= 42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5, \\
x_4 &= 24 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{4}{5}x_5.
\end{aligned}
\tag{9.57}
$$

Цільова функція набуде вигляду

$$z = -3360 - 8\left(42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5\right) + 16x_5,$$

тобто

$$z = -3696 + \frac{12}{5}x_3 + \frac{64}{5}x_5. \tag{9.58}$$

Оскільки у формулі (9.58) коефіцієнти при $x_3$ та $x_5$ додатні, то при збільшенні цих параметрів значення функції (9.58) зростає.

Отже, мінімальне значення цільової функції (9.58) відповідає нульовим значенням змінних $x_3$ та $x_5$ і одержаний розв'язок (9.55) є оптимальним. Значення цільової функції (9.45) для цього розв'язку є максимальним і воно дорівнює $u_{\max} = 3696$.

Таким чином, для одержання максимальної вартості продукції при заданих ресурсах необхідно виготовити по 42 вироби виду $A$ та $B$. Вартість запланованої продукції дорівнює 3696 грн. При цьому всі ресурси металу і робочого часу будуть використані, а скла залишиться $24\,\text{м}^2$.

Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом можна оформити у вигляді послідовності симплекс-таблиць. Покажемо це на прикладі розв'язаної задачі. Цільову функцію (9.47) запишемо у вигляді

$$z + 48x_1 + 40x_2 = 0. \tag{9.59}$$

У стовпець “базис” запишемо назву цільової функції та базисні невідомі, у стовпець “план” – праві частини обмежень та константу у представленні цільової функції. У стовпці $x_1,\ldots,x_5$ запишемо коефіцієнти при відповідних змінних у формулах (9.59) та (9.46).

У випадку пошуку мінімуму функції $z$ розв'язок (план) буде оптимальним, якщо числа, одержані в рядку $z$, не є додатні. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислення закінчено. Оптимальні значення базисних невідомих і цільової функції можна знайти у стовпці “план”.

Якщо розв'язок не є оптимальним, то серед додатних коефіцієнтів рядка $z$ вибираємо найбільший. Він визначає змінну, яка буде включена в новий базис, та ведучий стовпець.

Обчислюємо відношення чисел стовпця “план” до відповідних додатних елементів ведучого стовпця і серед них вибираємо найменше. Воно визначає ведучий рядок та змінну, яка буде виключена з базису. На перетині ведучого рядка та ведучого стовпця міститься ведучий елемент.

Якщо всі елементи ведучого стовпця від'ємні, то цільова функція необмежена.

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінну ведучого стовпця включаємо в базис. Відповідний їй рядок отримуємо шляхом ділення ведучого рядка на ведучий елемент. Помножимо цей рядок на елемент з протилежним знаком $i-$го рядка ведучого стовпця і додамо його до цього ж $i-$го рядка. Такі ж перетворення виконаємо з усіма рядками. Одержимо нову симплекс-таблицю, яку перевіримо на оптимальність. Побудову наступних симплекс-таблиць виконаємо аналогічно.

| Базис | План | $x_1 \downarrow$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 48 | 40 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 420 | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 150 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\leftarrow x_5$ | 210 | $\underline{3}$ | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | -3360 | 0 | $8\downarrow$ | 0 | 0 | -16 |
| $\leftarrow x_3$ | 140 | 0 | $\underline{10/3}$ | 1 | 0 | -4/3 |
| $x_4$ | 10 | 0 | -1/3 | 0 | 1 | -2/3 |
| $x_1$ | 70 | 1 | 2/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| $z$ | -3696 | 0 | 0 | -12/5 | 0 | -64/5 |
| $x_2$ | 42 | 0 | 1 | 3/10 | 0 | -2/5 |
| $x_4$ | 24 | 0 | 0 | 1/10 | 1 | -4/5 |
| $x_1$ | 42 | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 3/5 |

Отже, $z_{\min} = -3696$ при $x_1 = 42,\ x_2 = 42,\ x_3 = 0,\ x_4 = 24,\ x_5 = 0.$

## 9.7. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити методом золотого перерізу найменше або найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Точку $x^*$, в якій функція приймає це значення, визначити з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

   1.1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln x;\ [1,5;\ 2];\ f_{\min};$

   1.2. $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6;\ [1;\ 1,5];\ f_{\max};$

   1.3. $f(x) = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4;\ [0;\ 1];\ f_{\max};$

   1.4. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(\ln x - 1);\ [0,5;\ 1];\ f_{\min};$

1.5. $f(x) = -2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$; $[0; 0,5]$; $f_{\min}$;

1.6. $f(x) = x^3 - 3\sin x$; $[0,5; 1]$; $f_{\min}$;

1.7. $f(x) = 2\sin x - tgx$; $\left[0; \pi/4\right]$; $f_{\max}$;

1.8. $f(x) = 1 - 6x - 6x^2 - x^6$; $[-1; 0]$; $f_{\max}$;

1.9. $f(x) = x - 2x^2 + 1/5x^5$; $[1; 2]$; $f_{\min}$;

1.10. $f(x) = 2x + x^2 - 1/5x^5$; $[-1; -0,5]$; $f_{\min}$;

2. Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(A\vec{x}, \vec{x}\right) - \left(\vec{b}, \vec{x}\right)$ з точністю $\varepsilon = 0,01$, взявши за початкове наближення $\vec{x}^{(0)}$. $A$ – симетрична додатно визначена матриця третього порядку; $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$;

2.2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$;

2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7,6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,9 \\ 0,6 \end{pmatrix}$;

2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$;

2.5. $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3,2 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,8 \\ 1,1 \end{pmatrix}$;

2.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8,8 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 1,1 \end{pmatrix}$;

2.7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{pmatrix}$;

2.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2.9. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,0 \\ 3,5 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0,7 \end{pmatrix}$;

2.10. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

3. Знайти розв’язок задачі лінійного програмування: а) графічним методом; б) симплексним методом.

3.1. $u = 3x_1 - 3x_2 + 7;\quad u_{\max}$
$2x_1 - 3x_2 \ge -6;$
$x_1 + 4x_2 \le 19;$
$2x_1 - x_2 \le 11;$
$x_1 - 6x_2 \le 0;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

3.2. $u = -4x_1 + x_2 - 5;\quad u_{\min}$
$4x_1 - x_2 \ge -2;$
$x_1 + 2x_2 \le 13;$
$3x_1 + x_2 \le 14;$
$2x_1 - 3x_2 \le 2;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

3.3. $u = 4x_1 - x_2 + 8;\quad u_{\max}$
$3x_1 - 2x_2 \ge 0;$
$-x_1 + 4x_2 \le 10;$
$3x_1 - x_2 \le 14;$
$x_1 - 2x_2 \le 3;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

3.4. $u = 2x_1 + 3x_2 + 5;\quad u_{\max}$
$x_1 - x_2 \ge -1;$
$-x_1 + 3x_2 \le 7;$
$2x_1 + x_2 \le 14;$
$2x_1 - 5x_2 \le 1;$
$x_1 \ge 0;$
$x_2 \ge 0;$

3.5. $u = 4x_1 + x_2 + 8; \quad u_{\max}$

$2x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 - 2x_2 \geq -7;$

$3x_1 + x_2 \leq 14;$

$2x_1 - 3x_2 \leq 2;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0;$

3.6. $u = -4x_1 + x_2; \quad u_{\min}$

$x_2 \leq 3;$

$-x_1 + 3x_2 \leq 7;$

$2x_1 + 3x_2 \leq 22;$

$x_1 - 3x_2 \leq 2;$

$x_1 - 4x_2 \leq 1;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0;$

3.7. $u = 3x_1 + 5x_2 + 12; \quad u_{\max}$

$x_1 - x_2 \geq -1;$

$2x_1 + 5x_2 \leq 26;$

$x_1 - 3x_2 \leq 2;$

$x_1 - 4x_2 \leq 1;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0;$

3.8. $u = 3x_1 + 4x_2 + 8; \quad u_{\max}$

$x_1 - x_2 \geq -1;$

$-x_1 + 3x_2 \leq 7;$

$2x_1 + 3x_2 \leq 22;$

$2x_1 - 5x_2 \leq 6;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0;$

3.9. $u = 2x_1 + 3x_2 + 7; \quad u_{\max}$

$3x_1 - 2x_2 \geq -4;$

$x_1 + x_2 \leq 11;$

$3x_1 - x_2 \leq 14;$

$x_1 - 3x_2 \leq 2;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0;$

3.10. $u = x_1 + 2x_2; \quad u_{\max}$

$x_1 + x_2 \leq 5;$

$x_1 - 2x_2 \geq -4;$

$-2x_1 + 3x_2 \geq -6;$

$x_1 \geq 0;$

$x_2 \geq 0.$

# ЛІТЕРАТУРА


1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598с.
2. Бігун Я.Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання: Навчальний посібник / Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича. – Чернівці: Рута, 2005. – 80с.
3. Білик Г.Б., Веремій О.В., Кравченко В.І. Навчальний посібник "Чисельні методи в інформатиці": Для студ. заоч. від-ння спец. 7.080402: Навч. посіб. для студ. ВНЗ / Донбаська держ. машинобудівна академія. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 111с.
4. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 254с.
5. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 432с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.
8. Лабораторний практикум з дисципліни "Чисельні методи математики" для студентів спеціальностей 6.091501, 6.080401, 6.080402, 6.092401, 6.091503 / Черкаський держ. технологічний ун-т / Ю.В. Мітіхін (уклад.). – Черкаси: ЧДТУ, 2007. – 81с.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 286с.
10. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни "Чисельні методи в інформатиці": Для студентів напряму підготовки 0804 "Комп`ютерні науки" всіх форм навчання / В.М. Задачин (уклад.), І.Г. Конюшенко (уклад.). – Харків: ХНЕУ, 2007. – 60с.
11. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в моделюванні систем. – Чернівці: Золоті литаври, 2006. – 592с.
12. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320с.
13. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480с.
14. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408с.
15. Числові методи / П.П.Овчинников, В.М.Михайленко: За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 3-тє видання, виправлене. – К.: Техніка, 2004. – 792с.
16. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Навч. посіб. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396с.

# ЗМІСТ