

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**А. І. Колосов**

**А. В. Якунін**

**ТЕОРІЯ КРИВИХ І ПОВЕРХОНЬ**  
**ДЛЯ ГЕОІНФОРМАТИКІВ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2019**

УДК 514.116.3 + 514.7(075.8)

К61

**Автори:**

**Колосов Анатолій Іванович**, доктор фізико-математичних наук, професор;  
**Якунін Анатолій Вікторович**, кандидат технічних наук, доцент

**Рецензенти:**

**Коваленко Людмила Борисівна**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

**Аршавя Олена Олександрівна**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

*Рекомендовано до друку*

*Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник  
(протокол № 12 від 06.07.2018)*

**Колосов А. І.**

К61 Теорія кривих і поверхонь для геоінформатиків : навч. посібник / **А. І. Колосов**, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 172 с.

ISBN 978-966-695-479-7

Стисле викладення класичних положень теорії кривих та поверхонь доповнено розглядом головних понять сферичної геометрії та тригонометрії з орієнтацією на геодезичні застосування. Увагу сконцентровано на розкритті сутності матеріалу без надмірної строгості викладу. Теоретичні відомості подаються з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Наведено питання для самоконтролю та практичні завдання для самостійного виконання у вигляді типових розрахунків.

Рекомендовано бакалаврам спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій при вивченні відповідних тем програми з вищої математики.

УДК 514.116.3 + 514.7(075.8)

ISBN 978-966-695-479-7

© **А. І. Колосов**, А. В. Якунін, 2019  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019

## З М І С Т

ПЕРЕДМОВА . . . . .	5
1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИВИХ . . . . .	6
1.1 Векторні функції скалярного аргументу . . . . .	6
1.2 Поняття просторової лінії . . . . .	10
1.3 Дотична пряма та нормальна площина до просторової лінії . . . . .	13
1.4 Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація . . . . .	17
1.5 Головна нормаль і бінормаль. Кривина кривої . . . . .	20
1.6 Стична та спрямна площини. Супровідний тригранник . . . . .	25
1.7 Скрут просторової кривої. Формули Френе . . . . .	30
1.8 Контрольні запитання та вправи . . . . .	38
2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОВЕРХОНЬ . . . . .	41
2.1 Поняття поверхні та її параметризація . . . . .	41
2.2 Дотична площина та нормаль до поверхні. Лінії на поверхні . . . . .	44
2.3 Параметризація еліпсоїда у геодезичних координатах . . . . .	48
2.4 Перша квадратична форма поверхні та її застосування . . . . .	50
2.5 Друга квадратична форма поверхні. Кривина лінії на поверхні. Індикатриса Дюпена . . . . .	60
2.6 Головні напрями й головні кривини. Лінії кривини. Формула Ейлера. Асимптотичні лінії . . . . .	68
2.7 Повна та середня кривини . . . . .	75
2.8 Внутрішня геометрія поверхні. Геодезичні лінії . . . . .	80
2.9 Контрольні запитання та вправи . . . . .	87
3 ЕЛЕМЕНТИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ . . . . .	91
3.1 Точки та дуги на поверхні сфери. Сферичний двокутник. Сферичний трикутник . . . . .	91
3.2 Сферична відстань. Географічна сферична система координат . . . . .	96
3.3 Полярні сферичні трикутники. Спряжені трикутники . . . . .	100

3.4	Площа сферичного трикутника . . . . .	103
3.5	Контрольні запитання та вправи . . . . .	105
4	ОСНОВНІ ФОРМУЛИ СФЕРИЧНОЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ . . . . .	106
4.1	Формули косинусів сторін сферичного трикутника . . . . .	106
4.2	Формули косинусів кутів сферичного трикутника . . . . .	108
4.3	Сферична теорема синусів . . . . .	109
4.4	Формули п'яти елементів сферичного трикутника . . . . .	110
4.5	Формули чотирьох елементів сферичного трикутника . . . . .	112
5	РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ . . . . .	113
5.1	Формули для розв'язування прямокутних трикутників . . . . .	113
5.2	Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника . . . . .	114
5.3	Основні випадки розв'язування прямокутних і прямокутних сферичних трикутників . . . . .	116
5.4	Формули синусів, косинусів та тангенсів половини кутів сферичного трикутника . . . . .	126
5.5	Формули синусів, косинусів та тангенсів половини сторін сферичного трикутника . . . . .	129
5.6	Формули Деламбра – Гаусса й аналогії Непера . . . . .	133
5.7	Формули для обчислення сферичного надлишку . . . . .	136
5.8	Основні випадки розв'язування косокутних сферичних трикутників . . . . .	137
5.9	Розв'язування малих сферичних трикутників . . . . .	156
5.10	Диференціальні формули сферичної тригонометрії . . . . .	158
5.11	Контрольні запитання та вправи . . . . .	159
	ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ . . . . .	161
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . .	170

## ПЕРЕДМОВА

Вивчення елементів теорії кривих і поверхонь – головних розділів диференціальної геометрії, а також основ сферичної геометрії та тригонометрії передбачено діючою програмою для студентів підготовки бакалавра спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій. Набуті компетенції повинні включати вміння:

– досліджувати властивості кривих і поверхонь за допомогою першої та другої квадратичних форм;

– застосовувати апарат теорії кривих і поверхонь під час розв’язування геометричних задач на поверхні;

– використовуючи основні поняття сферичної геометрії та тригонометрії, розв’язувати геометричні задачі на поверхні сфери.

Основою цього посібника є цикл лекцій із вищої математики, що читаються на будівельному факультеті Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

У посібнику висвітлено лише традиційні положення, що стосуються кривих і поверхонь у тривимірному просторі. В основному, досліджується поведінка як завгодно малих дуг і областей. Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їхніх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднувальною прикладною спрямованістю на геодезичні застосування. Теоретичні відомості подаються з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. Наведено питання для самоконтролю та практичні завдання для самостійного виконання у вигляді типових розрахунків.

Для свідомого й успішного засвоєння викладеного матеріалу досить ознайомлення з основами математичного аналізу й аналітичної геометрії.

Посібник рекомендовано бакалаврам спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій під час вивчення відповідних тем програми з вищої математики.

# 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИВИХ

## 1.1 Векторні функції скалярного аргументу

Нехай у декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  деяка просторова лінія  $L$  (рис. 1.1) задана в параметричній формі

$$L: x = x(t); y = y(t); z = z(t), \quad t \in (a; b).$$

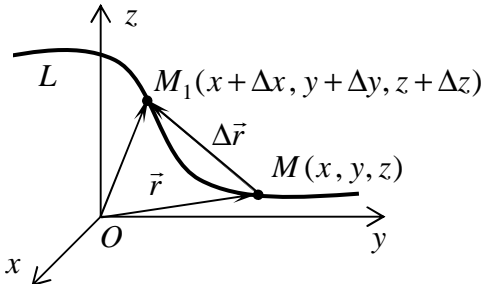


Рисунок 1.1

Тоді радіус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  довільної точки  $M(x, y, z)$  кривої  $L$  визначається за допомогою рівності

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \\ &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Отже, радіус-вектор довільної точки просторової кривої може розглядатися як деяка функція аргументу  $t$ . У разі зміни параметра  $t$  може змінюватися як модуль вектора  $\vec{r}(t)$ , так і його напрям, або тільки модуль чи напрям.

Якщо кожному значенню змінної  $t$  із деякого проміжку  $(a; b)$  поставлено у відповідність один і тільки один радіус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то кажуть, що на проміжку  $(a; b)$  визначено **вектор-функцію**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  **скалярного аргументу**  $t$ :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Просторову криву  $L$ , утворену за допомогою руху кінця радіус-вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  під час зміни  $t$  на проміжку  $(a; b)$ , називають графіком вектор-функції або **годографом**.

На вектор-функції поширюються поняття границі, неперервності, диференційованості та інтегрованості.

Сталий вектор  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  називається **границею вектор-функції**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $t_0$ , якщо

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

Позначається  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ . Зрозуміло, що  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$ .

Властивості границі вектор-функції :

1. *Границя суми вектор-функцій дорівнює сумі границь доданків:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t).$$

2. *Під час множення вектор-функції на скаляр, а також для скалярного, векторного і мішаного добутків границя добутку дорівнює добутку границь співмножників:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\lambda(t) \vec{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t);$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t);$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t);$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{u}(t) \vec{v}(t) \vec{w}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{w}(t).$$

Вектор  $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  називається **приростом вектор-функції**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $t$ , що відповідає приросту аргументу  $\Delta t$ .

Вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  називають **неперервною в точці  $t$** , якщо  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}(t) = 0$ . Інакше кажучи, вектор-функція є неперервною в точці  $t_0$ , якщо  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ . Очевидно, що для неперервності вектор-функції необхідна й достатня неперервність всіх її координатних функцій:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x(t_0); \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y(t_0); \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z(t_0).$$

Для неперервної вектор-функції справджуються аналогічні теореми, що і для скалярних функцій.

Границя відношення  $\Delta \vec{r}(t) / \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  називається **похідною вектор-функції**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $t$  і позначається  $\vec{r}'(t)$

або  $d\vec{r}/dt : \quad \vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}.$

При цьому  $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$

Оскільки під час ділення вектора на число знову отримуємо вектор, то похідна вектор-функції є вектор-функцією, для якої знову можна обчислити похідну – **похідну другого порядку**  $\vec{r}''(t)$  і так далі:  $\vec{r}'''(t), \vec{r}^{(4)}(t), \dots, \vec{r}^{(n)}(t), \dots$  Вектор-функція, яка допускає існування похідних до  $n$ -го порядку включно, називається ***n* разів диференційовною**.

Правила диференціювання вектор-функцій аналогічні до правил, які справджуються для скалярних функцій :

1. *Похідна суми дорівнює сумі похідних доданків:*

$$\frac{d(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

2. *Добуток вектор-функції на скаляр, скалярний і векторний добуток диференціюються за правилами скалярного аналізу:*

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{r}(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{r}(t) + \lambda(t)\frac{d\vec{r}(t)}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

3. *Мішаний добуток диференціюється за правилом:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{u}(t)\vec{v}(t)\vec{w}(t)) &= \frac{d\vec{u}(t)}{dt}\vec{v}(t)\vec{w}(t) + \vec{u}(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\vec{w}(t) + \\ &+ \vec{u}(t)\vec{v}(t)\frac{d\vec{w}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Похідна сталого вектора дорівнює нулю. Отже, *сталі скалярний або векторний множники можна виносити за знак похідної*.

*Похідна вектор-функції сталого напрямку колінарна самій вектор-функції:*  $\vec{r}'(t) \parallel \vec{r}(t)$ , оскільки у цьому разі  $\Delta \vec{r}(t) \parallel \vec{r}(t)$ .



Похідна вектор-функції сталого модуля перпендикулярна до самої вектор-функції:  $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$ . Дійсно, якщо  $|\vec{r}(t)| = \text{const}$ , то  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \vec{r}^2(t) = \text{const}$ . Диференціюємо скалярний добуток:  $(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t))' = \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$ . Звідки  $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$ .

Нехай вектор-функція  $\vec{r}(t)$  є  $n$  разів диференційованою. Якщо розкласти кожну із функцій  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  за формулою Тейлора, то можна отримати формулу Тейлора для вектор-функції:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{r}''(t_0)\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)\Delta t^n + \vec{\alpha}\Delta t^n,$$

де  $\vec{\alpha}$  – нескінченно малий вектор при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

**Диференціалом вектор-функції  $\vec{r}(t)$**  називається вектор

$$d\vec{r}(t) = dx(t) \cdot \vec{i} + dy(t) \cdot \vec{j} + dz(t) \cdot \vec{k}.$$

**Інтегрування вектор-функції  $\vec{r}(t)$**  здійснюється покомпонентно аналогічно до інтегрування скалярних функцій:

$$\int \vec{r}(t)dt = \int x(t)dt \cdot \vec{i} + \int y(t)dt \cdot \vec{j} + \int z(t)dt \cdot \vec{k};$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt \cdot \vec{i} + \int_a^b y(t)dt \cdot \vec{j} + \int_a^b z(t)dt \cdot \vec{k}.$$

Якщо під  $t$  розуміти час, а кінець  $M$  радіус-вектора  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  розглядати як матеріальну точку, то годограф вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  слугує траєкторією руху цієї точки (*фізичний зміст вектор-функції* скалярного аргументу).

Тоді перша похідна  $\vec{r}'(t)$  вектор функції – швидкість руху матеріальної точки  $\vec{v}(t)$ , а друга похідна  $\vec{r}''(t)$  – її прискорення  $\vec{a}(t)$  (*фізичний зміст першої та другої похідних вектор-функції* скалярного аргументу).

**Приклад.** Матеріальна точка  $M(x, y)$  рухається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  по колу радіуса  $R$  (рис. 1.2):  $x = R \cos \omega t$ ;  $y = R \sin \omega t$ . Знайти її швидкість  $\vec{v}(t)$  і прискорення  $\vec{a}(t)$ , а також їхні абсолютні величини.

$$\square \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = R \cos \omega t \cdot \vec{i} + R \sin \omega t \cdot \vec{j}; \quad |\vec{r}(t)| =$$

$$= \sqrt{(R \cos \omega t)^2 + (R \sin \omega t)^2} = R; \quad \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} =$$

$$= (R \cos \omega t)' \vec{i} + (R \sin \omega t)' \vec{j} = -R\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + R\omega \cos \omega t \cdot \vec{j};$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\omega \sin \omega t)^2 + (R\omega \cos \omega t)^2} = \omega R;$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t) = (-R\omega \sin \omega t)' \vec{i} + (R\omega \cos \omega t)' \vec{j} =$$

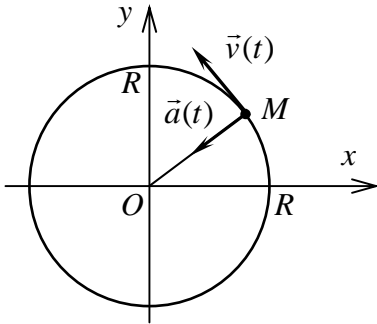


Рисунок 1.2

$$= -R\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{j} =$$

$$= -\omega^2 (R \cos \omega t \cdot \vec{i} + R \sin \omega t \cdot \vec{j}) =$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t); \quad |\vec{a}(t)| = |-\omega^2 \vec{r}(t)| =$$

$$= \omega^2 |\vec{r}(t)| = \omega^2 R.$$

Отже, швидкість напрямлена по дотичній до кола, а прискорення – уздовж радіус-вектора до центра кола. При цьому вони залишаються сталими за величиною. ■

## 1.2 Поняття просторової лінії

Нехай  $G$  – довільна множина точок тривимірного простору  $R^3$ . Розглянемо **відображення**  $f$  множини  $G$  у простір  $R^3$ , яке кожній точці  $M$  множини  $G$  ставить у відповідність деяку точку  $f(M)$  простору, що зветься **образом** точки  $M$ . При цьому точка  $M$  служить **прообразом** точки  $f(M)$ . Множина точок  $f(G)$ , що утворена образами всіх точок множини  $G$ , називається **образом** множини  $G$ . Відображення  $f$  називається **взаємно однозначним**, якщо образи різних точок різні. **Оберненим** до  $f$  називається відображення  $f^{-1}$ , яке кожній точці  $f(M)$  множини  $f(G)$  ставить у відповідність точку  $M$  множини  $G$ . Відображення  $f$  називається **неперервним**, якщо нескінченно близьким точкам прообразу  $G$

відповідають нескінченно близькі точки образу  $f(G)$ . Якщо відображення  $f$  є взаємно однозначним, неперервним і його обернене відображення  $f^{-1}$  також неперервне, то відображення  $f$  називається **топологічним** або **гомеоморфізмом**, а множини  $G$  і  $f(G)$  – **топологічно еквівалентними** або **гомеоморфними**.

Множина  $L$  точок простору називається **елементарною кривою**, якщо ця множина є образом відкритого проміжку  $(a; b)$  прямої у разі топологічного відображення його у простір (рис. 1.3).

Наприклад, півколо без кінців належить до елементарних кривих, а коло в цілому до них не відноситься.

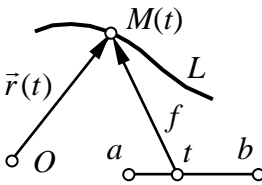


Рисунок 1.3

*Зауваження 1.* Елементарну криву можна уявити як фігуру, отриману внаслідок неперервної деформації відкритого відрізка прямої.

**Простою кривою** називається лінія, яку можна покрити скінченною чи зліченною кількістю елементарних кривих.

Наприклад, коло є простою кривою.

*Зауваження 2.* Будь-яка проста крива гомеоморфна або відкритому відрізку прямої (будучи при цьому елементарною лінією), або колу.

Відображення  $f : G \rightarrow R^3$  називається **локально топологічним**, якщо для довільної точки  $M$  множини  $G$  існує окіл  $U(M)$  цієї точки, в якому відображення  $f$  є топологічним.

Множина  $G$  точок простору  $R^3$  називається **загальною кривою**, якщо ця множина є образом простої кривої у разі деякого локально топологічного відображення.

Наприклад, символ нескінченності – загальна крива, що не є простою.

*Зауваження 3.* Вивчаючи локальні властивості кривих, надалі будемо припускати елементарність ліній, що розглядаються.

Нехай  $L$  – довільна елементарна крива, що за означенням є образом відкритого відрізка  $(a; b)$  прямої. Лінія  $L$  називається **параметризованою**, якщо кожній її точці  $M$  поставлено у відповід-

ність одне певне значення параметра  $t$  із проміжку  $(a; b)$ , до того ж це відображення  $f$  є взаємно однозначним і взаємно неперервним у кожній точці. Задання такої відповідності називають **параметризацією** кривої.

Якщо лінію параметризовано, то радіус-вектор кожної її точки  $M(t)$  визначається відповідним значенням параметра  $t$  згідно з **векторним (векторно-параметричним)** рівнянням лінії :

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a; b).$$

Векторне рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  лінії  $L$  рівносильне трьом скалярним співвідношенням:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad t \in (a; b),$$

що також називають **параметричними рівняннями** кривої  $L$ .

Лінія  $L$  називається **регулярною кривою  $m$ -го порядку**, якщо координатні функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  є  $m$  разів неперервно диференційовними ( $m \geq 1$ ) і похідна вектор-функції відмінна від нуля  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ , тобто  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0$ ,  $t \in (a; b)$ .

При  $m \geq 1$  регулярну криву також називають **гладкою**.

Точка  $M(t_1)$  кривої, в якій виконується умова  $\vec{r}'(t_1) = \vec{0}$ , називається **особливою**. Такі точки далі не вивчатимемо.

**Зауваження 4.** Лінія  $L$  є гладкою у точці  $M_0$ , якщо у цій точці існує дотична пряма до  $L$  і деякий окіл точки  $M_0$  на кривій взаємно однозначно проектується на цю дотичну. Крива є гладкою, якщо вона є гладкою в кожній точці, а дотичні змінюються неперервно.

Параметр  $t$  однозначно визначає точки кривої, але геометрично він ніяк не пов'язаний із нею. Кожна крива може бути параметризована різними способами. Нехай перехід від однієї параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in (a; b)$  до іншої  $\vec{r} = \vec{r}_1(\tau)$ ,  $\tau \in (\alpha; \beta)$  описується функцією  $t = t(\tau)$ . Якщо виконуються умови  $t(\alpha) = a$ ;  $t(\beta) = b$ ;  $t'(\tau) \neq 0$  при  $\tau \in (\alpha; \beta)$ , то ці параметризації називаються **еквівалентними**, а функція  $t = t(\tau)$  вважається **допустимою заміною**. Щоб одержати векторне рівняння кривої в новій параметризації,

треба підставити в її рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  замість  $t$  вираз  $t(\tau)$ . Тоді  $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(t(\tau)) = \vec{r}_1(\tau)$ . Отже, на кривій можна досить довільно змінювати параметризацію, від чого змінюється вигляд її параметричних рівнянь, але крива залишається незмінною.

*Приклад.* Приймаючи за параметр кутовий коефіцієнт  $k$  прямої  $y = kx$ , що проходить через початок координат і змінну точку кривої, скласти параметричні рівняння еліпса  $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$ .

□ Підставимо  $y = kx$  у рівняння еліпса та дістанемо:

$$x^2 + 4k^2x^2 - 8x = 0.$$

Звідки маємо

$$x = 8/(4k^2 + 1), \quad y = 8k/(4k^2 + 1), \quad k \in (-\infty; +\infty). \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* Скласти параметричні рівняння прямої  $L$ , що проходить через точку  $M_0(2; -3; 4)$  паралельно вектору  $\vec{s} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ . (Розв'язати самостійно).

### 1.3 Дотична пряма та нормальна площина до просторової лінії

Вектор  $\Delta\vec{r}(t_0)/\Delta t$  паралельний вектору  $\Delta\vec{r}(t_0)$  і напрямлений вздовж січної  $M_0M_1$  до годографа  $L$  вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (рис. 1.4). Коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , точка  $M_1$  необмежено наближається до точки  $M_0$ , а січна  $M_0M_1$  переходить у дотичну  $L_\tau$  до кривої у

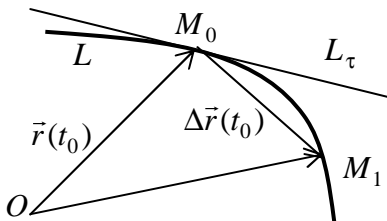


Рисунок 1.4

точці  $M_0$ . Звідси випливає, що напрям похідної  $\vec{r}'(t_0)$  вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  збігається з напрямом дотичної до годографа у відповідній точці  $M_0$  (геометричний зміст похідної вектор-функції).

Тобто вектор  $\vec{r}'(t_0)$  мож-

на взяти за напрямний вектор  $\vec{T}(T_x, T_y, T_z)$  дотичної  $L_\tau$ . Тоді **канонічні рівняння дотичної прямої**  $L_\tau$  до просторової кривої  $L$  мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

де  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  – точка дотику,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ .

Дотичну пряму  $L_\tau$  можна задати векторним рівнянням:

$$\vec{r} - \vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \cdot (t - t_0),$$

де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор змінної точки дотичної.

Площина  $\alpha_\tau$ , що перпендикулярна до дотичної  $L_\tau$  і проходить через точку дотику  $M_0$ , називається **нормальною площиною** до просторової лінії  $L$ .

Вектор  $\vec{T} = \vec{r}'(t_0)$  можна взяти за вектор нормалі цієї площини  $\alpha_\tau$ . Використовуючи рівняння площини, яка проходить через дану точку  $M_0$  і перпендикулярна до даного вектора нормалі, отримуємо **рівняння нормальної площини**  $\alpha_\tau$ :

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Рівняння нормальної площини  $\alpha_\tau$  у векторній формі має вигляд:  $\vec{r}'(t_0) \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = 0$ .

**Приклад 1.** Знайти рівняння дотичної прямої  $L_\tau$  та нормальної площини  $\alpha_\tau$  до заданої просторової лінії  $L$  у відповідній точці  $t_0$ :

а)  $L$  – циліндрична гвинтова лінія (рис. 1.5) з радіусом  $R = 4$  і кроком  $h = 8$ :  $x = 4 \cos t$ ;  $y = 4 \sin t$ ;  $z = (4/\pi)t$ ,  $t_0 = \pi/4$ ;

б)  $L$  – конічна гвинтова лінія:

$$x = 2t \cos t; \quad y = 2t \sin t; \quad z = 4t, \quad t_0 = \pi.$$

$$\square \text{ a) } x_0 = x(t_0) = 4 \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2};$$

$$y_0 = y(t_0) = 4 \sin(\pi/4) = 2\sqrt{2};$$

$$z_0 = z(t_0) = (4/\pi) \cdot (\pi/4) = 1;$$

$$M_0(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 1);$$

$$x'(t) = -4 \sin t; \quad y'(t) = 4 \cos t;$$

$$z'(t) = 4/\pi; \quad x'(t_0) = -4 \sin(\pi/4) = -2\sqrt{2};$$

$$y'(t_0) = 4 \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}; \quad z'(t_0) = 4/\pi;$$

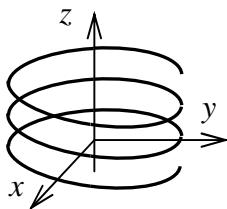


Рисунок 1.5

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}; \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{z - 1}{4/\pi};$$

$$L_\tau: \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - 1}{2/\pi};$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0;$$

$$-2\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) + (4/\pi)(z - 1) = 0;$$

$$\pi\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) - \pi\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) - 2(z - 1) = 0;$$

$$\alpha_\tau: \quad \pi\sqrt{2}x - \pi\sqrt{2}y - 2z + 2 = 0.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

*Зауваження.* Нехай просторова крива  $L$  задана як перетин двох поверхонь за допомогою системи рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

Тоді за напрямний вектор дотичної прямої  $L_\tau$  в точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  (і відповідно за вектор нормалі нормальної площини  $\alpha_\tau$ ) можна взяти вектор  $\vec{T}(T_x, T_y, T_z)$  з координатами:

$$T_x = \begin{vmatrix} \partial F_1 / \partial y & \partial F_1 / \partial z \\ \partial F_2 / \partial y & \partial F_2 / \partial z \end{vmatrix}; \quad T_y = - \begin{vmatrix} \partial F_1 / \partial x & \partial F_1 / \partial z \\ \partial F_2 / \partial x & \partial F_2 / \partial z \end{vmatrix};$$

$$T_z = \begin{vmatrix} \partial F_1 / \partial x & \partial F_1 / \partial y \\ \partial F_2 / \partial x & \partial F_2 / \partial y \end{vmatrix},$$

де всі частинні похідні обчислюються в точці дотику  $M_0$ .

*Приклад 2.* Знайти рівняння дотичної прямої  $L_\tau$  та нормальної площини  $\alpha_\tau$  до просторової лінії  $L$ , що задана системою рівнянь, у відповідній точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ :

$$\text{а) } L: \begin{cases} x^2 + 6y^2 - z^2 - 2y - 3 = 0; \\ 2x^2 - y^2 - 3z + 2 = 0, \end{cases} \quad M_0(2; -1; 3);$$

$$\text{б) } L: \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2z - 7 = 0; \\ 3x - 5y - 3z + 2 = 0, \end{cases} \quad M_0(2; 1; 1).$$

$$\square \text{ а) Позначимо } F_1(x, y, z) = x^2 + 6y^2 - z^2 - 2y - 3;$$

$$F_2(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 3z + 2.$$

Точка  $M_0(2; -1; 3) \in L$  оскільки  $F_1(M_0) = 0$  і  $F_2(M_0) = 0$ .

Обчислимо частинні похідні в точці дотику  $M_0$ :

$$\partial F_1 / \partial x = 2x; \quad \partial F_1 / \partial y = 12y - 2; \quad \partial F_1 / \partial z = -2z;$$

$$\partial F_1 / \partial x|_{M_0} = 4; \quad \partial F_1 / \partial y|_{M_0} = -14; \quad \partial F_1 / \partial z|_{M_0} = -6;$$

$$\partial F_2 / \partial x = 4x; \quad \partial F_2 / \partial y = -2y; \quad \partial F_2 / \partial z = -3;$$

$$\partial F_2 / \partial x|_{M_0} = 8; \quad \partial F_2 / \partial y|_{M_0} = 2; \quad \partial F_2 / \partial z|_{M_0} = -3.$$

Тоді

$$T_x = \begin{vmatrix} -14 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 54; \quad T_y = - \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -36; \quad T_z = \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 120.$$



Знайдемо канонічні рівняння дотичної прямої  $L_\tau$ :

$$\frac{x-x_0}{T_x} = \frac{y-y_0}{T_y} = \frac{z-z_0}{T_z}; \quad \frac{x-2}{54} = \frac{y+1}{-36} = \frac{z-3}{120} \quad \left| \times 6; \right.$$

$$\frac{x-2}{9} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-3}{20}.$$

Знайдемо загальне рівняння нормальної площини  $\alpha_\tau$ :

$$T_x(x-x_0) + T_y(y-y_0) + T_z(z-z_0) = 0;$$

$$54(x-2) - 36(y+1) + 120(z-3) = 0 \quad \left| : 6; \right.$$

$$9(x-2) - 6(y+1) + 20(z-3) = 0; \quad 9x - 6y + 20z - 84 = 0.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

#### 1.4 Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація

Знайдемо довжину  $s$  дуги гладкої кривої  $L$ , що задана рівнянням  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a; b]$  (рис. 1.6). Вставимо між  $a$  і  $b$  довільно вибрані проміжні значення параметра  $t$ :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Відповідними точками  $M_i = M(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  дуга  $L$  розбивається на  $n$  елементарних частин. Упишемо в криву ламану, послідовно з'єднуючи попарно дві сусідні точки  $M_{i-1}$  і  $M_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  відрізком прямої. Довжина однієї ланки ламаної:

$$M_{i-1}M_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = |\Delta \vec{r}(t_i)|.$$

Довжина ламаної  $s_n$  дорівнює сумі

$$\text{довжин усіх її ланок: } s_n = \sum_{i=1}^n |\Delta \vec{r}(t_i)|.$$

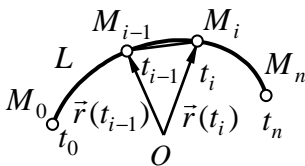


Рисунок 1.6

За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо:

$$|\Delta \vec{r}(t_i)| = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = |\vec{r}'(\tau_i)| \cdot \Delta t_i, \quad t_{i-1} < \tau_i < t_i.$$

Тоді довжина ламаної  $s_n$  набуває вигляду інтегральної суми функції  $|\vec{r}'(\tau_i)|$ :  $s_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}'(\tau_i)| \Delta t_i$ . Довжиною  $s$  дуги кривої  $L$  називається границя довжин уписаних ламаних за умови, що довжина максимальної ланки прямує до нуля. Отже,

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{r}'(\tau_i)| \Delta t_i = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt \quad \text{— довжина дуги кривої } L.$$

$$\text{У координатній формі: } s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Вектор-диференціал довжини дуги:  $d\bar{s} = \vec{r}'(t) dt = d\vec{r}$ .

*Приклад 1.* Знайти довжину заданої дуги кривої  $L$ :

а)  $L: x = 3t \cos t; y = 3t \sin t; z = 2\sqrt{2}t^{3/2}, t \in [0;1];$

б)  $L: x = 8t; y = 4 \ln t; z = 1/t, t \in [1;2].$

□ а)  $x'(t) = 3(\cos t - t \sin t); y'(t) = 3(\sin t + t \cos t);$

$$\begin{aligned} z'(t) &= 3\sqrt{2}t^{1/2}; \quad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 9(\cos t - t \sin t)^2 + \\ &+ 9(\sin t + t \cos t)^2 + 18t = 9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + \\ &+ 18t = 9 + 9t^2 + 18t = 9(t+1)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = 3 \int_0^1 (t+1) dt = \\ &= 3(t^2/2 + t) \Big|_0^1 = 4,5. \end{aligned}$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Нехай гладка крива  $L$  задана рівнянням  $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a;b]$ . Зафіксуємо на ній точку  $M_0 = M(t_0)$ . Виберемо на кривій  $L$  іншу точку  $M = M(t)$ , де  $t$  може бути як більшим, так і меншим  $t_0$ . Довжина  $s$  дуги  $M_0M$  визначається інтегралом  $s = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(t)| dt$  зі

змінною верхньою межею, тобто  $s$  є функцією верхньої межі  $t$  :  $s = s(t)$ . Продиференціюємо інтеграл за верхньою межею  $t$  і дістанемо  $s' = |\vec{r}'(t)| > 0$ , тобто функція  $s = s(t)$  є зростаючою від від'ємного значення при  $t = a$  до додатного при  $t = b$ , проходячи через нуль у точці  $t_0$ .

Функція  $s = s(t)$ , як монотонна, має обернену  $t = t(s)$ : не тільки кожній точці  $M = M(t)$  кривої відповідає певне значення  $s$ , але й кожному значенню  $s$  із проміжку  $[s(a); s(b)]$  відповідає певне значення параметра  $t$  із проміжку  $[a; b]$ , а з ним і певна точка  $M$  кривої (рис. 1.7). Отже, довжину  $s$  дуги можна вибрати за новий параметр, геометрично пов'язаний з самою кривою  $L$ . Його можна вважати криволінійною координатою точки на лінії  $L$ . Неістотна довільність полягає лише у виборі початкової точки  $M_0$  і на-

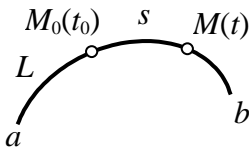


Рисунок 1.7

пряму, в якому довжина  $s$  дуги зростає. Змінну довжину  $s$  дуги називають **натуральним параметром** кривої. Параметризацію кривої  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  за допомогою натурального параметра називають **природною (натуральною)**.

У разі натуральної параметризації виконується умова  $|\vec{r}'(s)| = 1$ . Дійсно :

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{1}{ds/dt} = \vec{r}'_t \cdot \frac{1}{s'_t} = \vec{r}'_t \cdot \frac{1}{|\vec{r}'_t|} = \frac{\vec{r}'_t}{|\vec{r}'_t|}.$$

Звідки  $|\vec{r}'(s)| = 1$ . Отже, *модуль похідної радіуса-вектора по натуральному параметру  $s$  є одиничним вектором  $\vec{\tau} = \vec{r}'_s$ , напрямленим по дотичній до кривої*. Навпаки, якщо похідна радіуса-вектора кривої за деяким параметром  $u$  за абсолютною величиною дорівнює одиниці, то цей параметр є довжиною дуги:  $u = s$ .

З початкової параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  натуральну можна одержати як складену функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}_1(s)$ .

*Приклад 2.* Записати в натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$

рівняння заданої кривої:

$$\text{а) } L: \vec{r}(t) = \sqrt{2} \ln t \cdot \vec{i} + (1/t) \vec{j} + t \vec{k};$$

$$\text{б) } L: \vec{r}(t) = 3 \cos t \cdot \vec{i} + 3 \sin t \cdot \vec{j} + 4t \vec{k}.$$

$$\square \text{ а) } \vec{r}'(t) = \frac{\sqrt{2}}{t} \vec{i} - \frac{1}{t^2} \vec{j} + \vec{k}; \quad ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} + 1} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} + 1} dt = \sqrt{(1 + 1/t^2)^2} dt = (1 + 1/t^2) dt.$$

$$\text{Нехай } t_0 = 1. \text{ Тоді } s = \int_1^t (1 + 1/t^2) dt = (t - 1/t) \Big|_1^t = t - 1/t.$$

$$\text{Звідси } t - 1/t = s; \quad t^2 - st - 1 = 0; \quad t = (1/2) \left( s + \sqrt{s^2 + 4} \right).$$

Підставляючи вираз для параметра  $t$  у задане рівняння кривої, перейдемо до її натуральної параметризації:

$$\vec{r}(s) = \sqrt{2} \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2} \cdot \vec{i} + \frac{2}{s + \sqrt{s^2 + 4}} \cdot \vec{j} + \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2} \cdot \vec{k}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

### 1.5 Головна нормаль і бінормаль. Кривина кривої

Нехай просторова крива  $L$  є регулярною другого порядку. Зафіксуємо на ній точку  $M_0 = M(t_0)$ , як точку відліку довжини дуги, та виберемо додатний напрям на кривій. Перейдемо до натуральної параметризації кривої  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , де  $s$  – довжина дуги  $M_0M$ . Тоді  $\vec{\tau} = \vec{r}'(s)$  – одиничний вектор дотичної прямої. Для  $\vec{\tau}'(s)$ , як похідної сталого за модулем вектора, виконується умова  $\vec{\tau}'(s) \perp \vec{\tau}(s)$ , тобто  $\vec{r}''(s) \perp \vec{r}'(s)$ .

Кожна пряма, що проходить через точку  $M_0$  перпендикулярно до дотичної прямої, називається **нормальною прямою** до кривої. Зрозуміло, що всі нормалі лежать у нормальній площині. З усіх нормальних прямих до кривої виділяють дві особливі – головну нор-

маль і бінормаль. Нормальна пряма з напрямним вектором  $\vec{N} = \vec{\tau}'(s_0) = \vec{r}''(s_0)$  називається **головною нормаллю** до кривої в точці  $M_0$  (рис. 1.8). Позначимо через  $\vec{v}$  одиничний вектор головної нормалі. Тоді  $\vec{v} = \vec{N}(s_0) / |N(s_0)| = \vec{r}''(s_0) / |\vec{r}''(s_0)|$ .

У випадку довільної параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  кривої  $L$  напрямний вектор головної нормалі  $\vec{N}(t_0) = (N_x(t_0); N_y(t_0); N_z(t_0))$  обчислюється як подвійний векторний добуток:

$$\vec{N}(t_0) = (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \times \vec{r}'(t_0).$$

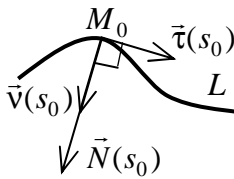


Рисунок 1.8

Канонічні рівняння головної нормалі до лінії  $L$  у точці  $M_0 = M(t_0)$  мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{N_x(t_0)} = \frac{y - y_0}{N_y(t_0)} = \frac{z - z_0}{N_z(t_0)}.$$

Нормальна пряма, що перпендикулярна як до дотичної, так і до головної нормалі, напрямний вектор якої  $\vec{B}(t_0) = (B_x(t_0); B_y(t_0); B_z(t_0))$  визначається як векторний добуток  $\vec{B}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)$ , називається **бінормаллю** до кривої в точці  $M_0$ . Її одиничний вектор  $\vec{\beta}$  зв'язаний з одиничними векторами дотичної  $\vec{\tau}$  та головної нормалі  $\vec{v}$  рівністю  $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{v}$ .

Канонічні рівняння бінормалі до лінії  $L$  у точці  $M_0 = M(t_0)$  мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{B_x(t_0)} = \frac{y - y_0}{B_y(t_0)} = \frac{z - z_0}{B_z(t_0)}.$$

Розглянемо на кривій  $L$  дві близькі точки  $M_0 = M(s_0)$  і  $M = M(s_0 + \Delta s)$  та проведемо в них дотичні. Абсолютна величина відношення кута повороту  $\Delta\phi$  дотичної, що відповідає шляху  $M_0M$ , пройденому точкою дотику, до довжини  $\Delta s$  цього шляху, називається середньою кривиною дуги  $M_0M$ :  $k_{\text{сеп}} = |\Delta\phi / \Delta s|$

(рис. 1.9). Границя  $k_1$ , до якої прагне середня кривина при  $\Delta s \rightarrow 0$ , називається **кривиною** кривої в точці  $M_0$ :  $k_1 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta\varphi/\Delta s|$ .

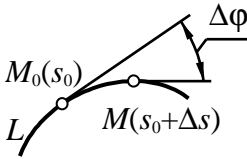


Рисунок 1.9

Оскільки  $\Delta\varphi$  є кутом між одиничними векторами дотичних  $\vec{\tau}(s_0)$  і  $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$  (рис. 1.10), то з рівнобедреного  $\Delta ABC$  маємо:  $|\Delta\vec{\tau}(s_0)| = |BC| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ .

Розділимо  $|\Delta\vec{\tau}(s_0)|$  на  $\Delta s$  і перейдемо до границі при  $\Delta s \rightarrow 0$ . Дістанемо:

$$|\vec{r}''(s_0)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}(s_0)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin|\Delta\varphi/2|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin|\Delta\varphi/2|}{|\Delta\varphi/2|} \times$$

$$\times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = 1 \cdot k_1 = k_1.$$

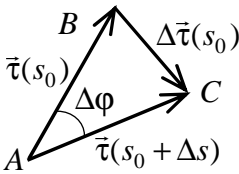


Рисунок 1.10

$$\text{Звідси } k_1 = |\vec{r}''(s_0)|.$$

Тоді для одиничного вектора головної нормалі маємо  $\vec{\nu}(s_0) = (1/k_1) \vec{r}''(s_0)$ .

$$\text{Звідки } \vec{\tau}'(s_0) = \vec{r}''(s_0) = k_1 \vec{\nu}(s_0).$$

Якщо дуга  $M_0M$  – частина прямої, то  $\Delta\varphi = 0$  і тоді кривина прямої  $k_1 = 0$ . Якщо дуга  $M_0M$  – частина кола радіуса  $R$ , то  $\Delta s = R\Delta\varphi$  і тоді кривина кола  $k_1 = 1/R$ .

Величина  $\rho$ , обернена до кривини, називається **радіусом кривини** кривої:  $\rho = 1/k_1$ . Для кола  $\rho = R$ , для прямої  $\rho = +\infty$ .

Точка  $M_0$  на кривій, у якій кривина дорівнює нулю  $k_1 = 0$ , є **точкою розпрямлення** цієї кривої.

*Зауваження 1.* Кривина довільної кривої невід'ємна, але в деяких випадках їй присвоюють знак: якщо орт  $\vec{\tau} = \vec{r}'(s)$  дотичної прямої при переміщенні точки по кривій у напрямі зростання натурального параметра  $s$  обертається у додатному напрямі (проти ру-

ху годинникової стрілки), то  $k_1 > 0$  (крива напрямлена опуклістю вниз) і, навпаки, якщо  $\vec{\tau} = \vec{r}'(s)$  обертається у від'ємному напрямі (за рухом годинникової стрілки), то  $k_1 < 0$  (крива спрямована опуклістю вгору) (рис. 1.11).

Виведемо формулу для обчислення кривини кривої  $L$  у випадку довільної параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  за правилом диференціювання складеної функції, вважаючи параметр  $t$  залежним від довжини дуги  $s$ :  $t = t(s)$ . Дістанемо

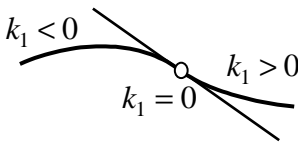


Рисунок 1.11

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds};$$

$$\vec{r}''(s) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Обчислимо векторний добуток:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s) &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right) \times \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}\right) = \\ &= (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) : \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|^3}, \end{aligned}$$

де враховано, що векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю, і  $ds/dt = |\vec{r}'|$ .

Узявши модуль від лівої та правої частин останньої рівності з врахуванням  $|\vec{r}'(s)| = 1$ ,  $|\vec{r}''(s)| = k_1$  і  $\vec{r}''(s) \perp \vec{r}'(s)$ , одержимо:

$$1 \cdot k_1 \cdot \sin 90^\circ = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'|^3}. \quad \text{Звідси } k_1 = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'|^3}.$$

*Зауваження 2.* Якщо плоска крива  $L$  задана рівнянням  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ , то

$$k_1 = |x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)| / \left( (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{3/2}.$$

*Зауваження 3.* Якщо плоска крива  $L$  задана в явному вигляді рівнянням  $y = y(x)$ , то  $k_1 = |y''(x)| / \left(1 + (y'(x))^2\right)^{3/2}$ .

*Приклад.* Для заданої просторової кривої  $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $M_0$ , що відповідає вказаному значенню параметра  $t_0$ , знайти: 1) канонічні рівняння бінормалі  $L_\beta$  і головної нормалі  $L_\nu$ ; 2) кривину  $k_1$  лінії:

$$\text{а) } L: \vec{r}(t) = e^{-2t} \vec{i} - e^t \cos t \cdot \vec{j} + (5 \sin t - 3e^t) \vec{k}, \quad t_0 = 0;$$

$$\text{б) } L: \vec{r}(t) = (3t - \ln t) \vec{i} - t^{-2} \vec{j} + (t^2 - \ln t) \vec{k}, \quad t_0 = 1.$$

$$\square \text{ а) Обчислимо координати точки } M_0: \quad x_0 = e^0 = 1;$$

$$y_0 = -e^0 \cos 0 = -1; \quad z_0 = 5 \sin 0 - 3e^0 = -3; \quad M_0(1; -1; -3).$$

Продиференціюємо двічі вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  і обчислимо її першу та другу похідні в точці  $M_0$ :  $x'(t) = -2e^{-2t}$ ;

$$y'(t) = -(e^t \cos t - e^t \sin t); \quad z'(t) = 5 \cos t - 3e^t; \quad x'(0) = -2;$$

$$y'(0) = -1; \quad z'(0) = 2; \quad \vec{T}(t_0) = \vec{r}'(t_0) = (-2; -1; 2) - \text{вектор}$$

дотичної;  $x''(t) = 4e^{-2t}$ ;  $y''(t) = 2e^t \sin t$ ;  $z''(t) = -5 \sin t - 3e^t$ ;

$$x''(0) = 4; \quad y''(0) = 0; \quad z''(0) = -3; \quad \vec{r}''(t_0) = (4; 0; -3).$$

Обчислимо вектор бінормалі  $\vec{B}(t_0)$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{B}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= ((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 0) \vec{i} - ((-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 4) \vec{j} +$$

$$+ ((-2) \cdot 0 - (-1) \cdot 4) \vec{k} = 3 \vec{i} + 2 \vec{j} + 4 \vec{k}; \quad \vec{B}(t_0) = (3; 2; 4).$$

Знайдемо канонічні рівняння бінормалі  $L_\beta$  у точці  $M_0$ :



$$L_{\beta}: \frac{x-x_0}{B_x(t_0)} = \frac{y-y_0}{B_y(t_0)} = \frac{z-z_0}{B_z(t_0)}; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{4}.$$

Обчислимо вектор головної нормалі  $\vec{N}(t_0)$  у точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}(t_0) = \vec{B}(t_0) \times \vec{T}(t_0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1))\vec{i} - \\ &- (3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2))\vec{j} + (3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2))\vec{k} = 8\vec{i} - 14\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{N}(t_0) &= (8; -14; 1). \end{aligned}$$

Знайдемо канонічні рівняння головної нормалі  $L_\nu$  у точці  $M_0$ :

$$L_\nu: \frac{x-x_0}{N_x(t_0)} = \frac{y-y_0}{N_y(t_0)} = \frac{z-z_0}{N_z(t_0)}; \quad \frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{-14} = \frac{z+3}{1}.$$

Знайдемо кривину  $k_1$  лінії в точці  $M_0$ :

$$k_1 = \frac{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{|\vec{B}(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}}{\left(\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}\right)^3} = \frac{\sqrt{29}}{27}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

## 1.6 Стична та спрямна площини. Супровідний тригранник

Якщо в точці  $M_0$  просторової кривої  $L$  існує дотична пряма, то площина, що проходить через дотичну, називається **дотичною площиною** до кривої. У будь-якій неособливій точці гладкої кривої є безліч дотичних площин, з яких виділяють дві особливі – стичну та спрямну площини.

Нехай просторова крива  $L$  є регулярною другого порядку. Серед усіх дотичних площин, які проходять через довільно взятую точку  $M_0$  кривої  $L$ , існує площина, що локально найтісніше прилягає до кривої. Вона називається **стичною площиною** кривої. Ін-

шими словами, стичною площиною кривої є граничне положення, до якого прагне площина, що проходить через точку  $M_0$  і ще дві інші точки кривої  $M_1$  і  $M_2$ , які необмежено наближаються вздовж кривої до точки  $M_0$ .

Нехай крива  $L$  задана в натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ,  $M_0 = M(s_0)$  – фіксована точка на ній і  $\alpha$  – площина з вектором нормалі  $\vec{B}$ , що проходить через точку  $M_0$ . Позначимо через  $h = MP$  відстань від довільної точки  $M = M(s_0 + \Delta s)$  кривої  $L$  до площини  $\alpha$ , а через  $d$  – відстань від точки  $M$  до  $M_0$  (рис. 1.12). Площина  $\alpha$  буде стичною площиною кривої в точці  $M_0$ , якщо відношення  $h/d^2$  прямує до нуля, коли точка  $M$  уздовж кривої необмежено наближається до точки  $M_0$ . Інакше кажучи, за умови, що відхилення точок кривої від площини в околі точки  $M_0$  є нескінченно малими третього порядку чи вище відносно до довжини  $s$  дуги кривої.

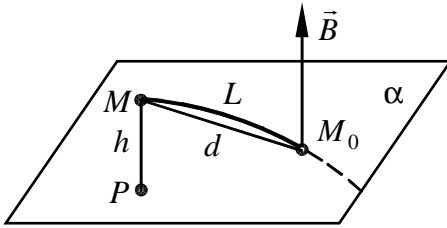


Рисунок 1.12

*Зауваження 1.* Регулярна крива другого порядку має в кожній точці стичну площину. При цьому стична площина або єдина та не залежить від вибору параметризації кривої, або довільна дотична площина є стичною.

У точці розпрямлення кривої будь-яка дотична площина слугуватиме стичною.

*Зауваження 2.* Оскільки відхилення точок просторової кривої від стичної площини в околі точки  $M_0$  є нескінченно малими нижче третього порядку відносно приросту параметра  $s$ , то з точністю до нескінченно малих другого порядку криву в околі точки  $M_0$  можна вважати плоскою та розташованою в її стичній площині.

*Зауваження 3.* Кривина  $k_1$  кривої дорівнює кривині її проєкції

на стичну площину.

*Зауваження 4.* Стична площина проходить через дотичну та головну нормаль і перпендикулярна до бінормалі, тобто вектор бінормалі  $\vec{B} = (B_x; B_y; B_z)$  слугує її нормальним вектором. Отже, у разі довільної параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  кривої  $L$  рівняння стичної площини у точці  $M_0 = M(t_0)$  можна подати у вигляді:

$$B_x(t_0) \cdot (x - x_0) + B_y(t_0) \cdot (y - y_0) + B_z(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Площина, що проходить через точку  $M_0 = M(t_0)$  і проведених в ній дотичну та бінормаль, називається **спрямною площиною** кривої. Вектор головної нормалі  $\vec{N} = (N_x; N_y; N_z)$  служить її нормальним вектором. Отже, у разі довільної параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  кривої  $L$  рівняння спрямної площини у точці  $M_0 = M(t_0)$  можна подати у вигляді:

$$N_x(t_0) \cdot (x - x_0) + N_y(t_0) \cdot (y - y_0) + N_z(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Оскільки дотична, головна нормаль і бінормаль у точці  $M_0$  кривої  $L$  утворюють між собою прямі кути, то можна з цією точкою пов'язати локальну декартову систему координат. Одиничні взаємно ортогональні вектори дотичної  $\vec{\tau}$ , головної нормалі  $\vec{\nu}$  та бінормалі  $\vec{\beta}$  можна взяти за новий базис  $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$  простору, а точку  $M_0$  – за початок координат. Множину  $\{M_0, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$  називають **канонічним репером (репером Френе)** кривої  $L$  у точці  $M_0$ . При цьому роль координатних площин відіграють: стична площина  $M_0, \vec{\tau}, \vec{\nu}$ ; нормальна площина  $M_0, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ ; спрямна площина  $M_0, \vec{\tau}, \vec{\beta}$  (рис. 1.13). У разі переміщення фіксованої точки  $M_0$  уздовж кривої  $L$  разом з нею переміщується по лінії також каноніч-

ний репер, який також називають *рухомих репером* чи *супровідним тригранником* кривої.

*Зауваження 5.* У точці розпрямлення кривої стична площина, а, отже, головна нормаль і бінормаль стають невизначеними. У разі ізольованої точки розпрямлення для них існують граничні положення при наближенні до цієї точки. Зазначені граничні положення можна вибрати за стичну площину, головну нормаль і бінормаль.

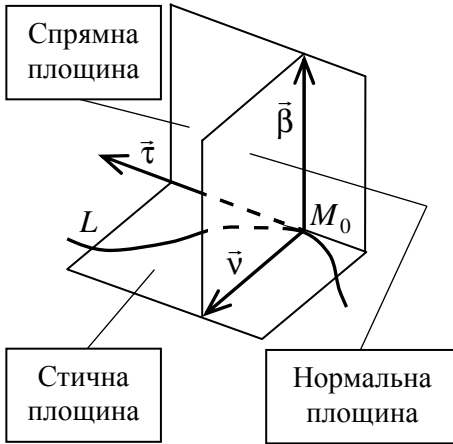


Рисунок 1.13

Супровідний тригранник відіграє велику роль в теорії кривих, оскільки визначає в кожній точці  $M_0$  лінії  $L$  місцеву систему координат з ортами  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\beta}$ , яка природно пов'язана з кривою та повністю визначається її властивостями. Неістотна свобода полягає тільки у довільності вибору напрямку відліку довжини дуги. Якщо змінити цей напрям на зворотній, то й вектор  $\vec{\tau}$  змінить свій напрям на протилежний

завдяки зміні знака у диференціалі довжини дуги  $ds$ . Що стосується вектора  $\vec{\nu}$ , то його напрям збережеться, бо  $\vec{\tau}$  і  $ds$  змінюють свої знаки одночасно. Вектор  $\vec{\beta}$  змінить свій знак на протилежний, оскільки  $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$ .

*Приклад.* Для заданої просторової кривої  $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $M_0$ , що відповідає вказаному значенню параметра  $t_0$ , знайти: 1) загальне рівняння стичної площини  $\alpha_\beta$ ; 2) загальне рівняння спрямованої площини  $\alpha_\nu$ ; 3) кривину  $k_1$  лінії:

а)  $L: \vec{r}(t) = (t^2 - 5 \ln t) \vec{i} + (t + 1/t) \vec{j} + 2(t + \ln t) \vec{k}, t_0 = 1;$

б)  $L: \vec{r}(t) = (e^t + 2 \sin t) \vec{i} + (e^t - \sin t) \vec{j} + 4t \cos t \cdot \vec{k}, t_0 = 0.$

□ а) Обчислимо координати точки  $M_0$ :  $x_0 = 1^2 - 5 \ln 1 = 1$ ;  
 $y_0 = 1 + 1/1 = 2$ ;  $z_0 = 2(1 + \ln 1) = 2$ ;  $M_0(1; 2; 2)$ .

Продиференціюємо двічі вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  і обчислимо її першу та другу похідні в точці  $M_0$ :

$$x'(t) = 2t - 5/t; \quad y'(t) = 1 - 1/t^2; \quad z'(t) = 2(1 + 1/t); \quad x'(1) = -3;$$

$$y'(1) = 0; \quad z'(1) = 4; \quad \vec{T}(t_0) = \vec{r}'(t_0) = (-3; 0; 4) \text{ – вектор дотичної};$$

$$x''(t) = 2 + 5/t^2; \quad y''(t) = 2/t^3; \quad z''(t) = -2/t^2;$$

$$x''(1) = 7; \quad y''(1) = 2; \quad z''(1) = -2; \quad \vec{r}''(t_0) = (7; 2; -2).$$

Обчислимо вектор бінормалі  $\vec{B}(t_0)$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{B}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 \cdot (-2) - 4 \cdot 2)\vec{i} - (-3 \cdot (-2) - 4 \cdot 7)\vec{j} +$$

$$+ (-3 \cdot 2 - 0 \cdot 7)\vec{k} = -8\vec{i} + 22\vec{j} - 6\vec{k}; \quad \vec{B}(t_0) = (-8; 22; -6).$$

Знайдемо загальне рівняння стичної площини  $\alpha_\beta$  у точці  $M_0$ :

$$\alpha_\beta: B_x(t_0) \cdot (x - x_0) + B_y(t_0) \cdot (y - y_0) + B_z(t_0) \cdot (z - z_0) = 0;$$

$$-8 \cdot (x - 1) + 22 \cdot (y - 2) - 6 \cdot (z - 2) = 0 \quad | :(-2);$$

$$4(x - 1) - 11(y - 2) + 3(z - 2) = 0; \quad 4x - 11y + 3z + 12 = 0.$$

Обчислимо вектор головної нормалі  $\vec{N}(t_0)$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{N}(t_0) = \vec{B}(t_0) \times \vec{T}(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 22 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (22 \cdot 4 - (-6) \cdot 0)\vec{i} - ((-8) \cdot 4 - (-6) \cdot (-3))\vec{j} +$$

$$+(-8 \cdot 0 - 22 \cdot (-3))\vec{k} = 88\vec{i} + 50\vec{j} + 66\vec{k}; \quad \vec{N}(t_0) = (88; 50; 66).$$

Знайдемо загальне рівняння спрямної площини  $\alpha_v$  у точці  $M_0$ :

$$\alpha_v: N_x(t_0) \cdot (x - x_0) + N_y(t_0) \cdot (y - y_0) + N_z(t_0) \cdot (z - z_0) = 0;$$

$$88 \cdot (x - 1) + 50 \cdot (y - 2) + 66 \cdot (z - 2) = 0 \mid : 2;$$

$$44(x - 1) + 25(y - 2) + 33(z - 2) = 0; \quad 44x + 25y + 33z - 160 = 0.$$

Знайдемо кривину  $k_1$  лінії в точці  $M_0$ :

$$k_1 = \frac{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{|\vec{B}(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{\sqrt{(-8)^2 + 22^2 + (-6)^2}}{(\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2})^3} = \frac{2\sqrt{146}}{125}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

## 1.7 Скрут просторової кривої. Формули Френе

Розглянемо на просторовій кривій  $L: \vec{r} = \vec{r}(s)$  дві близькі точки  $M_0 = M(s_0)$  і  $M = M(s_0 + \Delta s)$  та проведемо в них стичні площини та одиничні вектори бінормалей  $\vec{\beta}(s_0)$  і  $\vec{\beta}(s_0 + \Delta s)$ . Позначимо через  $\Delta\theta$  кут між стичними площинами, або, що те ж саме, кут між бінормалями. Відношення цього кута  $\Delta\theta$  до довжини  $\Delta s$  дуги  $M_0M$  називається середнім скрутом дуги  $M_0M$ :

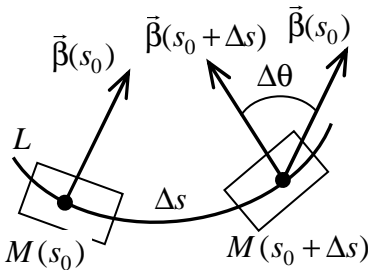


Рисунок 1.14

$k_{2сер} = \Delta\theta/\Delta s$  (рис. 1.14). Границя  $k_2$ , до якої прагне середній скрут при  $\Delta s \rightarrow 0$ , називається **скрутом** кривої в точці  $M_0$ :

$$k_2 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

*Зуваження.* У разі плоскої кривої  $\Delta\theta = 0$ , тому  $k_2 = 0$ , тобто скрут у кожній точці плоскої кри-

вої дорівнює нулю. Навпаки, якщо у кожній точці кривої скрут дорівнює нулю, то крива – плоска.

Регулярна третього порядку крива  $L$  має в кожній точці  $M_0$ , де кривина відмінна від нуля  $k_1 \neq 0$ , цілком певний скрут, який при натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  обчислюється за формулою

$$k_2 = -\vec{\beta}'(s_0) \cdot \vec{v}(s_0) = k_1^{-2} (\vec{r}'(s_0) \times \vec{r}''(s_0)) \cdot \vec{r}'''(s_0).$$

У випадку довільної параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  кривої  $L$  маємо:

$$k_2 = \frac{(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \cdot \vec{r}'''(t_0)}{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|^2}.$$

Скрут  $k_2$  додатний, якщо стична площина обертається навколо дотичної проти годинникової стрілки, коли дивитися з кінця вектора  $\vec{t}$ , тобто обертається в напрямі від  $\vec{v}$  до  $\vec{\beta}$ . Скрут  $k_2$  від'ємний, якщо обертання відбувається в протилежному напрямі – від  $\vec{\beta}$  до  $\vec{v}$ , при цьому  $\vec{\beta}'(s) = -k_2 \vec{v}(s)$ .

*Приклад 1.* Для заданої просторової кривої  $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $M_0$ , що відповідає вказаному значенню параметра  $t_0$ , знайти кривину  $k_1$  і скрут  $k_2$  лінії:

а)  $L: \vec{r}(t) = (t^3 - t^2 \ln t) \vec{i} + (\ln t - 1/t) \vec{j} + t \ln t \cdot \vec{k}, \quad t_0 = 1;$

б)  $L: \vec{r}(t) = 2e^{-t} \vec{i} - e^t \cos t \cdot \vec{j} + (\sin t + e^t) \vec{k}, \quad t_0 = 0.$

□ а) Продиференціюємо тричі вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  та обчислимо відповідні похідні в точці  $M_0$ :  $x'(t) = 3t^2 - 2t \ln t - t$ ;

$$y'(t) = 1/t + 1/t^2; \quad z'(t) = \ln t + 1; \quad x'(1) = 2; \quad y'(1) = 2; \quad z'(1) = 1;$$

$$\vec{r}'(t_0) = (2; 2; 1); \quad x''(t) = 6t - 2 \ln t - 3; \quad y''(t) = -1/t^2 - 2/t^3;$$

$$z''(t) = 1/t; \quad x''(1) = 3; \quad y''(1) = -3; \quad z''(1) = 1; \quad \vec{r}''(t_0) = (3; -3; 1);$$

$$x'''(t) = 6 - 2/t; \quad y'''(t) = 2/t^3 + 6/t^4; \quad z'''(t) = -1/t^2;$$

$$x'''(1) = 4; \quad y'''(1) = 8; \quad z'''(1) = -1; \quad \vec{r}'''(t_0) = (4; 8; -1).$$

Обчислимо вектор бінормалі  $\vec{B}(t_0)$  в точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{B}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3))\vec{i} - (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3)\vec{j} + \\ &+ (2 \cdot (-3) - 2 \cdot 3)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} - 12\vec{k}; \quad \vec{B}(t_0) = (5; 1; -12).\end{aligned}$$

Знайдемо кривину  $k_1$  лінії в точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned}|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)| &= |\vec{B}(t_0)| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-12)^2} = \sqrt{170}; \\ |\vec{r}'(t_0)| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3; \quad k_1 = \frac{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{\sqrt{170}}{27}.\end{aligned}$$

Знайдемо скрут  $k_2$  лінії в точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned}(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \cdot \vec{r}'''(t_0) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot (-1) + \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 8 \cdot 2 = 40; \\ k_2 &= \frac{(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \cdot \vec{r}'''(t_0)}{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|^2} = \frac{40}{170} = \frac{4}{17}.\end{aligned}$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

*Приклад 2.* Знайти кривину  $k_1$  і скрут  $k_2$  лінії  $L: y^2 = x, x^2 = z$  у довільній точці.

□ Запишемо рівняння заданої кривої у векторно-параметричній формі, взявши за параметр  $y: t = y$ . Тоді

$$L: x = y^2 = t^2; \quad y = t; \quad z = x^2 = t^4 \quad \text{або} \quad \vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + t^4 \vec{k}.$$

Продиференціюємо тричі вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ :



$$\begin{aligned}
 x'(t) &= 2t; & y'(t) &= 1; & z'(t) &= 4t^3; & \vec{r}'(t) &= (2t; 1; 4t^3); \\
 x''(t) &= 2; & y''(t) &= 0; & z''(t) &= 12t^2; & \vec{r}''(t) &= (2; 0; 12t^2); \\
 x'''(t) &= 0; & y'''(t) &= 0; & z'''(t) &= 24t; & \vec{r}'''(t) &= (0; 0; 24t).
 \end{aligned}$$

Знайдемо кривину  $k_1$  лінії:

$$\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 1 & 4t^3 \\ 2 & 0 & 12t^2 \end{vmatrix} = 12t^2 \vec{i} - 16t^3 \vec{j} - 2\vec{k};$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = |\vec{B}| = 2\sqrt{36t^4 + 64t^6 + 1};$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 1 + 16t^6}; \quad k_1 = \frac{2\sqrt{36t^4 + 64t^6 + 1}}{\sqrt{(4t^2 + 1 + 16t^6)^3}}.$$

Знайдемо скрут  $k_2$  лінії:

$$(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 4t^3 \\ 2 & 0 & 12t^2 \\ 0 & 0 & 24t \end{vmatrix} = -48t;$$

$$k_2 = \frac{-48t}{4(36t^4 + 64t^6 + 1)} = -\frac{12t}{36t^4 + 64t^6 + 1}. \quad \blacksquare$$

Нехай крива  $L$  задана в натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Похідні одиничних векторів дотичної  $\vec{\tau}(s)$ , головної нормалі  $\vec{\nu}(s)$  та бінормалі  $\vec{\beta}(s)$  можна виразити через самі ці вектори та значення кривини  $k_1(s)$  і скруту  $k_2(s)$  за **формулами Френе**:

$$\begin{cases} \vec{\tau}'(s) = k_1(s) \cdot \vec{\nu}(s); \\ \vec{\nu}'(s) = -k_1(s) \cdot \vec{\tau}(s) + k_2(s) \cdot \vec{\beta}(s); \\ \vec{\beta}'(s) = -k_2(s) \cdot \vec{\nu}(s). \end{cases}$$

Формули Френе мають диференціальний характер і є основними рівняннями теорії кривих. Зокрема, вони дають змогу визна-

чити коефіцієнти розкладу похідних радіус-вектора  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  точки кривої за базисом  $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$  супровідного тригранника. Наприклад:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(s) &= \vec{\tau}(s); \quad \vec{r}''(s) = k_1(s) \cdot \vec{\nu}(s); \\ \vec{r}'''(s) &= -k_1(s) \cdot \vec{\tau}(s) + k_2(s) \cdot \vec{\beta}(s) - k_1'(s) \cdot \vec{\nu}(s). \\ \vec{r}'''(s) &= -k_1(s) \cdot \vec{\tau}(s) + k_2(s) \cdot \vec{\beta}(s) - k_1'(s) \cdot \vec{\nu}(s).\end{aligned}$$

Для кривої  $L$ , що задана в натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , її кривина  $k_1(s)$  і скрут  $k_2(s)$  є функціями параметра  $s$ . Відповідні співвідношення

$$k_1 = k_1(s); \quad k_2 = k_2(s)$$

називають **натуральними рівняннями** кривої. Вони залежать тільки від самої кривої та не залежать від вибору системи координат. Зі свого боку, натуральні рівняння визначають криву однозначно з точністю до її положення в просторі.

*Приклад 3.* Для заданої просторової кривої  $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$  у точці  $M_0$ , що відповідає вказаному значенню параметра  $t_0$ , знайти: 1) одиничні вектори дотичної  $\vec{\tau}$ , головної нормалі  $\vec{\nu}$  та бінормалі  $\vec{\beta}$ ; 2) канонічні рівняння дотичної прямої  $L_\tau$  і загальне рівняння нормальної площини  $\alpha_\tau$ ; 3) канонічні рівняння бінормалі  $L_\beta$  і загальне рівняння стичної площини  $\alpha_\beta$ ; 4) канонічні рівняння головної нормалі  $L_\nu$  і загальне рівняння спрямної площини  $\alpha_\nu$ ; 5) кривину  $k_1$  і скрут  $k_2$  лінії:

а)  $L: \vec{r}(t) = (e^t - 3\sin t)\vec{i} + (7t - e^t)\vec{j} - (3t + \cos t)\vec{k}, \quad t_0 = 0;$

б)  $L: \vec{r}(t) = e^{t-1}\vec{i} + 2e^{t-1}\ln(t+1) \cdot \vec{j} - t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

□ а) Обчислимо координати точки  $M_0$ :  $x_0 = e^0 - 3\sin 0 = 1;$   
 $y_0 = 7 \cdot 0 - e^0 = -1; \quad z_0 = -(3 \cdot 0 + \cos 0) = -1; \quad M_0(1; -1; -1).$

Продиференціюємо тричі вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  та обчис-

лимо відповідні похідні в точці  $M_0$ :  $x'(t) = e^t - 3\cos t$ ;

$$y'(t) = 7 - e^t; \quad z'(t) = -3 + \sin t; \quad x'(0) = -2; \quad y'(0) = 6; \quad z'(0) = -3;$$

$$\vec{r}'(t_0) = (-2; 6; -3); \quad x''(t) = e^t + 3\sin t; \quad y''(t) = -e^t; \quad z''(t) = \cos t;$$

$$x''(0) = 1; \quad y''(0) = -1; \quad z''(0) = 1; \quad \vec{r}''(t_0) = (1; -1; 2);$$

$$x'''(t) = e^t + 3\cos t; \quad y'''(t) = -e^t; \quad z'''(t) = -\sin t;$$

$$x'''(0) = 4; \quad y'''(0) = -1; \quad z'''(0) = 0; \quad \vec{r}'''(t_0) = (4; -1; 0).$$

Знайдемо вектор дотичної  $\vec{T}$  та її орт  $\vec{\tau}$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{T}(t_0) = \vec{r}'(t_0) = (-2; 6; -3); \quad |\vec{T}(t_0)| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = 7;$$

$$\vec{\tau} = \vec{T}(t_0) / |\vec{T}(t_0)| = (-2/7; 6/7; -3/7).$$

Обчислимо вектор бінормалі  $\vec{B}$  та її орт  $\vec{\beta}$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{B}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1))\vec{i} -$$

$$-(-2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1)\vec{j} + (-2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k};$$

$$\vec{B}(t_0) = (3; -1; -4); \quad |\vec{B}(t_0)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26};$$

$$\vec{\beta} = \vec{B}(t_0) / |\vec{B}(t_0)| = (3/\sqrt{26}; -1/\sqrt{26}; -4/\sqrt{26}).$$

Знайдемо вектор головної нормалі  $\vec{N}$  та її орт  $\vec{v}$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{N}(t_0) = \vec{B}(t_0) \times \vec{T}(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = (-1 \cdot (-3) - (-4) \cdot 6)\vec{i} -$$

$$-(3 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-2))\vec{j} + (3 \cdot 6 - (-1) \cdot (-2))\vec{k} = 27\vec{i} + 17\vec{j} + 16\vec{k};$$

$$\vec{N}(t_0) = (27; 17; 16); \quad \vec{N}(t_0) = \sqrt{27^2 + 17^2 + 16^2} = \sqrt{1274}; \quad .$$

$$\vec{v} = \vec{N}(t_0) / |\vec{N}(t_0)| = (27/\sqrt{1274}; 17/\sqrt{1274}; 16/\sqrt{1274}).$$

Складемо канонічні рівняння дотичної прямої  $L_\tau$  у точці  $M_0$ :

$$\frac{x-x_0}{T_x(t_0)} = \frac{y-y_0}{T_y(t_0)} = \frac{z-z_0}{T_z(t_0)}; \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+1}{-3} \quad \left| \times(-1); \right.$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{3}.$$

Знайдемо загальне рівняння нормальної площини  $\alpha_\tau$  у точці  $M_0$ :

$$T_x(t_0) \cdot (x-x_0) + T_y(t_0) \cdot (y-y_0) + T_z(t_0) \cdot (z-z_0) = 0;$$

$$-2(x-1) + 6(y+1) - 3(z+1) = 0 \quad \left| \times(-1); \right.$$

$$2(x-1) - 6(y+1) + 3(z+1) = 0; \quad 2x - 6y + 3z - 5 = 0.$$

Складемо канонічні рівняння бінормалі  $L_\beta$  у точці  $M_0$ :

$$L_\beta: \frac{x-x_0}{B_x(t_0)} = \frac{y-y_0}{B_y(t_0)} = \frac{z-z_0}{B_z(t_0)}; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-4}.$$

Знайдемо загальне рівняння стичної площини  $\alpha_\beta$  у точці  $M_0$ :

$$\alpha_\beta: B_x(t_0) \cdot (x-x_0) + B_y(t_0) \cdot (y-y_0) + B_z(t_0) \cdot (z-z_0) = 0;$$

$$3 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+1) - 4 \cdot (z+1) = 0; \quad 3x - y - 4z - 8 = 0.$$

Складемо канонічні рівняння головної нормалі  $L_\nu$  у точці  $M_0$ :

$$L_\nu: \frac{x-x_0}{N_x(t_0)} = \frac{y-y_0}{N_y(t_0)} = \frac{z-z_0}{N_z(t_0)}; \quad \frac{x-1}{27} = \frac{y+1}{17} = \frac{z+1}{16}.$$

Знайдемо загальне рівняння спрямної площини  $\alpha_\nu$  у точці  $M_0$ :

$$\alpha_v: N_x(t_0) \cdot (x - x_0) + N_y(t_0) \cdot (y - y_0) + N_z(t_0) \cdot (z - z_0) = 0;$$

$$27 \cdot (x - 1) + 17 \cdot (y + 1) + 16 \cdot (z + 1) = 0; \quad 27x + 17y + 16z + 6 = 0.$$

Обчислимо кривину  $k_1$  лінії в точці  $M_0$ :

$$k_1 = \frac{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3} = \frac{|\vec{B}(t_0)|}{|\vec{T}(t_0)|^3} = \frac{\sqrt{26}}{343}.$$

Знайдемо скрут  $k_2$  лінії в точці  $M_0$ :

$$(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \cdot \vec{r}'''(t_0) = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot 0 +$$

$$+ 6 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot (-1) \cdot 4 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 13;$$

$$|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)| = |\vec{B}(t_0)| = \sqrt{26}$$

$$k_2 = \frac{(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \cdot \vec{r}'''(t_0)}{|\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)|^2} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

*Приклад 4.* Нехай крива  $L$  задана в натуральній параметризації  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Довести, що для довільної просторової кривої  $L$  справджується рівність  $(\vec{\tau}(s) \times \vec{\beta}(s)) \cdot \vec{\beta}'(s) = k_2(s)$ .

□ Знайдемо векторний добуток  $\vec{\tau}(s) \times \vec{\beta}(s) = -\vec{v}(s)$ . За формулами Френе маємо:  $\vec{\beta}'(s) = -k_2(s) \cdot \vec{v}(s)$ . Перемножуючи скалярно вектори  $-\vec{v}(s)$  і  $-k_2(s) \cdot \vec{v}(s)$ , для заданого в умові змішаного добутку отримаємо:

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}(s) \times \vec{\beta}(s)) \cdot \vec{\beta}'(s) &= (\vec{v}(s)) \cdot (-k_2(s) \cdot \vec{v}(s)) = \\ &= k_2(s) \cdot (\vec{v}(s)) \cdot \vec{v}(s) = k_2(s) \cdot 1 = k_2(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.8 Контрольні запитання та вправи

1. Дайте означення вектор-функції скалярного аргументу.
2. Що таке годограф вектор-функції?
3. Дайте означення границі вектор-функції скалярного аргументу.
4. Як знаходиться границя алгебраїчної суми, скалярного та векторного добутків двох вектор-функцій, добутку вектор-функції на скаляр?
5. Наведіть правила диференціювання вектор-функції.
6. Роз'ясніть геометричний зміст похідної вектор-функції.
7. Як пов'язані напрями похідної  $\vec{r}'(t)$  та самої вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  сталого модуля ?
8. Як пов'язані напрями похідної  $\vec{r}'(t)$  та самої вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  сталого напрямку?
9. Чи можна стверджувати, що для вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  справджується рівність  $|d\vec{r}(t)/dt| = d|\vec{r}(t)|/dt$  ?
10. Чи можна стверджувати, що для вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  справджується рівність  $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = |\vec{r}'(t)| \cdot |\vec{r}(t)|$  ?
11. Доведіть, що за умови  $d\vec{r}(t)/dt = \vec{r}(t)$  вектор-функція  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  має сталий напрям.
12. Перевірте, що у довільній точці кривої  $\vec{r}(t) = 2\cos^2 t \cdot \vec{i} + \sin 2t \cdot \vec{j} + 2\sin t \cdot \vec{k}$  виконується умова  $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$ .
13. Дайте означення регулярної кривої.
14. Знайдіть параметричні рівняння кола  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ,  $a > 0$ , взявши за параметр  $t$  кутовий коефіцієнт променя, що виходить із початку координат.
15. Що таке натуральний параметр кривої?
16. Знайдіть натуральне рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  гіперболічної гвинтової лінії  $L: \vec{r}(t) = a \operatorname{ch} t \vec{i} + a \operatorname{sh} t \vec{j} + at \vec{k}$  ( $a > 0$ ).
17. Запишіть натуральне рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  евольвенти кола  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $z = 0$  ( $a > 0$ ), узявши за початкову точку  $M_0(a; 0; 0)$ ,  $t_0 = 0$ .

18. Знайдіть натуральне рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  кола  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $R > 0$ , узявши за початкову точку  $M_0(0; R)$ .

19. Що називається кривиною просторової кривої?

20. Поясніть геометричний зміст кривини кривої.

21. Обчисліть кривину циліндричної гвинтової лінії  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) у довільній точці.

22. Знайдіть точки дуги синусоїди  $y = \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ , в яких кривина досягає екстремальних значень.

23. Що таке дотична та нормаль до просторової кривої? Скільки можна провести нормалей через задану неособливу точку гладкої кривої?

24. Що називається нормальною площиною до просторової кривої?

25. Що називається дотичною площиною до просторової кривої? Скільки можна провести дотичних площин у заданій неособливій точці гладкої кривої?

26. Що таке головна нормаль і бінормаль?

27. Дайте означення стичної та спрямної площин кривої.

28. Назвіть осі та грані супровідного тригранника та покажіть на рисунку їх положення у довільній точці кривої.

29. Що називається скрутом просторової кривої?

30. Сформулюйте геометричний зміст скруту кривої.

31. Запишіть рівняння стичної площини до просторової кривої  $L: \vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3\ln t\vec{j} - 2t^2\vec{k}$  у точці  $M_0$ ,  $t_0 = 1$ .

32. Обчисліть кривину і скрут просторової кривої  $L: \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^4\vec{k}$  у точці  $M_0$ ,  $t_0 = 1$ .

33. Запишіть рівняння осей тригранника Френе циліндричної гвинтової лінії  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) у довільній точці кривої.

34. Запишіть формули Френе для просторової кривої  $L$ , що задана в натуральній параметризації:  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ .

35. Доведіть, що у довільній точці кривина просторової кривої дорівнює кривині її проекції на стичну площину в цій точці.

36. Знайдіть напрямний вектор дотичної до кривої

$\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} - (t^2 - 3)\vec{j} + 2t\vec{k}$  у точці  $M_0$ ,  $t_0 = -1$ .

37. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: площина, що найкраще прилягає до просторової кривої, називається: а) спрямною; б) дотичною; в) стичною; г) нормальною.

38. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильні слова, що є пропущеними у фразі: кривиною просторової лінії називають відношення приросту ... до відповідного приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля: а) кута повороту бінормалі; б) кута повороту дотичної прямої; в) кута повороту головної нормалі; г) кута повороту спрявної площини.

39. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильні слова, що є пропущеними у фразі: скрутом просторової лінії називають відношення приросту ... до відповідного приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля: а) кута повороту стичної площини; б) кута повороту дотичної прямої; в) кута повороту головної нормалі; г) кута повороту спрявної площини.

40. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: для довільної плоскої кривої скрут: а) необмежено зростає; б) необмежено спадає; в) дорівнює нулю; г) додатний.

41. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: натуральне рівняння кривої має вигляд  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , де  $s$  – натуральний параметр, яким слугує: а) довжина вписаної в криву ламаної між початковою  $M_0$  і змінною  $M$  точками кривої; б) довжина дуги кривої між її початковою  $M_0$  і змінною  $M$  точками; в) довжина хорди між початковою  $M_0$  і змінною  $M$  точками кривої; г) довжина дотичної, проведеної у змінній точці  $M$  кривої.

42. У яких точках просторової кривої  $L$ :  $\vec{r}(t) = (3t - t^3)\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j} + (3t + t^3)\vec{k}$  дотична паралельна до площини  $3x + y + z + 2 = 0$ ?

43. Обчисліть кривину та скрут гіперболічної гвинтової лінії  $L$ :  $\vec{r}(t) = a \operatorname{ch} t \vec{i} + a \operatorname{sh} t \vec{j} + at \vec{k}$  ( $a > 0$ ) у довільній точці.

44. Переконайтеся, що крива  $L$ :  $\vec{r}(t) = ((1+t)/(1-t))\vec{i} + (1/(1-t^2))\vec{j} + (1/(1+t))\vec{k}$  є плоскою, та знайти рівняння площини, в якій вона розташована.



## 2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОВЕРХОНЬ

### 2.1 Поняття поверхні та її параметризація

У прямокутній декартовій системі координат  $Oxyz$  у просторі поверхня  $S$  може задаватись у **явному вигляді** як графік функції  $z = f(x, y)$ , визначеної в деякій плоскій області. Проте таке подання поверхні істотно залежить від вибору системи координат і деякі досить прості поверхні (зокрема, сфера) не слугують графіками ні при якому виборі початку відліку та координатних осей. Загальніший спосіб задання поверхні – **неявний** рівнянням вигляду  $F(x, y, z) = 0$ . Однак таке рівняння може визначати множину, що не відповідає наочним інтуїтивним уявленням про поверхні. Наприклад, рівняння  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  задає лише одну точку  $O(0;0;0)$ , а рівняння  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$  – порожню множину. Тому для задання поверхні на функцію  $F(x, y, z)$  потрібно накладати деякі додаткові умови.

Ще один спосіб задання поверхні – **векторно-параметричний**, при якому радіус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  довільної точки  $M(x, y, z)$  поверхні  $S$  виражається у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

де  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  – неперервні функції двох параметрів  $u$  і  $v$ , які змінюються в деякій плоскій області  $D \subset R^2$ . Подання поверхні рівнянням  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  називають її **параметризацією**.

*Зауваження 1.* Образ відображення  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  також може вироджуватися в лінію чи точку. Для уникнення виродження на зазначене відображення накладається умова регулярності.

Частина площини називається **елементарною плоскою областю**, якщо вона слугує образом відкритого круга (без обмежуючого кола) у разі деякого топологічного відображення. Наприклад, внутрішня частина многокутника – елементарна область.

Множина  $S$  точок простору називається **елементарною поверхнею**, якщо вона є образом елементарної плоскої області у разі

деякого топологічного відображення її у простір. Наприклад, півсфера без кола, що її обмежує, є елементарною поверхнею.

**Простою поверхнею**  $S$  називається множина точок тривимірного простору, що слугує образом замкненої обмеженої однозв'язної плоскої області у разі деякого топологічного відображення її у тривимірний простір. Наприклад, півсфера – проста поверхня.

**Поверхнею** називається об'єднання скінченного числа простих поверхонь. Наприклад, сфера – поверхня (об'єднання двох півсфер).

**Зауваження 2.** Якщо поверхня  $S$  – проста, то кожна її точка  $M$  має такий просторовий окіл, що частина поверхні, яка розміщена в ньому, є елементарною.

**Зауваження 3.** Надалі частинні похідні позначатимемо відповідними індексами знизу, а знак штриха зверху опускатимемо.

Поверхня  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$  називається **регулярною  $m$ -го порядку**, якщо координатні функції  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  є  $m$  разів неперервно диференційовними ( $m \geq 1$ ) в області  $D$  і векторний добуток частинних похідних  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  відмінний від нуля. При  $m \geq 1$  регулярну поверхню також називають **гладкою**.

**Зауваження 4.** Точка  $M$  поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  називається **особливою**, якщо в ній виконується умова  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ . Такі точки далі не вивчатимемо.

Нехай поверхня  $S$  задана у векторно-параметричній формі  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ . Якщо  $(u, v)$  – декартові координати довільної точки області  $D$ , то  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  – декартові координати відповідної точки  $M$  поверхні  $S$  (рис. 2.1). Отже, конкретний набір  $(u, v)$  значень параметрів однозначно визначає точку  $M(u, v)$  на поверхні  $S$  і слугує **криволінійними координатами** цієї точки. Завдяки неперервності відображення  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  довільній лінії області  $D$  відповідає певна лінія на поверхні  $S$ . Зокрема, координатним  $u$ -лініям (прямим  $v = v_0 = const$ ) і  $v$ -лініям (прямим  $u = u_0 = const$ ), які паралельні осям системи координат на площині  $Ouv$ , відповідають  $u$ -лінії, визначені рівнянням

$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ , і  $v$ -лінії, що задаються рівнянням  $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ , на поверхні. Ці лінії називають **координатними лініями** на поверхні. Дві однопараметричні сім'ї  $u$ -ліній і  $v$ -ліній утворюють **координатну сітку** (аналогічно координатній сітці на площині). Координатна сітка на поверхні називається **правильною** за умови, що через кожену точку поверхні проходить по одній і тільки одній лінії кожної сім'ї, до того ж кожна  $u$ -лінія перетинається з кожною  $v$ -лінією лише в одній точці.

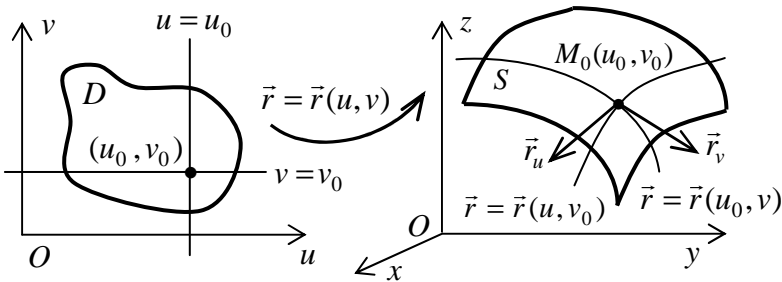


Рисунок 2.1

Для гладкої поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  частинні похідні  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  у точці  $M_0(u_0, v_0)$  є векторами дотичних до координатних ліній  $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$  і  $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$  відповідно (рис. 2.1). З умови гладкості поверхні випливає, що векторний добуток частинних похідних  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  відмінний від нуля. Тому значення векторів  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  у точці  $M_0(u_0, v_0)$  не колінеарні. Отже, координатна сітка на гладкій поверхні є правильною.

*Зауваження 5.* Загалом криволінійні координати  $u$  і  $v$  не мають ніякого геометричного змісту та можуть бути вибрані різними способами, тобто та сама поверхня допускає різну параметризацію. Наприклад, рівняння

$$\vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + u^2 \vec{k}$$

і  $\vec{r} = (\eta / (\eta^2 + \mu^2)) \vec{i} + (\mu / (\eta^2 + \mu^2)) \vec{j} + (\eta / (\eta^2 + \mu^2)) \vec{k}$

визначають одну й ту ж саму поверхню  $x^2 + y^2 = z$  – параболоїд обертання. (Перевірте це самостійно, вилучивши параметри з кожного векторного рівняння).

*Приклад.* Поверхню  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  задати у явному чи неявному вигляді, вилучивши параметри  $u$  і  $v$ , та встановити її тип:

а)  $S: \vec{r} = a \cos u \cos v \cdot \vec{i} + b \cos u \sin v \cdot \vec{j} + c \sin u \cdot \vec{k}$ ;

б)  $S: \vec{r} = \frac{\sqrt{u^2 + 9}}{3} \cos v \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{u^2 + 9}}{3} \sin v \cdot \vec{j} + u \vec{k}$ .

□ а) Знайдемо

$$x^2 = a^2 \cos^2 u \cos^2 v; \quad y^2 = b^2 \cos^2 u \sin^2 v; \quad z^2 = c^2 \sin^2 u.$$

Звідси  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) = \cos^2 u$ . Тоді  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$ . Отже, маємо еліпсоїд загального вигляду  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ .

б) (Розв'язати самостійно). ■

## 2.2 Дотична площина та нормаль до поверхні. Лінії на поверхні

Нехай у точці  $M_0(u_0, v_0)$  гладкої поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  проведена площина  $\alpha$  з вектором нормалі  $\vec{N}_0$ . Позначимо через  $h = MP$  відстань від довільної точки  $M = M(u_0 + \Delta u; v_0 + \Delta v)$  поверхні  $S$  до площини  $\alpha$ , а через  $d$  – відстань від точки  $M$  до  $M_0$  (рис. 2.2). Площина  $\alpha$  називається **дотичною площиною** до поверхні  $S$  у точці  $M_0$ , якщо відношення  $h/d$  прямує до нуля, коли точка  $M$  по поверхні необмежено наближається до точки  $M_0$ .

Для гладкої поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  у точці  $M_0(u_0, v_0)$  дотичні до координатних ліній  $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$  і  $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$  лежать у дотичній площині та цілком її визначають. Тому за вектор нормалі цієї площини можна взяти  $\vec{N}_0 = \vec{N}(u_0, v_0) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \Big|_{(u_0, v_0)}$ . Пряма, що прохо-

дять через точку дотику  $M_0$  перпендикулярно до дотичної площини, називається **нормальною прямою (нормаллю)** до поверхні  $S$  в точці  $M_0(u_0, v_0)$ . Вектор  $\vec{N}_0$  слугує їй напрямним.

Нехай  $\vec{N}(u_0, v_0) = (N_x(u_0, v_0); N_y(u_0, v_0); N_z(u_0, v_0))$ , тоді

$$\frac{x - x_0}{N_x(u_0, v_0)} = \frac{y - y_0}{N_y(u_0, v_0)} = \frac{z - z_0}{N_z(u_0, v_0)} \text{ – канонічні рівняння}$$

нормальної прямої до поверхні  $S$  у точці  $M_0 = M(u_0, v_0)$ ;

$$N_x(u_0, v_0) \cdot (x - x_0) + N_y(u_0, v_0) \cdot (y - y_0) + N_z(u_0, v_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

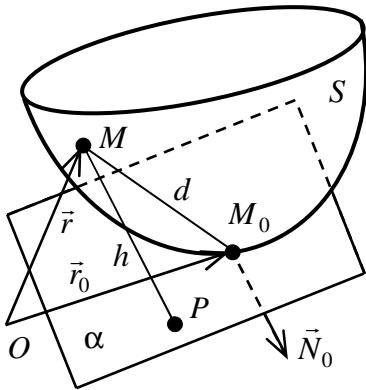


Рисунок 2.2

– рівняння дотичної площини до поверхні  $S$  у точці  $M_0$ ;

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}(u_0, v_0)}{|\vec{N}(u_0, v_0)|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

– одиничний вектор нормалі до поверхні  $S$  у точці  $M_0$ .

Якщо в області визначення  $D$  гладкої поверхні  $S$  взяти деяку криву  $l$ :  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $t \in (a; b)$ , то на поверхні  $S$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  їй відповідатиме пев-

на лінія  $L$ . Оскільки рівняння  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $t \in (a; b)$  повністю визначають криву  $L$ , то їх називають **внутрішніми рівняннями** лінії  $L$  або **рівняннями лінії  $L$  на поверхні  $S$** .

Зовнішнє подання лінії  $L$  можна розглядати як годограф складеної вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (a; b)$ , похідна якої  $\vec{r}'(t) = \vec{r}_u u'(t) + \vec{r}_v v'(t)$  визначає напрямок дотичної до кривої  $L$ . Останній вираз показує, що напрямний вектор дотичної до кривої  $\vec{T}(t) = \vec{r}'(t)$  є лінійною комбінацією неколінарних векторів  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$ , отже, компланарний з ними. Це справедливо для будь-якої кри-

вої, проведеної на поверхні через точку дотику  $M_0$ , тобто дотичні до всіх кривих на поверхні, які проходять через точку дотику  $M_0$ , належать єдиній дотичній площині у цій точці.

*Зауваження 1.* З умови компланарності  $(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$  векторів  $\vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$ , де  $\vec{r}_0$  – радіус-вектор точки  $M_0$ , а  $\vec{r}$  – радіус-вектор довільної точки дотичної площини, можна одержати ще одне подання рівняння дотичної площини до поверхні в точці  $M_0$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

**Напрямом на поверхні** в заданій точці називається вектор, напрямлений по дотичній до кривої, що лежить на поверхні та проходить через цю точку. З рівності  $\vec{r}'(t) = \vec{r}_u u'(t) + \vec{r}_v v'(t)$ , де вектори  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  залежать тільки від вибору точки на поверхні, одержуємо вираз для диференціалів  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ , який показує, що напрям на поверхні повністю визначається відношенням  $du/dv$  диференціалів криволінійних координат  $u$  і  $v$  уздовж кривої  $l$ :  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ .

*Приклад.* Для заданої поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  у точці  $M_0$ , що має вказані значення  $u_0$  і  $v_0$  криволінійних координат  $u$  і  $v$ , знайти: 1) орт  $\vec{n}$  нормалі до поверхні; 2) канонічні рівняння нормальної прямої; 3) загальне рівняння дотичної площини:

а)  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v) = u^4 \vec{i} - u^2 v \vec{j} + (2u + v^2) \vec{k}$ ,  $u_0 = -1$ ,  $v_0 = 2$ ;

б)  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + 3v \vec{k}$ ,

$$u_0 = 6, \quad v_0 = \pi/3.$$

□ а) Знайдемо декартові координати точки дотику  $M_0$ :

$$x_0 = x(u_0, v_0) = (-1)^4 = 1; \quad y_0 = y(u_0, v_0) = -(-1)^2 \cdot 2 = -2;$$

$$z_0 = z(u_0, v_0) = 2 \cdot (-1) + 2^2 = 2; \quad M_0(1; -2; 2).$$

Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і обчислимо її частинні похідні  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  у точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= 4u^3\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2\vec{k}; & \vec{r}_v &= 0\vec{i} - u^2\vec{j} + 2v\vec{k}; \\ \vec{r}_u(M_0) &= -4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}; & \vec{r}_v(M_0) &= 0\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.\end{aligned}$$

Знайдемо вектор нормалі до поверхні та його орт у точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{N}_0 = \vec{N}(u_0, v_0) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \Big|_{(u_0, v_0)} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (4 \cdot 4 - 2 \cdot (-1))\vec{i} - \\ &- ((-4) \cdot 4 - 2 \cdot 0)\vec{j} + ((-4) \cdot (-1) - 4 \cdot 0)\vec{k} = 18\vec{i} + 16\vec{j} + 4\vec{k}; \\ |\vec{N}_0| &= \sqrt{18^2 + 16^2 + 4^2} = 2\sqrt{146}; \\ \vec{n} = \vec{N}_0 / |\vec{N}_0| &= \left(9/\sqrt{146}; 8/\sqrt{146}; 2/\sqrt{146}\right).\end{aligned}$$

Складемо канонічні рівняння нормальної прямої в точці  $M_0$ :

$$\frac{x-1}{18} = \frac{y+2}{16} = \frac{z-2}{4} \Big| \times 2; \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-2}{2}.$$

Знайдемо загальне рівняння дотичної площини в точці  $M_0$ :

$$18 \cdot (x-1) + 16 \cdot (y+2) + 4 \cdot (z-2) = 0 \Big| : 2;$$

$$9(x-1) + 8(y+2) + 2(z-2) = 0; \quad 9x + 8y + 2z + 3 = 0.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

*Зауваження 2.* Нехай поверхня  $S$  задана  *неявно*  рівнянням  $F(x, y, z) = 0$ , а  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  – звичайна точка на цій поверхні. Тоді  $\vec{N}_0 = (F_x(x_0, y_0, z_0); F_y(x_0, y_0, z_0); F_z(x_0, y_0, z_0))$  – вектор нормалі до поверхні  $S$  в точці  $M_0$ . Маємо канонічні рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)};$$

рівняння дотичної площини:

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

### 2.3 Параметризація еліпсоїда у геодезичних координатах

У сфероїдичній геодезії вивчається геометрія *земного еліпсоїда*, під яким розуміють поверхню еліпсоїда обертання, форма та розміри якого визначаються як результат всебічного математичного опрацювання астрономічних, гравіметричних і геодезичних вимірювань, що здійснені на фізичній поверхні Землі. Одним із головних завдань є визначення взаємного положення точок земної поверхні та навколосферного простору у відповідній системі координат.

Нехай на площині  $Oxz$  розміщений еліпс  $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ ,

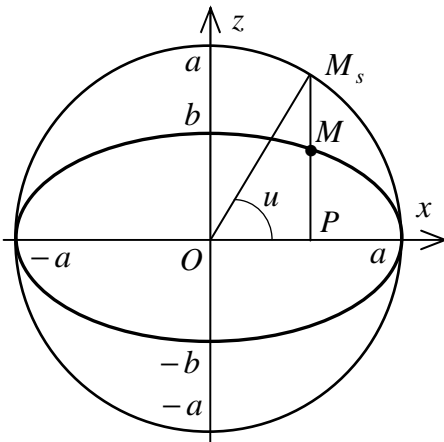


Рисунок 2.3

$a^2 - b^2 = c^2$  (рис. 2.3). Його можна подати у параметричній формі:  $x = a \cos u$ ,  $z = b \sin u$ , де параметром  $u$  виступає так звана *зведена широта*. Значення  $u$  для довільної точки  $M$  визначається як кут між віссю  $Ox$  і радіус-вектором  $OM_s$  точки  $M_s$ , що слугує перетином перпендикуляра  $MP$  до осі  $Ox$  з колом, центром якого слугує початок відліку  $O$ , а радіус дорівнює великій півосі  $a$ .

Обертаючи еліпс навколо осі  $Oz$ , дістанемо еліпсоїд обертання  $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$  або



$$\vec{r} = \vec{r}(u, L) = a \cos u \cos L \cdot \vec{i} + a \cos u \sin L \cdot \vec{j} + b \sin u \cdot \vec{k},$$

де  $L$  – *геодезична довгота* точки  $M$ , за яку приймають кут між площиною  $Oxz$  нульового меридіана та площиною меридіана, що проходить через цю точку (рис. 2.4). При цьому параметри набувають значень  $L \in (-\pi; \pi]$ ,  $u \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

З точки зору геодезії наведена параметризація еліпсоїда має суттєвий недолік: практичне вимірювання зведеної широти  $u$  важко здійснити. Простіше вимірювати кут  $B$  між площиною  $Oxy$  екватора та нормаллю

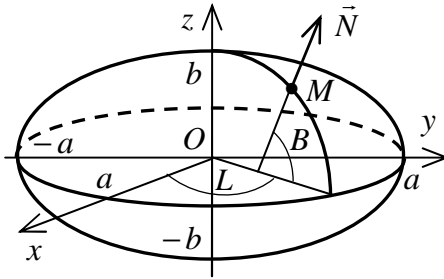


Рисунок 2.4

$\vec{N}$  до поверхні еліпсоїда в точці  $M$ , який називають *геодезичною широтою* точки  $M$  (рис. 2.4). Упорядковану пару  $(B; L)$  називають *геодезичними координатами* точки  $M$ .

Знайдемо параметризацію еліпсоїда обертання в наведеній геодезичній системі координат, здійснивши перехід від пари параметрів  $(u; L)$  до  $(B; L)$ . Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, L)$  і обчислимо вектор нормалі  $\vec{N}$  до поверхні та квадрат його модуля:

$$\vec{r}_u = -a \sin u \cos L \cdot \vec{i} - a \sin u \sin L \cdot \vec{j} + b \cos u \cdot \vec{k};$$

$$\vec{r}_L = -a \cos u \sin L \cdot \vec{i} + a \cos u \cos L \cdot \vec{j} + 0 \vec{k};$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_L = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin u \cos L & -a \sin u \sin L & b \cos u \\ -a \cos u \sin L & a \cos u \cos L & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cos^2 u \cos L \cdot \vec{i} + ab \cos^2 u \sin L \cdot \vec{j} + a^2 \sin u \cos u \cdot \vec{k};$$

$$|\vec{N}|^2 = a^2 b^2 \cos^4 u \cos^2 L + a^2 b^2 \cos^4 u \sin^2 L + a^4 \sin^2 u \cos^2 u =$$

$$= a^2 \cos^2 u \cdot (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 u).$$

З рисунка 2.4 маємо:

$$\begin{aligned} \sin^2 B = \cos^2(\vec{N}, \vec{k}) &= \frac{N_z^2}{|\vec{N}|^2} = \frac{a^4 \sin^2 u \cos^2 u}{a^2 \cos^2 u \cdot (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 u)} = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 u}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 u}. \text{ Звідси } \sin u = \frac{b \sin B}{a \sqrt{1 - (1 - b^2/a^2) \sin^2 B}}. \end{aligned}$$

Прийmemo до уваги, що  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  – перший ексцентриситет еліпсоїда обертання, і позначимо  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ . Тоді

$$\sin u = b \sin B / (aW); \quad \cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \cos B / W.$$

Одержуємо *параметризацію еліпсоїда обертання в геодезичних координатах*:

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \frac{a \cos B \cos L}{W} \vec{i} + \frac{a \cos B \sin L}{W} \vec{j} + \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} \vec{k}.$$

*Приклад.* Для еліпсоїда обертання, що заданий в геодезичних координатах

$$\vec{r} = \frac{10 \cos B \cos L}{\sqrt{1 - 0,72 \sin^2 B}} \vec{i} + \frac{10 \cos B \sin L}{\sqrt{1 - 0,72 \sin^2 B}} \vec{j} + \frac{2,8 \sin B}{\sqrt{1 - 0,72 \sin^2 B}} \vec{k},$$

у точці  $M_0$ , яка відповідає значенням параметрів  $B_0 = \pi/6$  і  $L_0 = 3\pi/4$ , знайти орт  $\vec{n}$  нормалі до поверхні.

(Розв'язати самостійно).

## 2.4 Перша квадратична форма поверхні та її застосування

Під час вирішення багатьох фізико-технічних і геометричних задач потрібно обчислювати довжини кривих, які лежать на поверхні, кути між такими лініями, площі тих чи інших частин поверхні. Основна ідея підходів до розв'язування таких задач полягає в локальній заміні нескінченно малого елемента гладкої поверхні поблизу якої-небудь її точки відповідним елементом дотичної площини.

Нехай на гладкій поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  задана крива  $L$ , внутрішні рівняння якої  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $t \in [a; b]$ . Зафіксуємо деяку точку  $M(t)$  на лінії  $L$  та перейдемо з цієї точки вздовж кривої  $L$  у нескінченно близьку точку  $M_1(t + \Delta t)$ . Радіус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$  отримає приріст  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(u(t + \Delta t), v(t + \Delta t)) - \vec{r}(u(t), v(t))$ . головною частиною якого служить диференціал  $d\vec{r}(t) = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ , де  $du = u'(t) \cdot dt$  і  $dv = v'(t) \cdot dt$  – диференціали криволінійних координат. Як відомо  $d\vec{s} = \vec{r}'(t) dt = d\vec{r}$ , де  $ds$  – диференціал довжини дуги. Тоді

$$(ds)^2 = (d\vec{r})^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 (du)^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) du dv + \vec{r}_v^2 (dv)^2$$

Уведемо для скалярних добутків позначення Гаусса:

$$E = \vec{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v;$$

$$G = \vec{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad \text{і отримаємо } ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Вираз у правій частині останньої рівності

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

називається **першою квадратичною формою** поверхні або **лінійним елементом** поверхні, бо він виражає квадрат диференціала дуги кривої на поверхні. *Перша квадратична форма поверхні дорівнює квадрату диференціала довжини дуги  $I = ds^2$  (геометричний зміст  $I$ ).*

Коефіцієнти  $E$ ,  $F$  і  $G$  залежать лише від вибору точки на поверхні та не залежать від напрямку на поверхні, який визначається відношенням  $du/dv$  диференціалів криволінійних координат кривої. Очевидно, що  $E > 0$  і  $G > 0$  у всій області їх визначення, а перша квадратична форма  $I$  є додатною за визначенням як  $ds^2$ .

*Зауваження 1.* На довільній поверхні систему криволінійних координат (параметризацію поверхні) можна задати різними способами. Зокрема, внутрішні координати можна вибрати так, щоб для коефіцієнтів першої квадратичної форми справджувались певні умови. Якщо виконуються співвідношення  $E = 1$ ,  $F = 0$  і  $G > 0$ , то маємо **напівгеодезичну систему координат**, а при  $F = 0$  і

$E = G$  – конформну систему координат.

Перша квадратична форма I слугує для знаходження нескінченно малих дуг на поверхні. Для елемента (диференціала) довжини дуги лінії  $L$  на поверхні  $S$  маємо  $ds^2 = d\vec{r}^2 = I|_{(u(t), v(t))}$ , де  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  – внутрішні рівняння лінії  $L$ . Далі за допомогою інтегрування можна знайти **довжину скінченної дуги на поверхні**:

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fuv' + Gv'^2} dt,$$

де коефіцієнти  $E$ ,  $F$  і  $G$  обчислюються при  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ .

У разі координатних ліній маємо:

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v_0)} du \quad \text{– для } u \text{-лінії } (v = v_0 = \text{const});$$

$$s = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G(u_0, v)} dv \quad \text{– для } v \text{-лінії } (u = u_0 = \text{const}).$$

Нехай на поверхні  $S$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  задані дві криві  $L_1$ :  $u = u_1(t)$ ,  $v = v_1(t)$  і  $L_2$ :  $u = u_2(t)$ ,  $v = v_2(t)$ . **Кутом  $\varphi$  між кривими** називається кут між дотичними, проведеними до кривих у точці їх перетину. Тоді  $\cos \varphi = (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) / (|d\vec{r}_1| \cdot |d\vec{r}_2|)$ , звідки

$$\cos \varphi = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2} \cdot \sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}},$$

де похідні та коефіцієнти першої квадратичної форми обчислюються в точці перетину.

*Зауваження 2.* Кут між лініями не залежить ні від параметризації поверхні, ні від параметризації кривих.

В окремому випадку кута  $\omega$  між координатними лініями  $u = u_0 = \text{const}$  і  $v = v_0 = \text{const}$  у точці їх перетину  $M_0(u_0, v_0)$  маємо:  $\cos \omega = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) / (|\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v|) = F / \sqrt{EG}$ , де коефіцієнти  $E$ ,

$F$  і  $G$  обчислюються в точці  $M_0$ .

$$\cos \omega = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) / (|\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v|) = F / \sqrt{EG}.$$

Якщо  $F = 0$ , то  $\cos \omega = 0$ , звідки  $\omega = \pi/2$ . Отже, *необхідною та достатньою умовою ортогональності координатної сітки на поверхні є  $F = 0$* . Зокрема, таку сітку утворюють паралелі та меридіани на поверхні обертання.

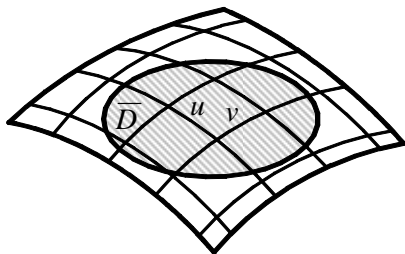


Рисунок 2.5

Знайдемо площу області  $\bar{D}$  на поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , що служить образом області  $D$  площини  $Ouv$  (рис. 2.5). Розіб'ємо область  $\bar{D}$  координатними лініями на елементарні криволінійні чотирикутники, обмежені з двох боків  $u$ -лініями, а з двох інших –  $v$ -лініями. Розглянемо один із внутрішніх чотирикутників

з вершинами  $M(u, v)$ ,  $M_1(u + \Delta u, v)$ ,  $M_2(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,  $M_3(u, v + \Delta v)$  (рис. 2.6). Унаслідок переміщення з точки  $M$  у точку  $M_1$  уздовж  $u$ -лінії радіус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  одержить приріст  $\overrightarrow{MM_1}$ , який наближено замінимо частинним диференціалом  $d_u \vec{r} = \vec{r}_u \Delta u$  при фіксованому  $v$ . Аналогічно, приріст  $\overrightarrow{MM_3}$  уздовж

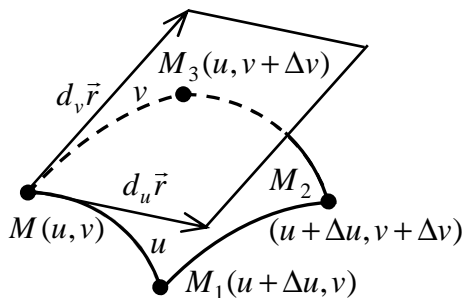


Рисунок 2.6

$v$ -лінії замінимо частинним диференціалом  $d_v \vec{r} = \vec{r}_v \Delta v$  при фіксованому  $u$ . Розглянемо звичайний паралелограм, побудований на векторах  $d_u \vec{r}$  і  $d_v \vec{r}$  та розміщений у дотичній площині до поверхні в точці  $M(u, v)$ . Наближено замінимо площу криволінійного чотирикутника площею  $\Delta S$  цього па-

паралелограма  $MM_1M_2M_3$ , яку обчислимо через модуль векторного добутку:

$$\begin{aligned} \Delta^2 S &= |d_u \vec{r} \times d_v \vec{r}|^2 = |d_u \vec{r}|^2 \cdot |d_v \vec{r}|^2 \cdot \sin^2(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = |d_u \vec{r}|^2 \cdot |d_v \vec{r}|^2 (1 - \\ &- \sin^2(\vec{r}_u, \vec{r}_v)) = |d_u \vec{r}|^2 \cdot |d_v \vec{r}|^2 - (d_u \vec{r} \cdot d_v \vec{r})^2 = (|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2) \times \\ &\times \Delta u^2 \Delta v^2 = (EG - F^2) \Delta u^2 \Delta v^2; \quad \Delta S = \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Для знаходження площі області  $\bar{D}$  складемо суму площ усіх елементарних паралелограмів і перейдемо до границі при  $\Delta u \rightarrow 0$  і  $\Delta v \rightarrow 0$ , тобто необмежено здрібнюючи розбиття. Оскільки  $\sqrt{EG - F^2}$  є неперервною функцією від  $u$  і  $v$ , то зазначена границя існує та не залежить від способу розбиття області  $\bar{D}$  на елементарні майданчики і визначає подвійний інтеграл. Отже, **для площі  $S$  області  $\bar{D}$**  маємо

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv, \text{ де } D \text{ – прообраз області } \bar{D}, D \subset Ouv.$$

Вираз  $dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$  задає **елемент (диференціал) площі поверхні  $S$** .

*Приклад 1.* Для еліпсоїда обертання, що заданий у геодезичних координатах

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \frac{a \cos B \cos L}{W} \vec{i} + \frac{a \cos B \sin L}{W} \vec{j} + \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} \vec{k},$$

знайти коефіцієнти  $E$ ,  $F$  і  $G$  першої квадратичної форми. (Розв'язати самостійно). Відповідь:  $E = \frac{b^4}{a^2 W^6}$ ;  $F = 0$ ;  $G = \frac{a^2 \cos^2 B}{W^2}$ .

*Зауваження 3.* Оскільки для еліпсоїда обертання виконується умова  $F = 0$ , то координатна сітка геодезичної системи на його поверхні (меридіани та паралелі), є ортогональною. Для паралелі  $B = B_0$  знайдемо довжину дуги, кінці якої мають довготи  $L_1$  і  $L_2$ :

$$s = \int_{L_1}^{L_2} \sqrt{G(B_0, L)} dL = \frac{a \cos B_0}{W_0} \int_{L_1}^{L_2} dL = \frac{a \cos B_0}{W_0} (L_2 - L_1).$$

Для дуги меридіана  $L = L_0$ , кінці якого мають широти  $B_1$  і  $B_2$ , дістанемо:

$$s = \int_{B_1}^{B_2} \sqrt{E(B, L_0)} dB = \frac{b^2}{a} \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}.$$

Одержаний еліптичний інтеграл не виражається через елементарні функції.

*Зауваження 4.* Перша квадратична форма описує поверхню у першому наближенні, коли елементарний майданчик поверхні замінюється на відповідний майданчик дотичної площини. Знаючи першу квадратичну форму, можна обчислювати довжини кривих на поверхні, кути між ними, площі областей на поверхні, не маючи навіть рівняння поверхні. Усі геометричні властивості поверхні, які можна виявити за допомогою лише її першої квадратичної форми, відносяться до *внутрішньої геометрії* поверхні.

*Приклад 2.* Для кривої  $L: v = \ln(u + \sqrt{u^2 + 9})$ , що розміщена на гелікоїді  $S: \vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + 3v\vec{k}$ , знайти довжину її дуги між точками перетину з координатними лініями  $u = 1$  і  $v = \ln 9$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E$ ,  $F$  і  $G$  першої квадратичної форми:

$$\vec{r}_u = \cos v \cdot \vec{i} + \sin v \cdot \vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_v = -u \sin v \cdot \vec{i} + u \cos v \cdot \vec{j} + 3\vec{k};$$

$$E = \vec{r}_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 0^2 = 1; \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \cos v(-u \sin v) + \sin v \cdot u \cos v + 0 \cdot 3 = 0;$$

$$G = \vec{r}_v^2 = (-u \sin v)^2 + (u \cos v)^2 + 3^2 = u^2 + 9.$$

Запишемо внутрішні рівняння кривої  $L$  у параметричному вигляді  $u = t$ ;  $v = \ln(t + \sqrt{t^2 + 9})$ . У разі перетину з координатними лініями  $u = 1$  і  $v = \ln 9$  маємо:

$$u = t = 1; \quad t = 1; \quad \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 9}\right) = \ln 9; \quad t + \sqrt{t^2 + 9} = 9;$$

$$t^2 + 9 = (9 - t)^2; \quad t = 4.$$

Знайдемо похідні:

$$u' = t' = 1; \quad v' = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 9}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 9}} 2t \right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9}}.$$

Обчислимо довжину шуканої дуги:

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \sqrt{t^2 + 9} + (t^2 + 9) \cdot \left( \sqrt{t^2 + 9} \right)^2 =$$

$$= \sqrt{2}; \quad s = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt = \int_1^4 \sqrt{2} dt = 3\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 3.* Знайти довжину дуги кривої  $L: v = u^2$  з кінцями  $M_1(u_1; v_1)$  і  $M_2(u_2; v_2)$ , що розмішена на поверхні

$$S: \vec{r} = v(\sqrt{3} \cos u + \sin u) \vec{i} + v(\sqrt{3} \sin u - \cos u) \vec{j} + 4u \vec{k},$$

якщо  $u_1 = 0; v_1 = 0; u_2 = 3; v_2 = 9$ . (Розв'язати самостійно).

*Приклад 4.* Знайти косинус кута між кривими  $L_1: v = 4 \ln u$  і  $L_2: v = u^3 - 1$  на поверхні  $S: \vec{r} = (u^2 - 2v) \vec{i} + uv \vec{j} + (2u + v^3) \vec{k}$  у їхній точці перетину  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1; v_0 = 0$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E, F$  і  $G$  першої квадратичної форми:

$$\vec{r}_u = 2u \vec{i} + v \vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{r}_v = -2\vec{i} + u \vec{j} + 3v^2 \vec{k}; \quad E = \vec{r}_u^2 = 4u^2 + v^2 + 4;$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -4u + uv + 6v^2; \quad G = \vec{r}_v^2 = 4 + u^2 + 9v^4.$$

За параметр  $t$  на обох лініях можна взяти  $t = u$ . У точці перетину маємо  $t_0 = u_0 = 1$ . Тоді внутрішні рівняння ліній:

$$L_1: u = u_1(t) = t; \quad v = v_1(t) = 4 \ln t;$$

$$L_2: u = u_2(t) = t; \quad v = v_2(t) = t^3 - 1.$$

Знайдемо похідні та обчислимо їхні значення у точці перети-



ну:

$$u_1'(t) = 1; \quad v_1'(t) = 4/t; \quad u_2'(t) = 1; \quad v_2'(t) = 3t^2;$$

$$u_1'(1) = 1; \quad v_1'(1) = 4; \quad u_2'(1) = 1; \quad v_2'(1) = 3.$$

Обчислимо значення коефіцієнтів  $E$ ,  $F$  і  $G$  у точці перетину:

$$E = 8; \quad F = -4; \quad G = 5.$$

Знайдемо косинус кута між кривими:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{8 \cdot 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (1 \cdot 3 + 1 \cdot 4) + 5 \cdot 4 \cdot 3}{\sqrt{8 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2} \sqrt{8 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2}} = \\ &= 20 / \sqrt{406}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Приклад 5.* Знайти косинус кута між кривими  $L_1: v = \ln t g u$  і  $L_2: v = \pi - 4u$  на псевдосфері

$$S: \vec{r} = 3 \sin u \cos v \cdot \vec{i} + 3 \sin u \sin v \cdot \vec{j} + 3(\ln t g(u/2) + \cos u) \vec{k}$$

у їхній точці перетину  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = \pi/4$ ;  $v_0 = 0$ .

(Розв'язати самостійно).

*Приклад 6.* Знайти площу криволінійного чотирикутника  $\bar{D}$ , розміщеного на гелікоїді  $S: \vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + v \vec{k}$  і обмеженого координатними лініями  $u = 0$ ,  $u = 3/4$  і  $v = 0$ ,  $v = 32$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E$ ,  $F$  і  $G$  першої квадратичної форми:

$$\vec{r}_u = \cos v \cdot \vec{i} + \sin v \cdot \vec{j} + 0 \vec{k}; \quad \vec{r}_v = -u \sin v \cdot \vec{i} + u \cos v \cdot \vec{j} + \vec{k};$$

$$E = \vec{r}_u^2 = 1; \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0; \quad G = \vec{r}_v^2 = u^2 + 1.$$

Область інтегрування  $D$  (прообраз області  $\bar{D}$ ) – прямокутник у криволінійній системі координат на поверхні. Знайдемо шукану площу:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= 1 \cdot (u^2 + 1) - 0^2 = u^2 + 1; \quad S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \\ &= \iint_D \sqrt{u^2 + 1} \, dudv = \int_0^{3/4} \sqrt{u^2 + 1} \, du \cdot \int_0^{32} dv = \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| \right) \Big|_0^{3/4} \cdot v \Big|_0^{32} = 15 + 16 \ln 2. \quad \blacksquare$$

**Приклад 7.** Тор  $S$  (рис. 2.7) задано у векторно-параметричній формі  $\vec{r} = (7 + 2 \cos v) \cos u \cdot \vec{i} + (7 + 2 \cos v) \sin u \cdot \vec{j} + 2 \sin v \cdot \vec{k}$ , де  $0 \leq u \leq 2\pi$  і  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Знайти його площу. (Розв'язати самостійно).



Рисунок 2.7

Лінія  $L_d$  на поверхні обертання  $S$  називається **локсодромією**, якщо при перетині з кожним меридіаном вона утворює сталий кут  $K$ .

**Приклад 8.** Знайти рівняння відповідної локсодромії  $L_d$  на сфері  $S$ :

$$\vec{r} = 3 \cos \lambda \cos \varphi \cdot \vec{i} + 3 \sin \lambda \cos \varphi \cdot \vec{j} + 3 \sin \varphi \cdot \vec{k},$$

якщо  $K = \pi/6$  і вона проходить через точку  $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$ , де  $\varphi_0 = \pi/4$  і  $\lambda_0 = 2\pi/3$ .

□ Будемо шукати рівняння локсодромії  $L_d$  у вигляді  $\varphi = (\lambda)$ . Зафіксуємо довільний меридіан  $L_m$ :  $\lambda = const$ , що перетинає локсодромію  $L_d$  у деякій точці  $M(\varphi, \lambda)$ , де  $\varphi = (\lambda)$ . Знайдемо вектор  $\vec{T}_m$  дотичної до меридіана у цій точці  $M(\varphi(\lambda), \lambda)$  та його модуль:

$$\begin{aligned} \vec{T}_m = \vec{r}_\varphi(M) &= -3 \cos \lambda \sin \varphi(\lambda) \vec{i} - 3 \sin \lambda \sin \varphi(\lambda) \vec{j} + \\ &+ 3 \cos \varphi(\lambda) \vec{k}; \quad \left| \vec{T}_m \right| = 3. \end{aligned}$$

Складемо зовнішнє векторне рівняння локсодромії  $L_d$  і знайдемо вектор  $\vec{T}_d$  дотичної до цієї лінії  $L_d$  у точці  $M(\varphi(\lambda), \lambda)$  та його модуль:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}(\lambda) &= 3 \cos \lambda \cos \varphi(\lambda) \cdot \vec{i} + 3 \sin \lambda \cos \varphi(\lambda) \cdot \vec{j} + 3 \sin \varphi(\lambda) \cdot \vec{k}; \\ \vec{T}_d = \vec{r}_\lambda(M) &= -3(\sin \lambda \cos \varphi(\lambda) + \cos \lambda \sin \varphi(\lambda) \cdot \varphi'(\lambda)) \vec{i} + \\ &+ 3(\cos \lambda \cos \varphi(\lambda) - \sin \lambda \sin \varphi(\lambda) \cdot \varphi'(\lambda)) \vec{j} + 3 \cos \varphi(\lambda) \cdot \varphi'(\lambda) \vec{k}; \end{aligned}$$

$$|\vec{T}_d| = 3\sqrt{\cos^2 \varphi(\lambda) + \varphi'^2(\lambda)}.$$

Обчислимо скалярний добуток  $\vec{T}_m \cdot \vec{T}_d$  через координати векторів-співмножників  $\vec{T}_m \cdot \vec{T}_d = 9\varphi'(\lambda)$  і безпосередньо за означенням як  $\vec{T}_m \cdot \vec{T}_d = |\vec{T}_m| \cdot |\vec{T}_d| = 9\sqrt{\cos^2 \varphi(\lambda) + \varphi'^2(\lambda)} \cdot \cos K$ . Прирівнюючи одержані вирази для  $\vec{T}_m \cdot \vec{T}_d$  і опускаючи позначення аргументу  $\lambda$  функції  $\varphi = (\lambda)$ , дістанемо:

$$\begin{aligned} 9\varphi' &= 9\sqrt{\cos^2 \varphi + \varphi'^2} \cdot \cos K; & \varphi'^2 &= (\cos^2 \varphi + \varphi'^2) \cos^2 K; \\ \varphi'^2(\cos^2 K + 1) &= \cos^2 \varphi \cos^2 K; & \varphi' &= \cos \varphi \cdot \cos K / \sqrt{\cos^2 K + 1}; \\ & & \varphi' &= \cos \varphi \sin K \end{aligned}$$

– диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

Інтегруючи це рівняння, знайдемо його загальний розв'язок:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \cos \varphi \sin K; & \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= \sin K \cdot \int d\lambda; \\ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= \sin K \cdot \lambda + \ln C; & \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= C e^{\lambda \sin K}. \end{aligned}$$

Підставимо значення  $K = \pi/6$  і врахуємо, що шукана локсодромія  $L_d$  проходить через точку  $M_0(\pi/6, 2\pi/3)$ :

$$\operatorname{tg}(\pi/12 + \pi/4) = C e^{(2\pi/3)\sin(\pi/6)}; \quad \sqrt{3} = C e^{\pi/3}; \quad C = \sqrt{3} e^{-\pi/3}.$$

Далі дістанемо рівняння шуканої локсодромії  $L_d$ :

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} e^{-\pi/3} e^{\lambda/2}; \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} e^{\lambda/2 - \pi/3}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 8.* Показати, що лінія  $L_d: \rho = e^{\lambda/6}$  перетинає всі прямолінійні твірні  $L_m: \varphi = \text{const}$  конуса  $S: \vec{r} = \rho \cos \varphi \cdot \vec{i} + \rho \sin \varphi \cdot \vec{j} + 2\rho \vec{k}$ , де  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  і  $\rho > 0$ , під тим самим кутом, тобто є однією з конічних локсодромій. (Розв'язати самостійно).

## 2.5 Друга квадратична форма поверхні. Кривина лінії на поверхні. Індикатриса Дюпена

Друга квадратична форма описує поверхню у другому наближенні та показує, як відхиляється поверхня від дотичної площини. Вона повністю визначає характеристики кривини поверхні.

Нехай на поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  задана крива  $L$ , внутрішні рівняння якої задані у натуральній параметризації  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , де  $s$  – довжина її дуги. Тоді зовнішнім поданням кривої  $L$  слугує векторне рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$ . Зафіксуємо деяку точку  $M_0 = M(s_0)$  на лінії  $L$ . Проведемо у точці  $M_0$  дотичну площину і одиничний вектор нормалі  $\vec{n}$  до поверхні (рис. 2.8). Перейдемо з цієї точки вздовж кривої  $L$  у нескінченно близьку точку  $M(s_0 + \Delta s)$ . Знайдемо відхилення  $\lambda$  точки  $M$  від дотичної площини в точці  $M_0$  – довжину перпендикуляра  $MP$  із точки  $M$  до дотичної площини:  $\lambda = MP$ .

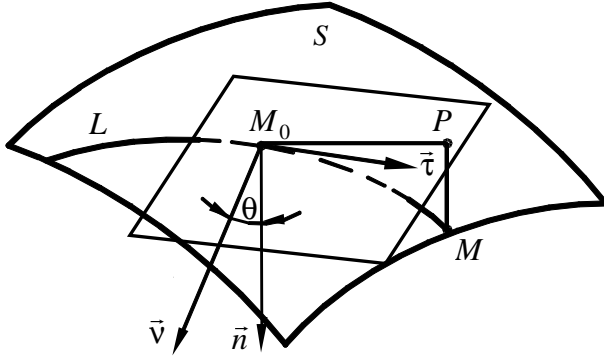


Рисунок 2.8

Оскільки  $\overrightarrow{PM} = \lambda \vec{n}$  і  $\overrightarrow{M_0M} = \Delta \vec{r}$ , то

$$\lambda \vec{n} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0P} = \Delta \vec{r} - \overrightarrow{M_0P}.$$

Розкладаючи приріст  $\Delta \vec{r}$  у ряд Тейлора, дістанемо

$$\lambda \vec{n} = \vec{r}'_s(s_0) \cdot \Delta s + (1/2) \vec{r}'_{ss}(s_0) \cdot (\Delta s)^2 + \dots - \overline{M_0 P}.$$

Помножимо останню рівність скалярно на орт  $\vec{n}$  і прийемо до уваги, що  $\vec{r}'_s(s_0) \cdot \vec{n} = 0$  і  $\overline{M_0 P} \cdot \vec{n} = 0$ , та одержимо

$$\lambda = (1/2) \cdot \vec{r}'_{ss}(s_0) \cdot \vec{n} \cdot (\Delta s)^2 + \dots$$

Отже, відхилення  $\lambda$  є нескінченно малою величиною другого порядку відносно  $\Delta s$ . Знайдемо другу похідну за натуральним параметром  $\vec{r}'_{ss}$  диференціюванням по  $s$  рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$ :

$$\vec{r}'_s = \vec{r}_u u'_s + \vec{r}_v v'_s; \quad \vec{r}'_{ss} = \vec{r}_{uu} (u'_s)^2 + \vec{r}_u u'_{ss} + 2\vec{r}_{uv} u'_s v'_s + \vec{r}_{vv} (v'_s)^2 + \vec{r}_v v'_{ss}.$$

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{2} (\vec{r}_{uu} (u'_s)^2 + \vec{r}_u u'_{ss} + 2\vec{r}_{uv} u'_s v'_s + \vec{r}_{vv} (v'_s)^2 + \vec{r}_v v'_{ss}) \cdot \vec{n} \cdot (\Delta s)^2 + \dots =$$

$$\lambda = (1/2) (\vec{r}_{uu} \vec{n} (u'_s)^2 (\Delta s)^2 + 2\vec{r}_{uv} \vec{n} u'_s v'_s (\Delta s)^2 + \vec{r}_{vv} \vec{n} (v'_s)^2 (\Delta s)^2) + \dots,$$

де враховано  $\vec{r}_u \vec{n} = 0$  і  $\vec{r}_v \vec{n} = 0$ , оскільки  $\vec{r}_u \perp \vec{n}$  і  $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ .

Остаточно маємо

$$\lambda = (1/2) (\vec{r}_{uu} \vec{n}) (du)^2 + 2(\vec{r}_{uv} \vec{n}) du dv + (\vec{r}_{vv} \vec{n}) (dv)^2 + \dots$$

Отже, з точністю до нескінченно малих другого порядку відносно  $\Delta s$  відхилення  $\lambda$  дорівнює половині певної квадратичної форми відносно диференціалів  $du$  і  $dv$ , які визначаються переміщенням вздовж лінії  $L$  з точки  $M_0$  у нескінченно близьку точку  $M$ .

Уведемо позначення  $L = \vec{r}_{uu} \vec{n}$ ;  $M = \vec{r}_{uv} \vec{n}$ ;  $N = \vec{r}_{vv} \vec{n}$ . Вираз  $\Pi = d^2 \vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  називається **другою квадратичною формою** поверхні  $S$ , де змінні коефіцієнти  $L, M, N$  залежать від параметрів  $u, v$ .

Оскільки  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ , то  $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v / \sqrt{EG - F^2}$ . Тоді

$$L = \frac{(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad M = \frac{(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad N = \frac{(\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

*Зауваження 1.* Коефіцієнти  $L, M, N$  другої квадратичної форми є функціями від  $u, v$  і залежать тільки від вибору точки на поверхні та визначаються однозначно, якщо вказана додатна сторона поверхні. Знак «+» для коефіцієнтів  $L, M, N$  вказує на те, що кінець нормалі  $\vec{n}$  і змінна точка  $M$  лежать по одну сторону від дотичної площини, а знак «-» – що по різні. У разі зміни орієнтації поверхні (зміні напрямку нормалі  $\vec{n}$  на протилежний) коефіцієнти тільки змінюють свій знак. Зазвичай за напрям нормалі  $\vec{n}$  приймають напрям векторного добутку  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ .

Для обчислення скалярного добутку  $\vec{r}'_{ss} \vec{n}$  скористаємося формулою Френе  $\vec{r}'_{ss} = k_1 \vec{v}$  та дістанемо  $\vec{r}'_{ss} \vec{n} = k_1 \vec{v} \vec{n} = k_1 \cos \theta$ , де  $\theta$  – кут між одиничними векторами  $\vec{v}$  і  $\vec{n}$ , тобто кут між головною нормаллю  $\vec{v}$  кривої  $L$  і нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у точці  $M_0$  (рис. 2.8). Тоді  $(\vec{r}'_{ss} \vec{n}) \cdot (ds)^2 = k_1 \cos \theta \cdot (ds)^2$ . Прийmemo до уваги, що  $(ds)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  й отримаємо

$$(\vec{r}'_{ss} \vec{n}) \cdot (ds)^2 = k_1 \cos \theta \cdot (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2).$$

З іншого боку  $(\vec{r}'_{ss} \vec{n}) \cdot (ds)^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ . Звідси

$$k_1 \cos \theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad \text{або} \quad k_1 \cos \theta = \Pi / I.$$

Одержане співвідношення встановлює для всіх кривих, що лежать на поверхні  $S$  і проходять через точку  $M_0$ , залежність між напрямом дотичної до кривої, положенням її стичної площини та кривиною  $k_1$  лінії в цій точці. Коефіцієнти  $E, F, G$  і  $L, M, N$  першої та другої квадратичних форм визначаються координатами  $u, v$  точки на поверхні. Якщо точка задана, то ці коефіцієнти можна вважати сталими. Тоді права частина  $k_n = \Pi / I$  останньої рівності залежить тільки від відношення  $du : dv$  диференціалів криволінійних координат, які відповідають нескінченно малому переміщенню вздовж кривої  $u = u(t), v = v(t)$  з точки  $M_0 = M(t_0)$  у не-

скінченно близьку точку  $M(t_0 + \Delta t)$ . Зазначене відношення  $du : dv$  задає напрям дотичної до кривої в точці  $M_0$ .

Величина  $k_n$  називається **нормальною кривиною поверхні в заданому напрямку**  $du : dv$ . Маємо  $k_1 \cos \theta = k_n$ .

**Перерізом поверхні**  $S$  у точці  $M_0$  за напрямком вектора  $\vec{l}$  називається плоска крива, що одержується внаслідок перетину цієї поверхні площиною, яка проходить через точку  $M_0$  паралельно вектору  $\vec{l}$ . Переріз називається **нормальним**, якщо зазначена площина проходить через нормаль  $\vec{n}$  до поверхні у точці  $M_0$ .

Розглянемо один із **нормальних перерізів** поверхні – плоску криву, що утворюється перетином поверхні **нормальною площиною**, яка перпендикулярна до дотичної площини та містить дотичну з напрямком  $du : dv$ . Тоді  $\theta = 0$  або  $\theta = \pi$ , відповідно  $\cos \theta = 1$  або  $\cos \theta = -1$  (рис. 2.7). Звідси  $k_1 = \pm k_n$ . Якщо знехтувати знаком, то **нормальна кривина  $k_n$  поверхні дорівнює кривині відповідного нормального перерізу**.

Якщо поверхню перетнути площиною, яка містить дотичну з напрямком  $du : dv$ , але не перпендикулярна до дотичної площини, то одержимо **похилий переріз**. Нехай  $\rho = 1/k_1$  – радіус кривини похилого перерізу, а  $\rho_n = 1/k_n$  – радіус кривини відповідного нормального перерізу. Тоді зі співвідношення  $k_1 \cos \theta = k_n$  випливає рівність  $\rho = \rho_n \cos \theta$ , яка виражає сутність **теорему Мен'є**:

*Радіус кривини похилого перерізу поверхні в заданій точці  $M_0$  дорівнює радіусу кривини нормального перерізу в тій самій точці  $M_0$  і з тією самою дотичною, помноженому на косинус кута між площинами нормального та похилого перерізів.*

**Приклад 1.** Знайти нормальну кривину  $k_n$  поверхні  $S$ :  $z = x^2 y^2$  у точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , де  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$ , у напрямку  $dy/dx = -3/5$ .

□ Візьмемо за криволінійні координати на поверхні відповід-

но  $u = x$ ,  $v = y$  і запишемо її векторне рівняння:

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + u^2v^2\vec{k}.$$

Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E, F, G$  і  $L, M, N$  першої та другої квадратичних форм:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \vec{i} + 0\vec{j} + 2uv^2\vec{k}; & \vec{r}_v &= 0\vec{i} + \vec{j} + 2u^2v\vec{k}; & E &= \vec{r}_u^2 = 1 + 4u^2v^4; \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 4u^3v^3; & G &= \vec{r}_v^2 = 1 + 4u^4v^2; & EG - F^2 &= \\ &= (1 + 4u^2v^4)(1 + 4u^4v^2) - (4u^3v^3)^2 = 1 + 4u^2v^4 + 4u^4v^2; \\ \vec{r}_{uu} &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2v^2\vec{k}; & \vec{r}_{uv} &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4uv\vec{k}; & \vec{r}_{vv} &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2u^2\vec{k}; \end{aligned}$$

$$(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2v^2 \\ 1 & 0 & 2uv^2 \\ 0 & 1 & 2u^2v \end{vmatrix} = 2v^2; \quad (\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4uv \\ 1 & 0 & 2uv^2 \\ 0 & 1 & 2u^2v \end{vmatrix} = 4uv; \quad (\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2u^2 \\ 1 & 0 & 2uv^2 \\ 0 & 1 & 2u^2v \end{vmatrix} = 2u^2;$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2v^2}{\sqrt{1 + 4u^2v^4 + 4u^4v^2}}; & M &= \frac{(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \\ &= \frac{4uv}{\sqrt{1 + 4u^2v^4 + 4u^4v^2}}; & N &= \frac{(\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2u^2}{\sqrt{1 + 4u^2v^4 + 4u^4v^2}}. \end{aligned}$$

Обчислимо значення коефіцієнтів  $E, F, G$  і  $L, M, N$  у заданій точці  $u_0 = x_0 = -1$ ,  $v_0 = y_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} E &= 5; & F &= -4; & G &= 5; & \sqrt{EG - F^2} &= 3; \\ L &= 2/3; & M &= -4/3; & N &= 2/3. \end{aligned}$$

З відношення  $dy/dx = -3/5$ , що задає напрямок, маємо



$dv/du = -3/5$ . Звідси  $dv = -(3/5)du$ . Обчислимо шукану нормальну кривину  $k_n$ :

$$k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} =$$

$$= \frac{(2/3)du^2 + 2 \cdot (-4/3)du \cdot (-3/5)du + (2/3) \cdot (-3/5)^2 du^2}{5du^2 + 2 \cdot (-4)du \cdot (-3/5)du + 5 \cdot (-3/5)^2 du^2} =$$

$$= 94/145. \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* Знайти нормальну кривину  $k_n$  гіперболічного параболоїда  $S: x^2/3 - y^2 = 2z$  у точці  $M_0(x_0; v_0; z_0)$ , де  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = -1$ ,  $z_0 = 1$ , у напрямку  $dy/dx = -2$ .

(Розв'язати самостійно).

Наочну картину розподілу нормальних кривин в околі заданої вибраної точки  $M_0$  на поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  надає спеціальна діаграма, запропонована Дюпенем. У дотичній площині  $\alpha$  до поверхні  $S$  у точці  $M_0$  на кожній прямій  $p$ , що проходить через точку  $M_0$ , відкладемо в обидві сторони від точки  $M_0$  відрізки довжиною  $\sqrt{|\rho_n|}$ , де  $\rho_n = 1/k_n$  – радіус кривини того нормального перерізу, який виникає під час перетину поверхні площиною, що проходить через пряму  $p$  і нормаль до поверхні у точці  $M_0$  (рис. 2.9). Плошка крива  $L_D$ , утворена кінцями побудованих відрізків, називається *індикатрисою кривини* або *індикатрисою Дюпена* у точці  $M_0$ .

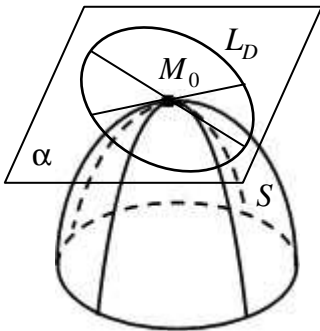


Рисунок 2.9

Уведемо в дотичній площині  $\alpha$  косокутну систему координат з початком у точці  $M_0$ , осі якої напрямлені вздовж векторів  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  відповідно. За масштабні відрізки цієї системи коорди-

нат візьмемо довжини векторів  $|\vec{r}_u|$  і  $|\vec{r}_v|$ . Позначимо через  $x$  і  $y$  координати довільної точки  $N$  індикатриси. Тоді  $\vec{\rho} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v$  – її радіус-вектор. За побудовою маємо  $\vec{\rho} = \pm\sqrt{|\rho_n|} \vec{\tau}$ , де  $\vec{\tau}$  – одиничний дотичний вектор до нормального перерізу, якому відповідає точка  $N$ . Оскільки  $\vec{\tau} = \vec{r}'_s = \vec{r}'_u u'_s + \vec{r}'_v v'_s$ , то

$$\vec{\rho} = \pm\sqrt{|\rho_n|} (\vec{r}'_u u'_s + \vec{r}'_v v'_s) = \pm\sqrt{|\rho_n|} u'_s \vec{r}_u \pm \sqrt{|\rho_n|} v'_s \vec{r}_v.$$

Прирівнюємо координати при  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  в обох виразах для  $\vec{\rho}$ :  $x = \pm\sqrt{|\rho_n|} u'_s$ ;  $y = \pm\sqrt{|\rho_n|} v'_s$ . Звідси

$$u'_s = \pm x / \sqrt{|\rho_n|}; \quad v'_s = \pm y / \sqrt{|\rho_n|}.$$

Прийmemo до уваги, що  $k_n = 1/\rho_n$ ,  $k_n = \Pi/I$ ,  $I = ds^2$ ;  $\Pi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  і дістанемо:

$$\begin{aligned} \pm 1/|\rho_n| &= (Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) / ds^2 = Lu'^2_s + 2Mu'_s v'_s + Nv'^2_s = \\ &= L(x/\sqrt{|\rho_n|})^2 + 2M(x/\sqrt{|\rho_n|})(y/\sqrt{|\rho_n|}) + N(y/\sqrt{|\rho_n|})^2 = \\ &= (1/|\rho_n|)(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо рівняння індикатриси Дюпена:

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1,$$

де у правій частині  $+1$  відповідає додатному радіусу нормальної кривини, а  $-1$  – від'ємному. З огляду на форму рівняння маємо: *індикатриса Дюпена – це дві лінії другого порядку.*

Індикатриса Дюпена є: а) еліпсом – в *еліптичній точці*, де  $LN - M^2 > 0$ ; б) парою спряжених гіпербол – у *гіперболічній точці*, де  $LN - M^2 < 0$ ; в) парою паралельних прямих – у *параболічній точці*, де  $LN - M^2 = 0$  і  $L^2 + N^2 \neq 0$ .

*Зауваження 2.* Точка регулярної поверхні називається *точкою сплюснення*, якщо всі коефіцієнти  $L, M, N$  другої квадратичної форми дорівнюють нулю:  $L = 0, M = 0, N = 0$ .

Приклад 3. Знайти рівняння індикатриси Дюпена поверхні  $S$ :  $\vec{r} = u^3 v \vec{i} + (u - v) \vec{j} + uv^2 \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо значення коефіцієнтів  $L, M, N$  другої квадратичної форми у заданій точці  $M_0(1; -1)$ :

$$\vec{r}_u = 3u^2 v \vec{i} + \vec{j} + v^2 \vec{k}; \quad \vec{r}_u(M_0) = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{r}_v = u^3 \vec{i} - \vec{j} + 2uv \vec{k};$$

$$\vec{r}_v(M_0) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}; \quad E(M_0) = \vec{r}_u^2(M_0) = 9 + 1 + 1 = 11;$$

$$F(M_0) = \vec{r}(M_0)_u \cdot \vec{r}_v(M_0) = -3 - 1 - 2 = -6;$$

$$G(M_0) = \vec{r}_v^2(M_0) = 1 + 1 + 4 = 6; \quad EG - F^2 \Big|_{M_0} = 11 \cdot 6 - (-6)^2 = 30;$$

$$\vec{r}_{uu} = 6uv \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_{uu}(M_0) = -6\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\vec{r}_{uv} = 3u^2 \vec{i} + 0\vec{j} + 2v \vec{k}; \quad \vec{r}_{uv}(M_0) = 3\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\vec{r}_{vv} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2u \vec{k}; \quad \vec{r}_{vv}(M_0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad (\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad (\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$L(M_0) = \frac{(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{6}{\sqrt{30}}; \quad M(M_0) = \frac{(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} =$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{30}}; \quad N(M_0) = \frac{(\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Складемо рівняння індикатриси Дюпена:

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1; \quad 6x^2/\sqrt{30} + 2 \cdot (-7/\sqrt{30})xy + \\ + 4y^2/\sqrt{30} = \pm 1; \quad 6x^2 - 14xy + 4y^2 = \pm\sqrt{30}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 4.* Знайти рівняння індикатриси Дюпена поверхні  $S$ :  $\vec{r} = (u^2 - v)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + (u - v^2)\vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = -1$ ,  $v_0 = 2$ . (Розв'язати самостійно).

## 2.6 Головні напрями й головні кривини.

### Лінії кривини. Формула Ейлера. Асимптотичні лінії

*Головними кривинами* поверхні  $S$  у точці  $M$  називаються екстремальні значення  $k_1$  і  $k_2$  нормальних кривин у цій точці. *Головними напрямками* поверхні  $S$  у точці  $M$  називаються напрямки, яким відповідають головні кривини  $k_1$  і  $k_2$  у цій точці. Крива на поверхні  $S$  називається *лінією кривини*, якщо в кожній її точці напрям дотичної співпадає з одним із головних напрямів поверхні.

Нехай  $du : dv = x : y$  – довільний напрям у точці  $M$  поверхні  $S$ , а  $k = k(x, y)$  – нормальна кривина поверхні у цій точці в даному напрямі. Тоді

$$k = k(x, y) = \Pi/I = (Lx^2 + 2Mxy + Ny^2)/(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2).$$

Нормальна кривина  $k = k(x, y)$  як функція від  $x$  і  $y$  для головних напрямів набуває екстремальних значень. Skorистаємося необхідними умовами екстремуму функції багатьох змінних – рівність нулю частинних похідних за кожним аргументом:

$$\partial k/\partial x = 2((Lx + My) \cdot I - (Ex + Fy) \cdot \Pi)/I^2 = 2((Lx + My) - \\ - (Ex + Fy) \cdot k)/I = 2((L - kE)x + (M - kF)y)/I = 0;$$

$$\partial k/\partial y = 2((Mx + Ny) \cdot I - (Fx + Gy) \cdot \Pi)/I^2 = 2((Mx + Ny) - \\ - (Fx + Gy) \cdot k)/I = 2((M - kF)x + (N - kG)y)/I = 0.$$

Звідси

$$\begin{cases} (L - kE)x + (M - kF)y = 0; \\ (M - kF)x + (N - kG)y = 0. \end{cases}$$

Оскільки отримана однорідна система відносно  $x$  і  $y$  має нульові розв'язки, то її головний визначник повинен дорівнювати нулю. Одержуємо *рівняння для знаходження головних кривин*:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Вилучаючи з однорідної системи нормальну кривину  $k$ , дістанемо співвідношення для головних напрямів:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо це співвідношення розглядається для змінної точки поверхні, то маємо *диференціальне рівняння ліній кривини*.

*Зауваження 1.* У кожній точці регулярної поверхні може бути або два головні напрями, що перпендикулярні між собою, або будь-який напрям є головним. У першому випадку головні напрями співпадають з напрямками осей індикатриси Дюпена. У другому випадку відповідна точка поверхні є або точкою сплющення (нормальна кривина у будь-якому напрямі дорівнює нулю,  $k_n = 0$ ), або еліптичною **точкою заокруглення (омбілічною точкою)** (індикатриса Дюпена є колом, оскільки  $k_n = \text{const} > 0$ ).

Наприклад, на еліпсоїді усі точки еліптичні, на однопорожнинному гіперboloїді всі точки гіперболічні, на циліндрі, відмінному від площини, усі точки параболічні. Усі точки площини є точками сплющення, а всі точки сфери є точками заокруглення.

На поверхні  $S$  у точці  $M$  два напрями  $d$  і  $\delta$ , що задаються відповідним відношенням  $du : dv$  і  $\delta u : \delta v$ , називаються **спряженими**, якщо диференціал  $d\vec{n}$  одиничного вектора нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у точці  $M$  у разі переміщення у напрямі  $d$  перпендикулярний до напрямку  $\delta$ :  $d\vec{n} \perp \delta\vec{r}$ , і навпаки,  $\delta\vec{n} \perp d\vec{r}$ .

*Зауваження 2.* Головні напрями спряжені між собою.

*Зауваження 3.* В околі кожної точки регулярної поверхні, що не є ні точкою сплющення, ні точкою заокруглення, поверхню можна параметризувати так, щоб координатні лінії стали лініями кри-

вини, при цьому  $F = 0$  і  $M = 0$ .

Візьмемо на регулярній поверхні  $S$  довільну точку  $M$ . Для спрощення будемо вважати поверхню параметризованою так, що координатні лінії служать лініями кривини. Тоді  $F = 0$ ,  $M = 0$  і перша та друга квадратичні форми мають вигляд:  $I = Edu^2 + Gdv^2$  і  $\Pi = Ldu^2 + Ndv^2$ . При цьому рівняння для головних кривин розпадається на два простіших:

$$\begin{vmatrix} L - kE & 0 \\ 0 & N - kG \end{vmatrix} = 0; \quad L - kE = 0; \quad k_1 = L/E; \\ N - kG = 0; \quad k_2 = N/G.$$

Відповідно нормальна кривина  $k_n$  у довільному напрямі  $du : dv = x : y$  визначається за формулою

$$k_n = \frac{\Pi}{I} = \frac{Lx^2 + Ny^2}{Ex^2 + Gy^2} = k_1 \frac{Ex^2}{Ex^2 + Gy^2} + k_2 \frac{Gy^2}{Ex^2 + Gy^2}.$$

Позначимо через  $\varphi$  кут, який утворює вибраний напрям  $du : dv = x : y$  із головним напрямом, що відповідає головній кривині  $k_1$ . Тоді

$$\cos \varphi = \sqrt{Ex} / \sqrt{Ex^2 + Gy^2}; \quad \sin \varphi = \sqrt{G}y / \sqrt{Ex^2 + Gy^2}.$$

Одержуємо **формулу Ейлера**:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

що дає змогу обчислити нормальну кривину в довільному напрямі через головні кривини поверхні в заданій точці.

Формула Ейлера дає можливість простежити як змінюється в заданій точці поверхні кривина  $k = k(\varphi)$  нормального перерізу залежно від кута  $\varphi$ . Зокрема,  $k(0) = k_1$  і  $k(\pi/2) = k_2$ . Нормальні перерізи, дотичні до яких розміщені симетрично відносно головних напрямів, мають однакову кривину, бо права частина формули Ейлера не змінюється у разі заміни кута  $\varphi$  на  $-\varphi$ :  $k(-\varphi) = k(\varphi)$ . Сума кривин  $k(\varphi)$  і  $k(\varphi + \pi/2)$  двох взаємно перпендикулярних нормальних перерізів залишається сталою та рівною сумі головних кривин  $k_1$  і  $k_2$ :

$$\begin{aligned}
 k(\varphi) + k(\varphi + \pi/2) &= k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi + k_1 \cos^2(\varphi + \pi/2) + \\
 + k_2 \sin^2(\varphi + \pi/2) &= k_1(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + k_2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \\
 &= k_1 + k_2.
 \end{aligned}$$

Напрямок на поверхні  $S$  у точці  $M$  називається **асимптотичним**, якщо нормальна кривина в цьому напрямі в заданій точці дорівнює нулю. Крива на поверхні  $S$  називається **асимптотичною лінією**, якщо в кожній своїй точці вона має асимптотичний напрям.

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

– диференціальне рівняння асимптотичних ліній поверхні  $S$ , де коефіцієнти  $L, M, N$  обчислені у змінній точці  $M = M(u, v)$ .

У гіперболічній точці поверхні існують два дійсні різні асимптотичні напрями. При цьому завжди можна ввести параметризацію поверхні так, щоб координатні лінії стали асимптотичними лініями. У параболічній точці існує тільки один асимптотичний напрям, а в точці сплюснення будь-який напрям – асимптотичний.

*Зауваження 4.* Довільна пряма, що лежить на регулярній поверхні, є її асимптотичною лінією.

*Зауваження 5.* Дотична площина до поверхні в кожній точці асимптотичної лінії є стичною площиною цієї лінії.

*Приклад 1.* На поверхні  $S: \vec{r} = u^3 \vec{i} + uv \vec{j} + v^2 \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1, v_0 = -1$ , знайти: а) нормальну кривину  $k_n$  за напрямом  $du/dv = -1/2$ ; б) головні кривини  $k_1$  і  $k_2$ ; в) головні напрями.

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E, F, G$  і  $L, M, N$  першої та другої квадратичних форм у заданій точці  $M_0(1; -1)$ :

$$\vec{r}_u = 3u^2 \vec{i} + v \vec{j} + 0 \vec{k}; \quad \vec{r}_u(M_0) = 3\vec{i} - \vec{j} + 0 \vec{k}; \quad \vec{r}_v = 0 \vec{i} + u \vec{j} + 2v \vec{k};$$

$$\vec{r}_v(M_0) = 0 \vec{i} + \vec{j} - 2 \vec{k}; \quad E(M_0) = \vec{r}_u^2(M_0) = 9 + 1 + 0 = 10;$$

$$F(M_0) = \vec{r}(M_0)_u \cdot \vec{r}_v(M_0) = 0 - 1 + 0 = -1; \quad G(M_0) = \vec{r}_v^2(M_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 1 + 4 = 5; \quad \sqrt{EG - F^2} \Big|_{M_0} = \sqrt{10 \cdot 5 - (-1)^2} = 7; \\
\vec{r}_{uu} &= 6u\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_{uu}(M_0) = 6\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_{uv} = 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}; \\
\vec{r}_{uv}(M_0) &= 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_{vv} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{r}_{vv}(M_0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \\
&+ 2\vec{k}; \quad (\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12; \quad (\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} = \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad (\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6; \\
L(M_0) &= \frac{(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{12}{7}; \quad M(M_0) = \frac{(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{6}{7}; \\
N(M_0) &= \frac{(\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{6}{7}.
\end{aligned}$$

З відношення  $du/dv = -1/2$ , що задає напрямок, маємо  $dv = -2du$ . Обчислимо шукану нормальну кривину  $k_n$ :

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \\
&= \frac{(12/7)du^2 + 2 \cdot (6/7)du \cdot (-2)du + (6/7) \cdot (-2)^2 du^2}{10du^2 + 2 \cdot (-1)du \cdot (-2)du + 5 \cdot (-2)^2 du^2} = \frac{6}{119}.
\end{aligned}$$

Для обчислення головних кривин у заданій точці  $M_0(1; -1)$  складемо і розв'яжемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 12/7 - 10k & 6/7 + k \\ 6/7 + k & 6/7 - 5k \end{vmatrix} = 0;$$



$$(12/7 - 10k)(6/7 - 5k) - (6/7 + k)^2 = 0; \quad 2401k^2 - 924k + 36 = 0;$$

$$k_1 = 12(11 - 6\sqrt{2})/343; \quad k_2 = 12(11 + 6\sqrt{2})/343.$$

Для знаходження головних напрямів у заданій точці  $M_0(1; -1)$  використовуємо рівняння:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 10 & -1 & 5 \\ 12/7 & 6/7 & 6/7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$dv^2 - 2du^2 = 0; \quad (dv/du)^2 = 2; \quad (dv/du)_1 = \sqrt{2}; \quad (dv/du)_2 = -\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* На поверхні  $S$ :  $\vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + uv \vec{k}$  знайти лінії кривини та асимптотичні лінії.

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E, F, G$  і  $L, M, N$  першої та другої квадратичних форм у довільній точці поверхні:

$$\vec{r}_u = \cos v \cdot \vec{i} + \sin v \cdot \vec{j} + v \vec{k}; \quad \vec{r}_v = -u \sin v \cdot \vec{i} + u \cos v \cdot \vec{j} + u \vec{k};$$

$$E = \vec{r}_u^2 = 1 + v^2; \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = uv; \quad G = \vec{r}_v^2 = 2u^2; \quad \sqrt{EG - F^2} = \\ = u\sqrt{2 + v^2}; \quad \vec{r}_{uu} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \vec{r}_{uv} = -\sin v \cdot \vec{i} + \cos v \cdot \vec{j} + \vec{k};$$

$$\vec{r}_{vv} = -u \cos v \cdot \vec{i} - u \sin v \cdot \vec{j} + 0\vec{k}; \quad (\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = 0;$$

$$(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 1 \\ \cos v & \sin v & v \\ -u \sin v & u \cos v & u \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 1 \\ \cos v & \sin v & v \\ -\sin v & \cos v & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = \begin{vmatrix} -u \cos v & -u \sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & v \\ -u \sin v & u \cos v & u \end{vmatrix} = -u^2 \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & v \\ -\sin v & \cos v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= u^2 v; \quad L = \frac{(\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = 0; \quad M = \frac{(\vec{r}_{uv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = 0;$$

$$N = (\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v / \sqrt{EG - F^2} = uv / \sqrt{2 + v^2}.$$

Складемо та розв'яжемо диференціальне рівняння ліній кривини:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1+v^2 & uv & 2u^2 \\ 0 & 0 & uv/\sqrt{2+v^2} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\frac{u^2 v^2 dv^2}{\sqrt{2+v^2}} + \frac{uv(1+v^2)dudv}{\sqrt{2+v^2}} = 0; \quad dv(uv dv + (1+v^2)du) = 0;$$

$$dv = 0, \text{ звідки } v = C_1 \text{ або } uv dv + (1+v^2)du = 0; \quad \frac{du}{u} = -\frac{v dv}{1+v^2};$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{2v dv}{1+v^2}; \quad \ln u = -\frac{1}{2} \ln(1+v^2) + \ln C_2; \quad u = \frac{C_2}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Складемо та розв'яжемо диференціальне рівняння асимптотичних ліній:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0; \quad 0du^2 + 2 \cdot 0dudv + \frac{uv}{\sqrt{2+v^2}} dv^2 = 0;$$

$$dv = 0; \quad v = C_1. \quad \blacksquare$$

*Приклад 3.* На поверхні  $S: \vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (2u^2 - v^3)\vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1, v_0 = 1$ , знайти: а) нормальну кривину  $k_n$  за напрямом  $du/dv = -5/3$ ; б) головні кривини  $k_1$  і  $k_2$ ; в) головні напрями.

(Розв'язати самостійно).

*Приклад 4.* На гелікоїді  $S: \vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + 3v\vec{k}$  знайти лінії кривини та асимптотичні лінії.

(Розв'язати самостійно).

## 2.7 Повна та середня кривини

Нехай  $k_1$  і  $k_2$  – головні кривини поверхні  $S$  у точці  $M$ . **Середньою кривиною** поверхні називається півсума головних кривин:

$$H = (k_1 + k_2)/2 = (EN + LG - 2MF)/(EG - F^2).$$

**Повною (гауссовою) кривиною** називається добуток головних кривин:

$$K = k_1 k_2 = (LN - M^2)/(EG - F^2).$$

З формули Ейлера випливає:

а) середня кривина  $H$  дорівнює нормальній кривині в напрямі вектора  $\vec{\tau}$ , який утворює кут  $\varphi = \pi/4$  з головними напрямками, тобто є бісектрисою прямого кута між ними:

$$k(\pi/4) = k_1 \cos^2(\pi/4) + k_2 \sin^2(\pi/4) = k_1(1/2) + k_2(1/2) = H;$$

б) середня кривина  $H$  дорівнює півсумі кривин  $k(\varphi)$  і  $k(\varphi + \pi/2)$  двох взаємно перпендикулярних нормальних перерізів:

$$H = (1/2)(k(\varphi) + k(\varphi + \pi/2));$$

в) середня кривина  $H$  є середнім інтегральним нормальної кривини за всіма напрямками:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi.$$

Якщо точка  $M$  є омбілічною, то  $H = \sqrt{K}$ . У точці сплюснення маємо  $H = K = 0$ . Вираз  $H^2 - K$  називається **ейлеровою різницею**. Вона не може набувати від'ємних значень ні в якій точці поверхні та дорівнює нулю тільки в омбілічній точці чи у точці сплюснення.

У загальному випадку **звичайної поверхні** повна  $K = K(u, v)$  і середня  $H = H(u, v)$  кривини є лінійно незалежними функціями від криволінійних координат  $u$  і  $v$ , тобто визначник  $|K_u H_v - K_v H_u|$  відмінний від нуля. (Існують так звані **вейнгартенові поверхні**, для яких  $|K_u H_v - K_v H_u| = 0$ ).

Повна кривина  $K$  дає змогу визначити будову поверхні  $S$  в околі заданої точки  $M$  :

а)  $K = k_1 k_2 > 0$ , тобто головні кривини  $k_1$  і  $k_2$  мають однакові знаки. Згідно з формулою Ейлера  $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$ , тому  $k_n > 0$  або  $k_n < 0$  для довільного нормального перерізу, який проходить через точку  $M$ . Це означає, що всі нормальні перерізи в цій точці відхиляються в той самий бік із головними перерізами. Отже, вся поверхня в околі точки  $M$  розміщується по одну сторону від дотичної площини до поверхні в цій точці. Точка  $M$  є еліптичною та в її околі поверхня нагадує еліптичний параболоїд (рис. 2.10).

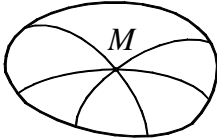


Рисунок 2.10

б)  $K = k_1 k_2 < 0$ , тобто головні кривини  $k_1$  і  $k_2$  мають різні знаки. Нехай  $k_1 < 0$ , а  $k_2 > 0$ . Головні перерізи відхиляються в різні боки й коли дотична до нормального перерізу обертається в дотичній площині навколо точки  $M$  від одного головного перерізу до іншого, кривина нормального перерізу  $k_n$  монотонно зростає від  $k_1 < 0$  до  $k_2 > 0$ , проходячи через нуль. Знайдемо напрям нормального перерізу, для якого  $k_n = 0$  (асимптотичний напрям). Підставимо це значення у формулу Ейлера  $0 = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$  і дістанемо  $\varphi = \pm \arctg \sqrt{-k_1/k_2}$ .

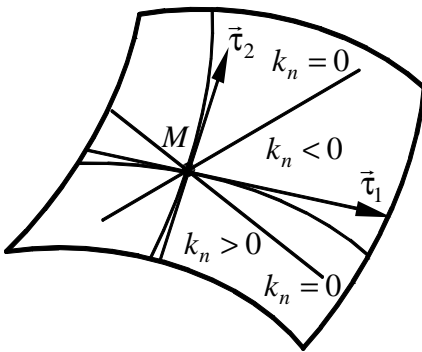


Рисунок 2.11

Маємо два асимптотичні напрями, один із яких напрямлений під кутом  $\varphi = \arctg \sqrt{-k_1/k_2}$  до головного напрямку  $\bar{\tau}_1$ , а другий – під кутом  $\varphi = -\arctg \sqrt{-k_1/k_2}$ , тобто асимптотичні напрями розміщені симетрично відносно головних напрямів (рис. 2.11). Із двох пар вертикальних кутів, утворених асимптотичними напрямками, одна пара містить го-

ловний напрям з кривиною  $k_1 < 0$  і всі напрями нормальних перерізів з від'ємною кривиною, які разом із головним відхиляються в один бік, і поверхня напрямлена опуклістю вгору, а друга пара – головний напрям з кривиною  $k_2 > 0$  та всі напрями нормальних перерізів з додатною кривиною. Ці нормальні перерізи разом із головним відхиляються в інший бік, і поверхня напрямлена опуклістю вниз. Отже, точка  $M$  є гіперболічною та поверхня в околі точки  $M$  має форму сідла (перевалу) і нагадує гіперболічний параболоїд.

в)  $K = k_1 k_2 = 0$ , тобто хоча б одна з головних кривин  $k_1$  і  $k_2$  дорівнює нулю. Нехай  $k_1 < 0$ , а  $k_2 = 0$ . Головний переріз з кривиною  $k_1 < 0$  напрямлений опуклістю вгору, а інший, як плоска крива, має в точці  $M$  перегин. Асимптотичний напрям збігається з головним  $\vec{\tau}_2$ . Інших асимптотичних напрямів у точці  $M$  не існує, оскільки при переході від головного напрямку, де  $k_1 < 0$ , до іншого,

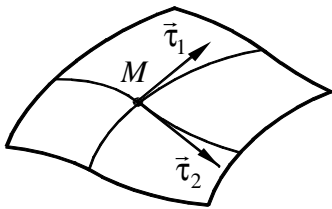


Рисунок 2.12

де  $k_2 = 0$ , нормальна кривина  $k_n$  змінюється неперервно та монотонно й нульових значень більше не набуває. Точка  $M$  є параболічною та поверхня в її околі схожа на параболічний циліндр (рис. 2.12). Параболічні точки утворюють лінію, яка відділяє еліптичні точки поверхні, де  $K > 0$ , від гіперболічних, де  $K < 0$ .

*Приклад 1.* На поверхні  $S: \vec{r} = e^{u+1} \vec{i} + u \ln v \cdot \vec{j} + u^2 v^2 \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = -1$ ,  $v_0 = 1$ , знайти головні кривини  $k_1$  і  $k_2$ , середню кривину  $H$  і повну кривину  $K$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і знайдемо коефіцієнти  $E, F, G$  і  $L, M, N$  першої та другої квадратичних форм у заданій точці  $M_0(-1; 1)$ :

$$\vec{r}_u = e^{u+1} \vec{i} + \ln v \vec{j} + 2uv^2 \vec{k}; \quad \vec{r}_u(M_0) = \vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\vec{r}_v = 0\vec{i} + (u/v) \vec{j} + 2u^2 v \vec{k}; \quad \vec{r}_v(M_0) = 0\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$$

$$E(M_0) = \bar{r}_u^2(M_0) = 1 + 0 + 4 = 5; \quad F(M_0) = \bar{r}(M_0)_u \cdot \bar{r}_v(M_0) = \\ = 0 + 0 - 4 = -4; \quad G(M_0) = \bar{r}_v^2(M_0) = 0 + 1 + 4 = 5;$$

$$\sqrt{EG - F^2} \Big|_{M_0} = \sqrt{5 \cdot 5 - (-4)^2} = 3; \quad \bar{r}_{uu} = e^{u+1} \bar{i} + 0 \bar{j} + 2v^2 \bar{k};$$

$$\bar{r}_{uu}(M_0) = \bar{i} + 0 \bar{j} + 2 \bar{k}; \quad \bar{r}_{uv} = 0 \bar{i} + (1/v) \bar{j} + 4uv \bar{k}; \quad \bar{r}_{uv}(M_0) = 0 \bar{i} + \\ + \bar{j} - 4 \bar{k}; \quad \bar{r}_{vv} = 0 \bar{i} - (u/v^2) \bar{j} + 2u^2 \bar{k}; \quad \bar{r}_{vv}(M_0) = 0 \bar{i} + \bar{j} + 2 \bar{k};$$

$$(\bar{r}_{uu} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad (\bar{r}_{uv} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v \Big|_{M_0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad (\bar{r}_{vv} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v \Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$L(M_0) = \frac{(\bar{r}_{uu} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = -\frac{4}{3}; \quad M(M_0) = \frac{(\bar{r}_{uv} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = \frac{2}{3};$$

$$N(M_0) = \frac{(\bar{r}_{vv} \times \bar{r}_u) \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{M_0} = -\frac{4}{3}.$$

Для обчислення головних кривин у заданій точці  $M_0(-1;1)$  складемо та розв'яжемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -4/3 - 5k & 2/3 + 4k \\ 2/3 + 4k & -4/3 - 5k \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-4/3 - 5k)(-4/3 - 5k) - (2/3 + 4k)^2 = 0; \quad 27k^2 + 24k + 4 = 0;$$

$$D = 144; \quad k_1 = -2/3; \quad k_2 = -2/9.$$

Знайдемо середню кривину  $H$  і повну кривину  $K$  у заданій точці  $M_0(-1;1)$ :

$$H = (k_1 + k_2)/2 = -4/9; \quad K = k_1 k_2 = 4/27. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. На поверхні  $S: \vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + \ln u \cdot \vec{j} + u^2 \sin v \cdot \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = \pi/2$ , знайти головні кривини  $k_1$  і  $k_2$ , середню кривину  $H$  і повну кривину  $K$ .

(Розв'язати самостійно).

**Поверхнею сталої гауссової кривини** називається поверхня, у кожній точці якої повна кривина  $K$  приймає одне те саме значення. Наведемо приклади таких поверхонь:

а) Площина є поверхнею нульової гауссової кривини  $K = 0$ .

б) Сфера радіуса  $R$  є поверхнею сталої додатної гауссової кривини  $K = 1/R^2$ .

в) Поверхнею сталої від'ємної гауссової кривини є псевдосфера  $S: \vec{r} = a \sin u \cos v \cdot \vec{i} + a \sin u \sin v \cdot \vec{j} + a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u) \vec{k}$ , де  $\pi/2 \leq u < \pi$ ,  $a = \operatorname{const} > 0$  (рис. 2.13). При цьому  $K = -1/a^2$ .

Псевдосфера утворюється обертанням *трактриси*  $x = a \sin u$ ,  $z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ ,  $\pi/2 \leq u < \pi$ , що лежить в площині  $Oxz$ , навколо осі  $Oz$ , яка слугує її асимптотою (рис. 2.14). Характеристичною властивістю трактриси є те, що відрізок дотичної від точки дотику до осі  $Oz$  сталий за довжиною та дорівнює  $a$ .

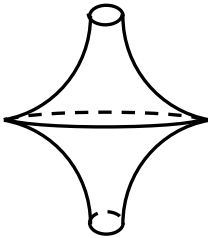


Рисунок 2.13

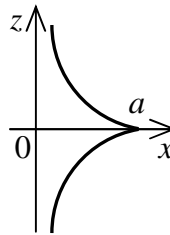


Рисунок 2.14

Поверхня, у кожній точці якої середня кривина  $H$  дорівнює нулю, називається **мінімальною поверхнею**. Вона має найменшу площу серед усіх поверхонь, обмежених заданим замкненим контуром.

Мінімальна поверхня є поверхнею від'ємної гауссової кривини або площиною. Дійсно, оскільки  $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$ , то  $k_1 = -k_2$ . Тоді  $K = k_1 k_2 < 0$ , якщо  $k_1 = -k_2 \neq 0$ , або  $K = k_1 k_2 = 0$ , якщо  $k_1 = k_2 = 0$ .

Мінімальна поверхня, відмінна від площини, складається з гіперболічних точок, через кожен з яких проходять дві асимптотичні лінії, що утворюють ортогональну сітку асимптотичних ліній на поверхні.

*Зауваження.* Якщо в мильний розчин занурити замкнений дротяний контур, а потім вийняти його звідти, то можна спостерігати натягнуту на нього мильну плівку. Оскільки сили поверхневого натягу завжди зводять до мінімуму площу поверхні плівки, то поверхня мильної плівки є мінімальною.

## 2.8 Внутрішня геометрія поверхні. Геодезичні лінії

*Внутрішніми* називаються такі властивості поверхні, які можна встановити безпосередніми вимірюваннями на поверхні, залишаючись у її межах: довжина дуги кривої, кут між кривими, площа частини поверхні тощо. *Внутрішня геометрія* вивчає зазначені властивості поверхні, що повністю визначаються довжинами кривих, які на ній лежать. Стосовно регулярних поверхонь можна сказати, що їхня внутрішня геометрія досліджує властивості поверхонь і фігур на них, за які відповідає перша квадратична форма.

Нехай задано дві регулярні поверхні  $S_1$ ,  $S_2$  і топологічне відображення  $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ , при якому довільній кривій  $L_1$  поверхні  $S_1$  відповідає лінія  $L_2$  поверхні  $S_2$ . Якщо образ  $L_2$  і прообраз  $L_1$  мають однакові довжини, то відображення  $f$  називається *ізометричним*. Також говорять, що поверхня  $S_2$  одержується шляхом *згинання (викривлення)* поверхні  $S_1$ . Накладання однієї поверхні  $S_1$  на іншу  $S_2$  після згинання називається *розгортанням* першої поверхні  $S_1$  на другу  $S_2$ .

Внутрішня геометрія вивчає властивості поверхні, що не змінюються при ізометриях. Різні поверхні можуть мати ту саму внутрішню геометрію, наприклад, площина та параболічний циліндр чи



інша поверхня, яку можна накласти на площину.

До об'єктів внутрішньої геометрії належить гауссова кривина поверхні, що засвідчує наступна

**теорема Гаусса.** Повну кривину  $K$  поверхні в довільній точці можна виразити через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх похідні у цій точці. Іншими словами, ізометричні поверхні у відповідних точках мають однакову гауссову кривину.

**Зауваження 1.** Повна кривина площини скрізь дорівнює нулю. Тому жодна поверхня з відмінною від нуля гауссовою кривиною не ізометрична площині, Отже, таку поверхню не можна відобразити на площину без спотворень фігур на ній. Задача мінімізації спотворень у разі зображення на плоскій карті частин поверхні Землі вирішується у картографії.

Далі розглядаються деякі інші об'єкти внутрішньої геометрії.

Нехай на поверхні  $S$  розміщена крива  $L$ , а  $M$  – довільна точка цієї лінії. Проведемо в точці  $M$  дотичну площину  $\alpha$  до поверхні та позначимо через  $\tilde{L}$  проекцію кривої  $L$  на площину  $\alpha$  (рис. 2.15). **Геодезичною кривиною**  $k_g$  лінії  $L$  на поверхні  $S$  в точці  $M$  називається кривина її проекції  $\tilde{L}$  на дотичну площину  $\alpha$  у цій же точці  $M$ .

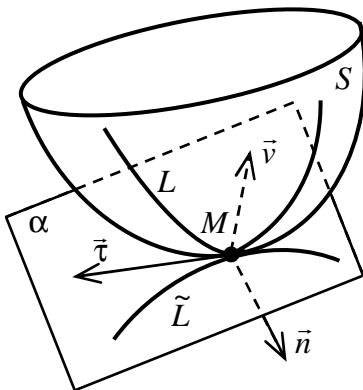


Рисунок 2.15

Криві  $L$  і  $\tilde{L}$  лежать на циліндричній поверхні  $G$ , напрямною якої слугує плоска лінія  $\tilde{L}$ , а твірні перпендикулярні до дотичної площини  $\alpha$ . При цьому криві  $L$  і  $\tilde{L}$  мають у точці  $M$  спільну дотичну, а крива  $\tilde{L}$  є нормальним перерізом циліндричної поверхні  $G$  у точці  $M$ . За теоремою Мен'є маємо  $k_g = k_1 \cos \theta$ , де  $k_1$  – кривина лінії  $L$ ,  $\theta$  – кут між головними нормаллями кривих  $L$  і  $\tilde{L}$ . Оскільки лінія  $\tilde{L}$  лежить у

площині  $\alpha$ , то  $\vec{\tau} \times \vec{n}$  – одиничний вектор головної нормалі кривої

$\tilde{L}$  у точці  $M$ , де  $\vec{\tau}$  – одиничний вектор дотичної прямої,  $\vec{n}$  – одиничний вектор дотичної площини. У разі довільної параметризації лінії  $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$  для її геодезичної кривини у точці  $M$  можна одержати формулу:

$$k_g = (\vec{r}_t' \times \vec{r}_t') \cdot \vec{n} / |\vec{r}_t'|^3.$$

**Геодезичною лінією** поверхні називається крива, в кожній точці якої геодезична кривина дорівнює нулю.

Властивості геодезичних ліній:

а) лінія на поверхні є геодезичною тоді та тільки тоді, коли в кожній її точці, де кривина відмінна від нуля, головна нормаль співпадає з нормаллю до поверхні в цій точці;

б) з усіх кривих поверхні, що проходять через дану точку та мають в ній спільну дотичну, саме геодезична лінія має найменшу кривину;

в) через кожну точку регулярної поверхні у будь-якому напрямі можна провести геодезичну лінію, до того ж лише одну;

г) при ізометричних відображеннях (згинаннях) поверхні геодезичні лінії переходять у геодезичні;

д) дуга геодезичної лінії між довільною точкою  $M$  та іншою досить близькою до неї точкою  $P$  є найкоротшою з усіх кривих  $MP$ , що лежать на цій поверхні. Ця екстремальна властивість є необхідною та достатньою, щоб лінія на поверхні була геодезичною.

**Зауваження 2.** Геодезичні лінії на поверхні є аналогом прямих на площині. Тому за допомогою геодезичних ліній на поверхні можна визначити відповідний трикутник та інші фігури. Властивості таких об'єктів будуть залежати від вибору поверхні, на якій вони розміщені.

**Наслідки.** З наведених властивостей випливає, що: а) довільна пряма на поверхні є геодезичною; б) якщо лінія на поверхні є одночасно геодезичною й асимптотичною, то вона – пряма; в) якщо геодезична лінія – плоска, то вона слугує і лінією кривини; г) якщо дві поверхні дотикаються уздовж кривої, що є геодезичною на одній з них, то ця лінія буде геодезичною й на іншій; д) меридіани поверхні обертання є геодезичними лініями; е) геодезичними лініями на сфері є її великі кола й тільки вони.

*Зауваження 3.* Вибрана дуга геодезичної лінії, що сполучає дві точки на поверхні, не завжди є найкоротшою. Таке може спостерігатися, коли геодезична лінія, що зв'язує дві точки, не єдина. Наприклад, дві точки сфери, що не служать кінцями одного діаметра, можна сполучити двома геодезичними лініями – дугами великого кола, менша з яких визначає найкоротшу відстань між цими точками (рис. 2.16).

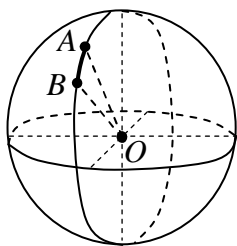


Рисунок 2.16

Координатна сітка на поверхні називається *напівгеодезичною*, якщо одна з сімей координатних ліній складається з геодезичних, а іншу утворюють їх ортогональні траєкторії – криві, що перетинають геодезичні під прямими кутами. Прикладами напівгеодезичної системи координат є меридіани й паралелі на поверхні обертання, а на площині – полярна система координат.

*Теорема Гаусса – Бонне.* Нехай на поверхні  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  визначена область  $\bar{D}$ , обмежена кусково-гладким замкненим контуром  $\gamma$ , що складається з  $n$  дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , які утворюють у спільних кінцях кути  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Виконується рівність

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_D K dS,$$

де  $k_g = k_g(u, v)$  – геодезична кривина контуру  $\gamma$ ;  $K = K(u, v)$  – гауссова кривина поверхні;  $ds$  – елемент довжини контуру  $\gamma$ ;  $dS$  – елемент площі поверхні;  $D$  – прообраз області  $\bar{D}$  на координатній площині  $Ouv$ .

Величина  $\iint_D K dS$  називається *інтегральною кривиною* області  $\bar{D}$ .

*Геодезичним трикутником*  $\Delta ABC$  називається фігура на поверхні  $S$ , що складається з трьох точок  $A, B, C$  і трьох дуг  $AB, BC, AC$  геодезичних ліній, які їх сполучають.

Наслідок теореми Гаусса – Бонне (для геодезичного трикутника). Сума внутрішніх кутів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  геодезичного трикутника  $\Delta$  на поверхні  $S$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  обчислюється за формулою

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Delta_{uv}} K dS,$$

де  $K = K(u, v)$  – повна кривина поверхні;  $dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$  – елемент площі поверхні,  $\Delta_{uv}$  – прообраз на площині  $Ouv$  геодезичного трикутника  $\Delta$ .

Зауваження 4. У випадку поверхні сталої гауссової кривини  $K = \text{const}$  маємо  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot S_{\Delta}$ , де  $S_{\Delta}$  – площа геодезичного трикутника  $\Delta$ . Розглянемо три важливі поверхні:

а) для площини  $K = 0$ , а геодезичними лініями слугують прямі, тому сума внутрішніх кутів довільного плоского трикутника дорівнює  $\pi$ ;

б) для сфери радіуса  $R$  маємо  $K = 1/R^2 > 0$ , тому сума внутрішніх кутів довільного сферичного трикутника перевищує  $\pi$ . При цьому додатна величина  $\varepsilon = K \cdot S_{\Delta}$  називається **сферичним надлишком** або **ексцесом**;

в) оскільки для псевдосфери  $K = -1/a^2 < 0$ , то сума внутрішніх кутів довільного геодезичного трикутника на ній менша  $\pi$ . Звідси випливає, що на псевдосфері можна локально інтерпретувати об'єкти геометрії Лобачевського. Проте загалом внутрішня геометрія Лобачевського не співпадає з внутрішньою геометрією псевдосфери, що пояснюється негладкістю трактриси, в якій існує точка звороту.

Нехай проведена триангуляція замкненої області  $\bar{D}$  на поверхні  $S$ , унаслідок якої вона розбивається на  $n$  геодезичних трикутників  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Для кожного  $i$ -го трикутника  $\Delta_i$  маємо  $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} - \pi = \iint_{\Delta_{iuv}} K dS$ , де  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$  – внутрішні кути трикутника  $\Delta_i$ ;  $\Delta_{iuv}$  – прообраз на площині  $Ouv$  цього трикутника  $\Delta_i$ . Підсумовуючи за всіма трикутниками триангуляції, дістанемо

МО

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}) - n\pi = \iint_D K dS,$$

де  $D$  – прообраз області  $\bar{D}$  на координатній площині  $Ouv$ .

Сума кутів триангуляції у лівій частині останнього співвідношення дорівнює  $2\pi m$ , де  $m$  – число вершин триангуляції. Оскільки кожна зі сторін є спільною для двох прилеглих трикутників, то  $2e = 3n$ , де  $e$  – кількість ребер триангуляції. Тоді ліва частина набуває вигляду

$$2\pi m - n\pi = 2\pi m - 3n\pi + 2n\pi = 2\pi m - 2e\pi + 2n\pi = 2\pi(m - e + n).$$

Уведемо позначення  $\chi(\bar{D}) = m - e + n$  – *ейлерова характеристика* області  $\bar{D}$ . Отже, маємо співвідношення, що зв'язує ейлерову характеристику області та її інтегральну кривину:

$$2\pi\chi(\bar{D}) = \iint_D K dS,$$

тобто *інтегральна кривина замкненої області – топологічний інваріант*.

*Приклад 1.* Для лінії  $L: v = -u^2$ , що розміщена на поверхні  $S: \vec{r} = e^{u+v}\vec{i} + v\ln u \cdot \vec{j} + uv\vec{k}$ , знайти геодезичну кривину  $k_g$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$ .

□ Продиференціюємо вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  і обчислимо її частинні похідні  $\vec{r}_u$  і  $\vec{r}_v$  у точці  $M_0$ :

$$\vec{r}_u = e^{u+v}\vec{i} + (v/u)\vec{j} + v\vec{k}; \quad \vec{r}_v = e^{u+v}\vec{i} + \ln u \cdot \vec{j} + u\vec{k};$$

$$\vec{r}_u(M_0) = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{r}_v(M_0) = \vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}.$$

Знайдемо вектор нормалі до поверхні та його орт у точці  $M_0$ :

$$\vec{N}_0 = \vec{N}(u_0, v_0) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k};$$

$$|\vec{N}_0| = \sqrt{6}; \quad \vec{n} = \vec{N}_0 / |\vec{N}_0| = (-1/\sqrt{6}; -2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}).$$

Запишемо внутрішні рівняння кривої  $L$  у параметричному вигляді  $u = t$ ;  $v = -t^2$ . Заданій точці  $M_0(1; -1)$  відповідає значення параметра  $t_0 = 1$ . Складемо зовнішнє векторне рівняння кривої  $L$ :

$$\vec{r} = e^{t-t^2} \vec{i} - t^2 \ln t \cdot \vec{j} - t^3 \vec{k}.$$

Продиференціюємо двічі знайдену вектор-функцію  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  і обчислимо її першу та другу похідні в заданій точці  $M_0$ :

$$\vec{r}' = e^{t-t^2} (1-2t) \vec{i} - (2t \ln t + t) \vec{j} - 3t^2 \vec{k}; \quad \vec{r}'(M_0) = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k};$$

$$\vec{r}'' = e^{t-t^2} (4t^2 - 4t - 1) \vec{i} - (2 \ln t + 3) \vec{j} - 6t \vec{k};$$

$$\vec{r}''(M_0) = -\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Обчислимо модуль  $|\vec{r}'|$  і мішаний добуток  $(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{n}$  у заданій точці  $M_0$ :

$$\begin{aligned} |\vec{r}'|_{M_0} &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}; \quad (\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{n}|_{M_0} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{11}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Знайдемо геодезичну кривину  $k_g$  у заданій точці  $M_0(1; -1)$ :

$$k_g = (\vec{r}'_t \times \vec{r}'_t) \cdot \vec{n} / |\vec{r}'_t|^3|_{M_0} = (-11/\sqrt{6}) / (\sqrt{11})^3 = -1/\sqrt{66}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* Для лінії  $L: v = u^3$ , що розміщена на поверхні  $S: \vec{r} = u \cos(u-v) \vec{i} + (u^2/v) \vec{j} + (u^3+v) \vec{k}$ , знайти геодезичну кривину  $k_g$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$ .

(Розв'язати самостійно).

## 2.9 Контрольні запитання та вправи

1. Дайте означення поверхні.
2. Перелічіть способи аналітичного подання поверхонь.
3. Яка поверхня називається параметризованою?
4. У якому вигляді записуються параметричні рівняння поверхні?
5. Яка поверхня називається регулярною?
6. Дайте означення звичайної точки поверхні.
7. Яка поверхня називається гладкою?
8. Що таке координатна сітка на поверхні?
9. Яка координатна сітка на поверхні є правильною?
10. У якому вигляді записуються внутрішні рівняння лінії на поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ?
11. Що таке дотична площина та нормальна пряма до поверхні?
12. Наведіть формулу для обчислення одиничного вектора нормалі до поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ .
13. Як записується рівняння дотичної площини до поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ?
14. Яка поверхня називається еліпсоїдом обертання?
15. Що таке геодезична широта й геодезична довгота точки еліпсоїда обертання?
16. Що таке перша квадратична форма поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ?
17. Які геометричні характеристики обчислюють за допомогою першої квадратичної форми?
18. Як обчислюється кут між кривими на поверхні?
19. За якої умови координатна сітка на поверхні є ортогональною?
20. Що таке друга квадратична форма поверхні  $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ? Поясніть її геометричний зміст.
21. Переконайтеся, що для точок сфери коефіцієнти другої квадратичної форми пропорційні коефіцієнтам першої квадратичної форми.
22. За яких умов перша та друга квадратичні форми однозначно задають поверхню?
23. Що називається нормальним перерізом поверхні?

24. Що називається похилим перерізом поверхні?
25. Як пов'язані, згідно з теоремою Мен'є, радіус кривини похилого перерізу регулярної поверхні в її довільній точці й радіус кривини її нормального перерізу у тій самій точці?
26. Що таке індикатриса Дюпена?
27. Як будується індикатриса Дюпена та який її вигляд у еліптичній, параболічній та гіперболічній точках поверхні?
28. Що таке напрям на поверхні? Запишіть формули для його визначення.
29. Що називають головними напрямками на поверхні?
30. Сформулюйте властивості головних напрямів.
31. Для яких точок на поверхні довільний напрям є головним?
32. Що таке головні кривини поверхні?
33. У яких випадках у точці на поверхні неможливо визначити головні напрями та головні кривини?
34. Наведіть формулу Ейлера, що виражає залежність між головними кривинами поверхні?
35. Як визначаються повна та середня кривини поверхні через головні кривини?
36. Що таке лінії кривини поверхні?
37. Який напрям на поверхні називається асимптотичним?
38. Які напрями на поверхні називаються спряженими?
39. Запишіть формули для визначення кривин нормальних перерізів у напрямках координатних  $u$ -ліній і  $v$ -ліній поверхні  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ .
40. Яке відображення однієї поверхні на іншу називається ізометричним?
41. Сформулюйте теорему Гаусса про повну кривину поверхні при ізометричному відображенні.
42. Поясніть, чому повна кривина є елементом внутрішньої геометрії поверхонь.
43. Яка крива на поверхні називається геодезичною?
44. Що називається геодезичною кривиною лінії на поверхні?
45. Як обчислюється геодезична кривина геодезичної лінії на поверхні?
46. Чи служить довільна пряма на поверхні геодезичною лінією?
47. Обчисліть геодезичну кривину  $k_g$  паралелі радіуса  $r$  на



сфері радіуса  $R$ .

48. Обчисліть кривину  $k_n$  нормального перерізу поверхні  $S$ :  
 $\vec{r} = a \cos v \cdot \vec{i} + a \sin v \cdot \vec{j} + u \vec{k}$ ,  $a > 0$  у напрямі дотичної до лінії  
 $v = 2u - 1$  на поверхні у довільній точці.

49. Перевірте, що середня кривина в усіх точках прямого гелікоїда  $S$ :  
 $\vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + av \vec{k}$ ,  $a > 0$  дорівнює нулю.

50. Визначте тип точок на поверхні  $S$ :  
 $\vec{r} = au \cos v \cdot \vec{i} + bu \sin v \cdot \vec{j} + ku \vec{k}$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $k > 0$ ).

51. Перевірте, що асимптотичні лінії на прямому гелікоїді  $S$ :  
 $\vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + av \vec{k}$ ,  $a > 0$  утворюють ортогональну сітку.

52. Яка координатна сітка на поверхні називається напівгеодезичною та які її властивості?

53. На поверхні  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  з першою квадратичною формою  
 $I = du^2 + (u^2 + 3)dv^2$  знайти диференціал  $ds$  довжини дуги лінії  
 $u = v$ .

54. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: точка поверхні є еліптичною, якщо в ній: а) повна кривина додатна; б) середня кривина додатна; в) повна кривина від'ємна; г) повна кривина дорівнює нулю.

55. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: точка поверхні є параболічною, якщо в ній: а) повна кривина додатна; б) середня кривина додатна; в) повна кривина від'ємна; г) повна кривина дорівнює нулю.

56. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: лінією кривини поверхні називається крива, у кожній точці якої її напрямок співпадає з: а) асимптотичним напрямком; б) головним напрямком; в) спряженим напрямком; г) нормальним напрямком.

57. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: геодезичною лінією на поверхні називається крива, у кожній точці якої: а) геодезична кривина додатна; б) геодезична кривина від'ємна; в) геодезична кривина дорівнює нулю; г) нормальна кривина від'ємна.

58. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твер-

дження: крива на поверхні, напрям якої в кожній точці співпадає з головним напрямком, називається: а) геодезичною лінією; б) лінією кривини; в) лінією спряження; г) асимптотичною лінією.

59. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: напрямок на поверхні називається асимптотичним, якщо вздовж нього: а) повна кривина дорівнює нулю; б) середня кривина дорівнює нулю; в) геодезична кривина дорівнює нулю; г) нормальна кривина дорівнює нулю.

60. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: через довільну точку поверхні у вказаному напрямі проходить: а) безліч геодезичних ліній; б) єдина геодезична лінія; в) дві геодезичні лінії; г) не менше двох геодезичних ліній.

61. Серед наведених варіантів а) – г) виберіть правильне твердження: якщо лінія на поверхні є геодезичною, то в кожній точці цієї кривої співпадають вектори: а) нормалі та бінормалі; б) головної нормалі та нормалі; в) головної нормалі та бінормалі; г) бінормалі та дотичної.

62. Обчислити першу та другу квадратичні форми псевдосфери  $S: \vec{r} = a \sin u \cos v \cdot \vec{i} + a \sin u \sin v \cdot \vec{j} + a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u) \vec{k}$  ( $\pi/2 \leq u < \pi$ ,  $a > 0$ ).

63. На поверхні  $S: \vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + u \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = \pi/4$ , знайти рівняння дотичної площини і нормальної прямої.

64. Обчислити першу та другу квадратичні форми катеноїда  $S: \vec{r} = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v \vec{i} + a \operatorname{sh}(u/a) \sin v \vec{j} + u \vec{k}$  ( $a > 0$ ).

65. Обчислити нормальну кривину параболоїда  $S: \vec{r} = u \vec{i} + v \vec{j} + (4u^2 + 3v^2) \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ , у напрямку, що задається відношенням  $du : dv = 2$ .

66. Знайти асимптотичні лінії катеноїда  $S: \vec{r} = \operatorname{ch} u \cos v \vec{i} + \operatorname{sh} u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$  у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = \pi/4$ .

67. На сфері  $S: \vec{r} = R \sin u \cos v \cdot \vec{i} + R \sin u \sin v \cdot \vec{j} + R \cos u \vec{k}$  знайти геодезичну лінію у точці  $M_0(u_0; v_0)$ , де  $u_0 = \pi/6$ ,  $v_0 = \pi/3$ , у напрямку, що задається відношенням  $du : dv = 2$ .

## 3 ЕЛЕМЕНТИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

*Сферичною геометрією* називається розділ математики, в якому вивчаються геометричні фігури, що лежать на поверхні кулі.

### 3.1 Точки та дуги на поверхні сфери. Сферичний двокутник. Сферичний трикутник

Найпростіші фігури на сферичній поверхні – точки та дуги великих та малих кіл.

Під час перетину сфери площиною, що проходить через її центр  $O$ , утворюється *велике коло* типу  $CABD$  (рис. 3.1). Січна площина, що не проходить через центр сфери, утворює *мале коло* типу  $LMNT$ .

Діаметр  $PP_1$ , що проходить через центр  $O$  великого кола  $CABD$  перпендикулярно до його площини, перетинає поверхню сфери у двох точках  $P$  та  $P_1$ . Ці *дві діаметрально протилежні точки*  $P$  та  $P_1$  називаються *полюсами* великого кола  $CABD$ . Саме коло  $CABD$  відносно точок  $P$  та  $P_1$  називається *полярною (екватором)*.

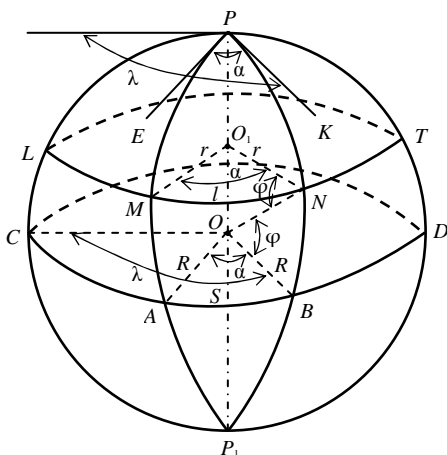


Рисунок 3.1

Кожна точка полярі  $CABD$  називається *полярно спряженою* з кожним з її полюсів  $P$  та  $P_1$ . Точки  $A$  і  $P$  сферичної поверхні є полярно спряженими, коли радіуси  $OA$  та  $OP$  перпендикулярні.

**Принцип двоїстості:** у сферичній геометрії кожному твердженню відповідає інше двоїсте, що одержується з даного взаємною заміною слів: «пара діаметрально протилежних точок» і «велике коло», «лежить на» і «прохо-

дить через», «сполучаються» і «перетинаються в» тощо.

Згідно з цим принципом, якщо одне з двох двоїстих тверджень доведене, то доведення іншого може бути одержане переходом від кожного великого кола до його полюсів, а від кожної пари діаметрально протилежних точок – до відповідної полярї.

У геометрії на сфері великі кола відіграють роль прямих на площині. Через довільні дві різні точки  $A$  та  $B$  на сферичній поверхні, що не є діаметрально протилежними, проходить єдине велике коло  $CABD$ . Але через діаметрально протилежні точки  $P$  та  $P_1$  можна провести нескінченну кількість великих кіл. Будь-які два різні великі кола перетинаються у двох діаметрально протилежних точках. У цьому полягає відмінність сферичної геометрії від плоскої, де дві різні прямі перетинаються не більше ніж в одній точці.

Величина дуги  $AB$  великого кола визначається центральним кутом  $\alpha = \angle AOB$ , що утворюється радіусами сфери  $OA$  та  $OB$ . Кут  $\alpha$  є лінійним кутом двогранного кута, який утворений півплощинами великих півкіл  $PAP_1$  та  $PBP_1$ .

Зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола встановлюється за формулою

$$S = \alpha R = \alpha^\circ R / \rho^\circ,$$

де  $S$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^\circ$  – лінійна, радіанна та градусна міри дуги великого кола;  $R$  – радіус сфери;  $\rho^\circ$  – число градусних одиниць у радіані,  $\rho^\circ = 180^\circ / \pi = 57^\circ,2957795\dots$

З рисунку 3.1, де  $\varphi = \angle BON$ , видно, що радіус  $r = O_1N$  малого кола  $LMNT$  дорівнює

$$r = R \cos \varphi.$$

Дузі  $MN$  малого кола  $LMNT$  відповідає центральний кут  $\alpha = \angle MO_1N$ . Довжина  $l$  цієї дуги обчислюється за формулою

$$l = \alpha r = \alpha R \cos \varphi = S \cos \varphi.$$

Для малого кола  $LMNT$ , площина якого перпендикулярна діаметрові  $PP_1$ , ближчий полюс  $P$  називається **сферичним центром**,

а дуга  $PM$  великого кола – *сферичним радіусом* малого кола  $LMNT$ .

Кутом між двома просторовими лініями, що перетинаються, називається кут між дотичними до цих ліній у точці їхнього перетину. Окремим випадком є кут  $APB$  між дугами великих півкіл  $PAP_1$  та  $PBP_1$ , що називається *сферичним кутом* (рис. 3.1). Він визначається кутом між дотичними  $EP$  та  $KP$  до цих дуг. Неважко довести, що  $\angle EPK = \alpha$ , оскільки  $EP \perp PP_1$  та  $KP \perp PP_1$ .

Оскільки обидва кути  $APB$  і  $AP_1B$ , утворені двома великими півколами  $PAP_1$  та  $PBP_1$  при їх різних кінцях  $P$  та  $P_1$ , рівні тому самому куту  $\alpha = \angle AOB$ , то ці кути рівні між собою. Величина кожного з них називається *кутом між двома великими півколами*.

Два великих кола визначають чотири кути між двома півколами, попарно рівні один одному. Ті з кутів, обидві сторони яких є продовженням сторін другого, рівні між собою та називаються *вертикальними кутами* (рис. 3.2). А ті з них, що мають одну спільну сторону, у сумі складають розгорнутий кут у  $180^\circ$  і називаються *суміжними кутами* (рис. 3.3).

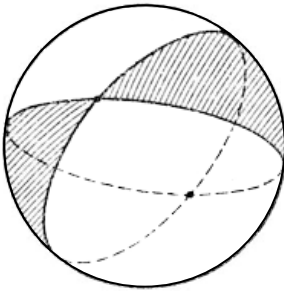


Рисунок 3.2

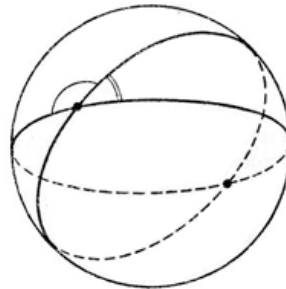


Рисунок 3.3

На поверхні сфери зазвичай розглядають фігури, що утворюються шляхом перетину дуг великих кіл.

Частина  $PAP_1B$  поверхні сфери, що обмежена двома великими півколами  $PAP_1$  та  $PBP_1$ , які мають спільний діаметр  $PP_1$ , називається *сферичним двокутником* (рис. 3.1). Сторони двокутника

завжди дорівнюють  $180^\circ$ . Сферичний двокутник визначається значенням кутів при його вершинах – кутом між двома великими півколами. У разі двокутника  $PA_1B$  цей кут –  $\alpha = \angle AOB$ .

**Сферичним трикутником** називається частина поверхні сфери, що обмежена трьома попарно сполученими дугами великих кіл.

Сферичний трикутник  $ABC$  має шість основних елементів: три кути  $A, B, C$  та три сторони  $a, b, c$ . Кути позначають тими ж великими літерами, що й вершини трикутника, а протилежні їм сторони – відповідними малими буквами.

У подальшому будемо розглядати тільки так звані **ейлерові** сферичні трикутники – такі, що задовольняють **обмеженням Ейлера**: кути та сторони можуть приймати значення лише в межах від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

Оскільки через дві різні точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за  $180^\circ$ , то побудова трикутника заданої орієнтації є однозначною.

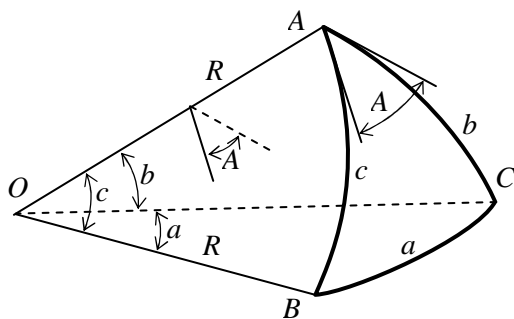


Рисунок 3.4

Площини великих кіл, дуги яких слугують сторонами сферичного трикутника  $ABC$ , перетинаються між собою у центрі сфери  $O$  та утворюють тригранник  $OABC$  (рис. 3.4).

З рисунку 3.4 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двограним кутам тригранника.

Сторони трикутника, визначені у кутовій мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто всі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.

Сторони сферичного трикутника  $a, b$  та  $c$  прийнято вимірювати у кутовій мірі, тому вибір радіуса сфери стає не істотним. На рисунку 3.5 трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їхні елементи, що відображені в кутовій мірі, є

відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус  $R$  сфери приймають за одиницю:  $R = 1$ .

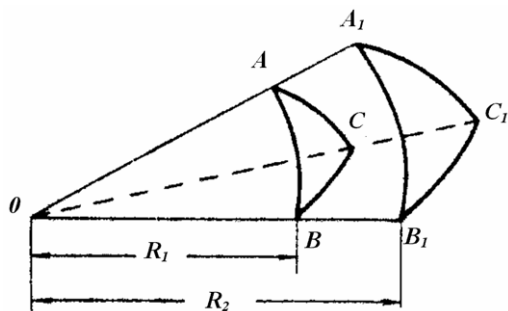


Рисунок 3.5

За формою сферичні трикутники поділяють на такі:

- 1) **прямокутні**, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює  $90^\circ$ ;
- 2) **прямосторонні**, якщо хоча б одна зі сторін трикутника дорівнює  $90^\circ$ ;
- 3) **косокутні** – в інших випадках.

Сферичні трикутники (за означенням) одночасно можуть бути прямокутними та прямосторонніми. Таким, наприклад, є трикутник  $PAB$  (рис. 3.1), який має кути при вершинах  $A$  та  $B$ , а також сторони  $PA$  та  $PB$ , що дорівнюють  $90^\circ$ . Можна побудувати сферичний трикутник, який має всі сторони та всі кути, що дорівнюють  $90^\circ$ . Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери й утворюється шляхом перетину трьох великих кіл, які лежать на взаємно перпендикулярних площинах.

У сферичній геометрії (за аналогією з плоскою) прийняті також поняття про **різносторонні**, **рівнобедрені** та **рівносторонні** трикутники.

Сферичні трикутники мають **висоти**, **медіани** та **бісектриси**, означення яких аналогічні до означень цих елементів у плоскій геометрії. Наприклад, бісектрисою кута  $A$  сферичного трикутника  $ABC$  називається дуга  $AL$  великого кола, що ділить цей кут навпіл.

*Бісектриси трьох кутів сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, вписаного в трикутник.*

*Серединні перпендикуляри до трьох сторін сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, описаного навколо трикутника.*

Розв'язання сферичних трикутників становить предмет сферичної тригонометрії та застосовується в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розгляді

геометричних задач у ряді інших дисциплін.

### 3.2 Сферична відстань.

#### Географічна сферична система координат

Менша дуга  $AB$  великого кола  $SABD$  визначає **сферичну відстань** між точками  $A$  та  $B$  на сферичній поверхні (рис. 3.1) і називається **ортодромією**. Ортодромія  $AB$  є найкоротшою геодезичною лінією на сфері, що з'єднує  $A$  та  $B$ .

Для введеної у такий спосіб **метрики** справджується **нерівність трикутника**: Сума двох сторін сферичного трикутника завжди більша за третю сторону:

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad a + c > b.$$

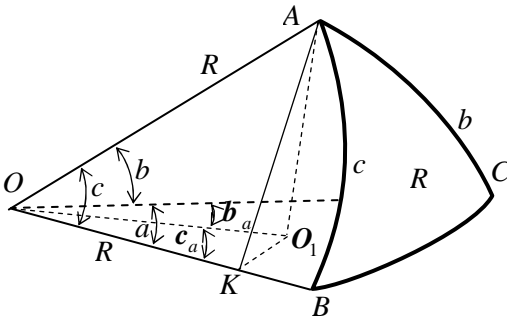


Рисунок 3.6

Ці нерівності впливають зі співвідношень між плоскими кутами відповідного тригранника (рис. 3.6).

Для суми плоских кутів тригранника  $OABC$  виконується нерівність

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ,$$

яку можна перефразувати так: Сума сторін

сферичного трикутника завжди більша за  $0^\circ$  і менша за  $360^\circ$ .

Безпосередньо з указаних нерівностей впливає таке:

а) кожна зі сторін сферичного трикутника більша за різницю двох інших:

$$a > c - b; \quad c > a - b; \quad b > a - c;$$

б) півпериметр  $p = (a + b + c) / 2$  сферичного трикутника більший за кожну з його сторін:

$$p > a; \quad p > b; \quad p > c.$$

Положення довільної точки  $N$  на сферичній поверхні можна

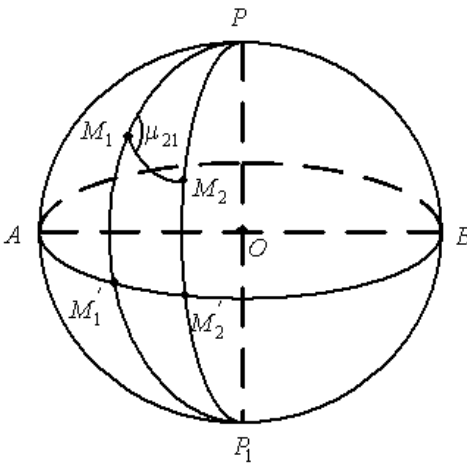


визначити шляхом введення деякої системи координат.

**Географічна сферична система координат** (рис. 3.1) задається двома взаємно перпендикулярними великими колами  $CABD$  та  $PLCP_1DT$ . Коло  $CABD$  називається **екватором**, а півколо  $PLCP_1$  – **початковим меридіаном**. Координатна сітка цієї системи утворюється за допомогою **паралелей** – кіл малих кіл, що паралельні екватору, та **меридіанів** – півкіл великих кіл, що перпендикулярні до екватора. Кожний меридіан з'єднує **північний**  $P$  та **південний**  $P_1$  **полюси**.

Розташування довільної точки  $N$  на сфері визначається двома координатами  $(\varphi, \lambda)$ , де  $\varphi$  – **широта** та  $\lambda$  – **довгота**. Широта  $\varphi$  вимірюється кутом  $\varphi = \angle BON$  або сферичною відстанню  $\varphi = BN$  уздовж меридіана від екватора до відповідної паралелі  $LMNT$  (на північ або південь від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ). Довгота  $\lambda$  вимірюється кутом  $\lambda = \angle CPB$  між початковим меридіаном  $PLCP_1$  та відповідним меридіаном  $PNBP_1$  або відстанню  $\lambda = CB$  уздовж екватора від початкового меридіану до відповідного меридіану  $PNBP_1$  (на схід чи захід від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ ).

Для двох довільних точок  $M_1$  та  $M_2$  на поверхні сфери **азимут** точки  $M_2$  відносно



точки  $M_1$  називається сферичний кут  $\mu_{21}$ , який утворюється за допомогою ортодромії  $M_1M_2$  та меншої дуги меридіана  $PM_1P_1$ , що проходить через точку  $M_1$  (рис. 3.7).

*Зауваження.* У навігації при виборі траєкторії часто відмовляються від ортодромії, оскільки остання (крім випадків, коли нею

Рисунок 3.7

слугує дуга паралелі або екватора, чи меридіана) перетинає меридіани під різними кутами, що вимагає постійної зміни курсу судна. Зручніше рухатися вздовж *локсодромії* – лінії, що утворює з кожним меридіаном сталий кут  $K$ . На сфері при  $K = 0^\circ$  і  $K = 180^\circ$  локсодромія співпадає з меридіаном, а при  $K = 90^\circ$  і  $K = 270^\circ$  – з паралеллю чи екватором. В інших випадках вона має вигляд спіралі з нескінченною кількістю витків, що необмежено наближається до полюсів (рис. 3.8). Спочатку розраховують ортодромію, потім відмічають на ній проміжні точки й наближено замінюють кожну ділянку між сусідніми точками відповідною локсодромією.

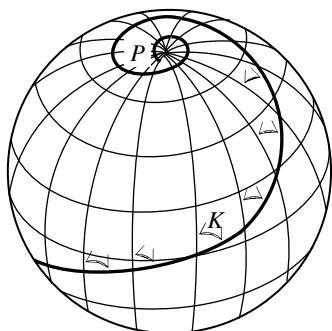


Рисунок 3.8

Довжина  $S$  та кут  $K$  локсодромії між точками  $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$  та  $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$  визначаються зі співвідношень:

а) при  $\varphi_1 = \varphi_2$ :

$$K = 90^\circ; \quad S = R \cos \varphi_1^\circ \cdot |\Delta \lambda^\circ| / \rho^\circ;$$

б) при  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ :

$$\operatorname{tg} K = \frac{\Delta \lambda^\circ / \rho^\circ}{\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_2^\circ / 2) - \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_1^\circ / 2)}; \quad S = \frac{R \Delta \varphi^\circ}{\rho^\circ \cos K}.$$

Тут широта  $\varphi^\circ$  і довгота  $\lambda^\circ$  подаються в градусах;  $\Delta \lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ$ ;  $\Delta \varphi^\circ = \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$ .

*Приклад 1.* Визначити довжину дуги  $l$  паралелі земної кулі ( $R = 6370$  км) на широті  $\varphi = 42^\circ 31' 25''$ , якщо різниця довгот  $\Delta \lambda = 8^\circ 12' 11''$ .

□ Довжина дуги паралелі визначається за формулою  $l = r \Delta \lambda$ , де  $r$  – радіус малого кола, частиною якого є дуга  $l$ ;  $\Delta \lambda$  – різниця довгот (у радіанах) кінців дуги;  $\Delta \lambda = \Delta \lambda^\circ / \rho^\circ$ ;  $\rho^\circ = 57^\circ, 2957795$ . Радіус малого кола  $r = R \cos \varphi$ , де  $R$  – радіус сфери (у даному випадку – земної кулі);  $\varphi$  – широта паралелі.

$$\text{Тоді} \quad l = R \Delta\lambda \cos \varphi.$$

При обчисленнях, оскільки величина  $R = 6370$  має чотири значущі цифри, інші величини для розрахунку візьмемо з п'ятьма значущими цифрами, а потім результат округлимо до чотирьох:

$$l = 6370 \cdot 0,1431703 \cdot 0,7369989 = 672,1 \text{ (км)}.$$

Але величина  $R$  задана в км, отже,  $l = 672$  км. ■

*Приклад 2.* Довжина дуги  $AB$  паралелі земної кулі на широті  $\varphi = 42^\circ 31' 25''$  дорівнює  $l = 672$  км. Визначити довжину дуги екватора  $S$  між меридіанами, що проходять через точки  $A$  та  $B$ .

□ Довжина дуги екватора  $S$ , що розташована між двома меридіанами, визначається за формулою  $S = R\Delta\lambda$ , де  $R$  – радіус земної кулі;  $\Delta\lambda$  – різниця довгот (у радіанах). Різниця довгот  $\Delta\lambda = l / (R \cos \varphi)$ , де  $l$  – довжина дуги паралелі;  $\varphi$  – широта паралелі. Тоді  $S = l / \cos \varphi$ .

$$\text{Обчислення:} \quad \varphi = 42^\circ,5236111; \cos \varphi = 0,7369989;$$

$$S = 672 / 0,737 = 912 \text{ (км)}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 3.* Визначити довжину  $S$  та кут  $K$  локсодромії між заданими двома точками у північній півкулі Землі ( $R = 6370$  км):

$$\text{а) } M_1(47^\circ 29'; 36^\circ 43'); \quad M_2(47^\circ 29'; 53^\circ 12');$$

$$\text{б) } M_1(52^\circ 11'; 49^\circ 30'); \quad M_2(58^\circ 17'; 55^\circ 36').$$

□ а) Оскільки  $\varphi_1 = \varphi_2 = 47^\circ 29'$ , то

$$K = 90^\circ; \quad S = R \cos \varphi_1^\circ \cdot |\Delta\lambda^\circ| / \rho^\circ.$$

$$\text{Обчислення:} \quad \varphi_1^\circ = 47^\circ,4833333; \cos \varphi_1^\circ = 0,6758046;$$

$$\lambda_1^\circ = 36^\circ,7166667; \lambda_2^\circ = 53^\circ,2000000;$$

$$\Delta\lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ = 16^\circ,4833333;$$

$$S = 6370 \cdot 0,6758046 \cdot 16^\circ,4833333 / 57^\circ,2957795 = 1238 \text{ (км)}.$$

б) (Розв'язати самостійно.  $S = 780$  км;  $K = 29^\circ 37' 59''$ ). ■

### 3.3 Полярні сферичні трикутники. Спряжені трикутники

Розглянемо сферичний трикутник  $ABC$  і відповідний тригранник  $OABC$  (рис. 3.4). Проведемо через центр  $O$  три промені  $OA_1$ ,  $OB_1$  і  $OC_1$ , що перпендикулярні відповідно до граней  $OBC$ ,  $OAC$  і  $OAB$  та направлені всередину тригранника. Точки перетину  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  цих променів зі сферою слугують полюсами відповідно поляр  $BC$ ,  $AC$  і  $AB$  – сторін  $\triangle ABC$ . Сферичний трикутник  $A_1B_1C_1$  називають **полярним** до даного трикутника  $ABC$ .

Виявляється, що трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  **взаємополярні**: якщо вершини трикутника  $ABC$  є полюсами сторін трикутника  $A_1B_1C_1$ , то і, навпаки, вершини трикутника  $A_1B_1C_1$  є полюсами сторін трикутника  $ABC$  (рис. 3.9).

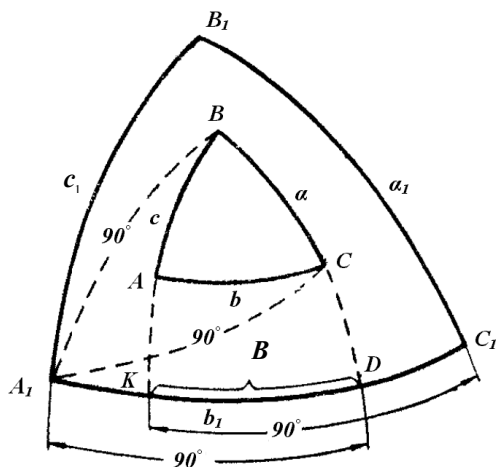


Рисунок 3.9

Сферичний трикутник, що співпадає зі своїм полярним, називають **автополярним**. Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери.

Користуючись рисунком 3.9, знайдемо співвідношення між елементами  $B$  і  $b_1$  взаємополярних трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ :

$$A_1K = A_1D - KD = 90^\circ - B; \quad b_1 = A_1C_1 = A_1K + KC_1 = \\ = 90^\circ - B + 90^\circ = 180^\circ - B. \quad \text{Звідси } b_1 + B = 180^\circ.$$

Аналогічні вирази можна знайти для пар  $A$  і  $a_1$ ,  $C$  і  $c_1$ .

Ці співвідношення

$$a_1 + A = 180^\circ; \quad b_1 + B = 180^\circ; \quad c_1 + C = 180^\circ$$

виражають головну властивість полярних трикутників: *сума довільного кута даного трикутника  $ABC$  та відповідної йому сторони полярного трикутника  $A_1B_1C_1$  дорівнює  $180^\circ$ .*

З того, що трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  – взаємополярні, випливає

$$a + A_1 = 180^\circ; \quad b + B_1 = 180^\circ; \quad c + C_1 = 180^\circ.$$

Отже, кожне твердження про сторони та кути сферичного трикутника можна перетворити у відповідне твердження про кути та сторони полярного трикутника.

Розглянемо два взаємополярні трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  (рис. 3.9). Для полярного трикутника  $A_1B_1C_1$ , маємо

$$0^\circ < a_1 + b_1 + c_1 < 360^\circ.$$

На підставі властивостей полярних трикутників, можна написати:  $a_1 = 180^\circ - A$ ,  $b_1 = 180^\circ - B$ ,  $c_1 = 180^\circ - C$ . Підставимо ці значення сторін  $a_1$ ,  $b_1$  та  $c_1$  у попередню нерівність та дістанемо:  $0^\circ < 540^\circ - (A + B + C) < 360^\circ$ . Віднімемо з усіх частин останньої нерівності  $540^\circ$ , змінимо знак на протилежний та одержимо вираз

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ.$$

Тобто *сума кутів сферичного трикутника завжди більша за  $180^\circ$  і менша за  $540^\circ$ .*

Для полярного трикутника  $A_1B_1C_1$  маємо:  $a_1 + b_1 > c_1$ . Підставимо в цю нерівність значення сторін  $a_1 = 180^\circ - A$ ,  $b_1 = 180^\circ - B$ ,  $c_1 = 180^\circ - C$  і дістанемо:

$$360^\circ - A - B > 180^\circ - C \quad \text{або} \quad A + B - C < 180^\circ.$$

Отже, сума двох кутів сферичного трикутника без третього менша за  $180^\circ$ :

$$A + B - C < 180^\circ, \quad A + C - B < 180^\circ, \quad B + C - A < 180^\circ.$$

**Рухом (переміщенням)** на сфері називається таке її перетворення, що зберігає відстані між точками.

Два сферичні трикутники називаються **рівними**, якщо їх можна сумістити один з одним переміщенням на сфері.

Рівність трикутників на сфері, як і на площині, визначається **рівністю їхніх трьох елементів**.

Два сферичних трикутники, що розміщені на тій самій сфері, рівні між собою, якщо вони мають відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними; 2) одну сторону та два прилеглих до неї кути; 3) три сторони; 4) три кути.

Перші три випадки аналогічні до відповідних у геометрії на площині та можуть бути доведені шляхом суміщення трикутників один з одним рухом на сфері. Справедливість рівності трикутників у четвертому випадку впливає з таких міркувань. Відомо, що три двогранні кути повністю визначають тригранник. Але два тригранники, що мають відповідно рівні двогранні кути, будуть рівними, отже їх можна сумістити один з одним усіма їхніми точками. Такі тригранники будуть утворювати на поверхні тієї самої сфери трикутники, що мають усі відповідно рівні елементи.

**Зауваження.** На поверхні сфери, як і на площині, можливий випадок, коли два рівних трикутники мають протилежну орієнтацію. Якщо розглядати ці трикутники як тверде тіло, то їх не можна сумістити один з одним, не виходячи зі сферичної поверхні, тобто використовуючи тільки обертання навколо осі. Для цього потрібно застосувати також дзеркальну симетрію. Такі трикутники називаються **симетричними (дзеркальними)**.

На рисунку 3.10 зображений двокутник з кутом  $\alpha$  та проведена дуга великого кола  $CD$ . Ця дуга ділить даний двокутник на два сферичних трикутники  $ACD$  та  $BCD$ , що називаються **спряженими**

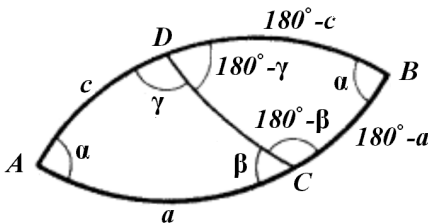


Рисунок 3.10

за стороною  $CD$ . Для будь-якого сферичного трикутника існує три спряжених (за кожною зі сторін). У спряжених трикутників завжди є одна спільна сторона. Протилежні цій стороні кути рівні між собою. Кути при двох інших вершинах  $C$  та  $D$ , а також прилеглі до них сторони, доповнюють один одного до  $180^\circ$ .

### 3.4 Площа сферичного трикутника

Спочатку одержимо формулу для площі сферичного двокутника. Якщо площу поверхні кулі поділити на 360 рівних частин, то кожна із них дорівнюватиме площі  $F_{1^\circ}$  двокутника з кутом при вершині в  $1^\circ$ :  $F_{1^\circ} = 4\pi R^2/360 = 2\pi R^2/180$ . Тоді площа двокутника з кутом  $\alpha^\circ$  буде

$$F_\alpha = F_{1^\circ} \alpha^\circ = (2\pi/180) R^2 \alpha^\circ = 2\alpha^\circ R^2 / \rho^\circ,$$

де  $\rho^\circ = 180^\circ/\pi = 57^\circ,2957795\dots$  та  $\alpha^\circ$  подано у градусах.

Виразимо  $\alpha$  у радіанній мірі, тоді:

$$F_\alpha = 2\alpha R^2.$$

На рисунку 3.11 подано два рівних (точніше, симетричних) трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ . Трикутник  $A_1B_1C_1$  утворюється дугами великих кіл, що є продовженням сторін  $\triangle ABC$ . Відповідні вершини обох трикутників лежать у діаметрально протилежних точках.

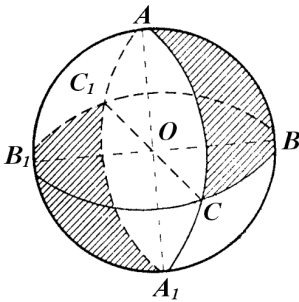


Рисунок 3.11

Площу сферичного трикутника  $ABC$ , згідно з рисунком 3.11, можна виразити такими трьома співвідношеннями:

$$F_{ABC} = F_A - F_{A_1BC}; \quad F_{ABC} = F_B - F_{AB_1C}; \quad F_{ABC} = F_C - F_{ABC_1},$$

де  $F_A, F_B, F_C$  – площі двокутників  $ABA_1C, BAB_1C$  та  $CAC_1B$ ;  $F_{A_1BC}, F_{AB_1C}, F_{ABC_1}$  – площі трикутників  $A_1BC, AB_1C$  та  $ABC_1$ .

Складемо окремо ліві та праві частини цих рівнянь і врахуємо формулу  $F_\alpha = 2\alpha R^2$ . Тоді

$$3F_{ABC} = 2R^2(A + B + C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{ABC_1}).$$

Оскільки трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  – рівні, то їх площі однакові. Тоді  $3F_{ABC} = 2R^2(A + B + C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C})$ .

Другий доданок правої частини одержаного рівняння дорівнює площі  $2\pi R^2$  півсфери без площі  $\Delta ABC$  (рис. 3.11):

$$F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C} = 2\pi R^2 - F_{ABC}.$$

Тоді

$$2F_{ABC} = 2R^2(A + B + C - \pi) \quad \text{або} \quad F_{ABC} = R^2(A + B + C - \pi).$$

Різниця між сумою всіх внутрішніх кутів сферичного трикутника та сумою всіх таких самих кутів плоского трикутника називається **сферичним надлишком (ексцесом)**  $\varepsilon$  даного трикутника:

$$\varepsilon^\circ = A + B + C - 180^\circ \quad \text{або} \quad \varepsilon = A + B + C - \pi.$$

Застосовуючи це поняття, для площі сферичного трикутника остаточно одержуємо

$$F_{ABC} = R^2\varepsilon,$$

де сферичний надлишок  $\Delta ABC$  взято у радіанній мірі.

*Площа сферичного трикутника дорівнює добутку квадрата радіуса великого кола на сферичний надлишок.*

*Приклад.* Визначити радіус сфери  $R$ , якщо площа сферичного трикутника  $F = 687200$  км<sup>2</sup>, а його кути:

$$A = 123^\circ, 251744; \quad B = 50^\circ, 00671 \quad \text{і} \quad C = 84^\circ, 12262.$$

□ Площа сферичного трикутника визначається за формулою  $F = R^2\varepsilon$ , де  $R$  – радіус сфери (у кілометрах);  $\varepsilon$  – сферичний надлишок (у радіанах).

Обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 123^\circ, 251744 + 50^\circ, 00671 + 84^\circ, 12262 - 180^\circ = 77^\circ, 381074; \quad \varepsilon = 1,35055 \quad (\text{у радіанах});$$

$$R = \sqrt{F/\varepsilon} = \sqrt{687200/1,35055} \cong 713 \quad (\text{км}). \quad \blacksquare$$



### 3.5 Контрольні запитання та справи

1. Що вивчає сферична геометрія?
2. Що таке ортодромія та локсодромія?
3. Яким співвідношенням задається зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола?
4. Що таке полюс і полярна?
5. У чому полягає принцип двоїстості?
6. Що таке сферичний центр і сферичний радіус малого кола?
7. Яка проекція зветься стереографічною?
8. Як визначають положення точки в географічній сферичній системі координат?
9. За якими формулами обчислюють лінійну величину дуги великого та малого кіл?
10. Що таке сферичний кут і як він вимірюється?
11. Дайте означення вертикальних, суміжних сферичних кутів.
12. Що таке сферичний двокутник? Які в нього елементи?
13. Що таке сферичний трикутник? Які в нього елементи?
14. У чому полягають обмеження Ейлера?
15. Дайте означення висоти, медіани, бісектриси та середнього перпендикуляра сферичного трикутника.
16. У чому полягає рівність сферичних трикутників?
17. Що таке симетричні сферичні трикутники?
18. Що таке спряжені сферичні трикутники?
19. Що таке взаємополярні сферичні трикутники? Наведіть їх властивості.
20. Чи існує сферичний трикутник, який є полярним сам до себе?
21. Як класифікують сферичні трикутники за сторонами та кутами?
22. Наведіть співвідношення між сторонами та кутами сферичного трикутника.
23. Уставте пропущені слова: сферичний трикутник вважається заданим, якщо вказані будь-які ... із його ... основних елементів.
24. Уставте пропущене слово: згідно з обмеженнями Ейлера сторона сферичного трикутника не перевищує ... градусів.
25. Що таке ексцес? Які межі його зміни?
26. Як обчислюють площу сферичного двокутника?
27. Як обчислюють площу сферичного трикутника?

## 4 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ СФЕРИЧНОЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ

**Сферична тригонометрія** розглядає методи розв'язання сферичних трикутників, що утворюються під час перетину дуг великих кіл на кульовій поверхні.

**Основні формули (формули першого порядку)** зв'язують чотири чи п'ять елементів сферичного трикутника. Вони дають можливість за відомими трьома чи чотирма елементами знайти четвертий чи п'ятий.

### 4.1 Формули косинусів сторін сферичного трикутника

Розглянемо рисунок 4.1, на якому зображено трикутник  $ABC$  на сфері з радіусом, що дорівнює одиниці, та центром у точці  $O$ . У вершині  $A$  проведені дотичні  $AE$  та  $AD$  до сторін  $b$  та  $c$ . Ці дотичні перетинаються у точках  $D$  і  $E$  з продовженням радіусів сфери, що проходять через вершини  $C$  і  $B$ .

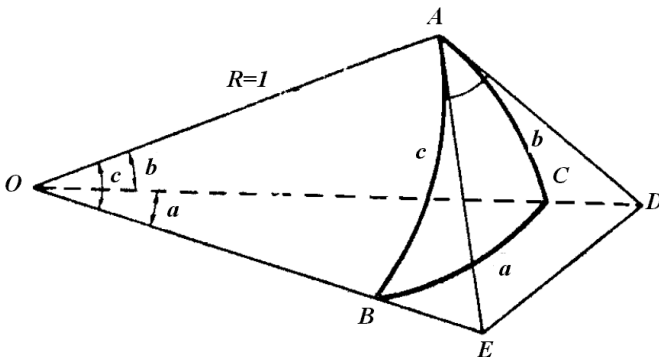


Рисунок 4.1

Застосуємо теорему косинусів тригонометрії на площині до трикутників  $AED$  та  $OED$  і запишемо її для сторони  $DE$ :

$$\left. \begin{aligned} DE^2 &= AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A \\ DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Прирівняємо між собою праві частини цих рівнянь і знайдемо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) - 2OD \cdot OE \cos \alpha + 2AE \cdot AD \cos A = 0.$$

Зважаючи, що радіус сфери  $R = 1$ , маємо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = OA^2 + OA^2 = 2;$$

$$AD = \operatorname{tg} b; \quad AE = \operatorname{tg} c; \quad OE = 1/\cos c; \quad OD = 1/\cos b.$$

Далі одержуємо:  $1 - \cos a / (\cos b \cos c) + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A = 0$ .

Помножимо всі доданки останнього рівняння на  $\cos b \cos c$  і остаточно дістанемо:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Побудова на рисунку 4.1 можлива, якщо кожна зі сторін  $b$  і  $c$  менша  $90^\circ$ . Тому одержаний вираз потрібно узагальнити на той випадок, коли трикутник має сторони більші за  $90^\circ$ . Для цього звернемося до рисунку 4.2. На ньому зображено  $\triangle ABC$ , що має сторони  $b > 90^\circ$  і  $c > 90^\circ$ . Якщо продовжимо сторони  $b$  і  $c$  до їхнього перетину в точці  $D$ , то одержимо спряжений трикутник  $BCD$ , в якому кожна зі сторін  $180^\circ - b$  і  $180^\circ - c$  буде менша за  $90^\circ$ . Можемо записати:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos(180^\circ - b) \cos(180^\circ - c) + \\ &+ \sin(180^\circ - b) \sin(180^\circ - c) \cos A \end{aligned}$$

або  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ .

*Зауваження.* Для написання формул сферичної тригонометрії часто використовують **метод перестановки елементів по колу**: кожену зі сторін та кожний з кутів трикутника замінюють у формулі, яку розглядають, наступними за ходом сторонами та кутами (у довільному напрямі), при цьому останній елемент завжди замінюють на перший (схема на рисунку 4.3).

Застосуємо цей метод і запишемо **формули косинусів сторін сферичного трикутника**:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\}.$$

Косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших сторін, складеному з добутком синусів цих самих сторін на косинус кута між ними.

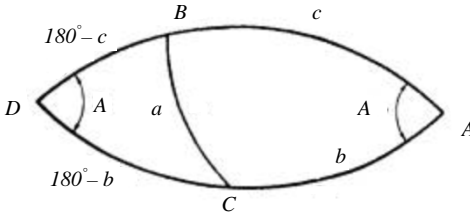


Рисунок 4.2

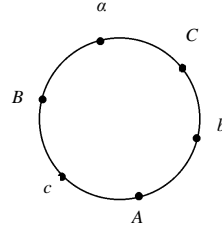


Рисунок 4.3

#### 4.2 Формули косинусів кутів сферичного трикутника

Запишемо формули косинусів сторін для полярного трикутника  $A_1B_1C_1$  відносно трикутника  $ABC$  :

$$\left. \begin{aligned} \cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1 \\ \cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1 \\ \cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos C_1 \end{aligned} \right\}$$

Згідно з головною властивістю взаємополярних трикутників  $A_1B_1C_1$  і  $ABC$  дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \cos (180^\circ - A) &= \cos (180^\circ - B) \cos (180^\circ - C) + \\ &+ \sin (180^\circ - B) \sin (180^\circ - C) \cos (180^\circ - a) \\ \cos (180^\circ - B) &= \cos (180^\circ - A) \cos (180^\circ - C) + \\ &+ \sin (180^\circ - A) \sin (180^\circ - C) \cos (180^\circ - b) \\ \cos (180^\circ - C) &= \cos (180^\circ - A) \cos (180^\circ - B) + \\ &+ \sin (180^\circ - A) \sin (180^\circ - B) \cos (180^\circ - c) \end{aligned} \right\}$$

Скористаємося формулами зведення тригонометричних функцій і помножимо на від'ємну одиницю ліву та праву частини кожного з останніх співвідношень. У результаті одержимо **формули**

**косинусів кутів сферичного трикутника:**

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \right\}.$$

Косинус кута сферичного трикутника дорівнює добутку синусів двох інших кутів на косинус сторони між ними без добутку косинусів цих самих кутів.

### 4.3 Сферична теорема синусів

**Сферична теорема синусів.** Відношення синуса кута сферичного трикутника до синуса протилежної сторони є величина стала для даного трикутника:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = K, \text{ де } K = \text{const}.$$

Інакше кажучи, синуси кутів сферичного трикутника відносяться як синуси протилежних сторін.

*Доведення.* За формулою косинуса кута знайдемо:

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - (\cos a - \cos b \cos c)^2 / (\sin b \sin c)^2 = \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c) / (\sin^2 b \sin^2 c). \end{aligned}$$

Поділимо обидві частини одержаного виразу на  $\sin^2 a$ :

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = K^2.$$

Звідси  $\sin A / \sin a = K$ . До величини  $K$  кожна зі сторін сферичного трикутника входить однаково. Тому заміна сторін по колу

не змінить значення величини  $K$ . Тобто, значення  $K$  є сталим для даного трикутника. Отже,  $\sin B/\sin b = K$  і  $\sin C/\sin c = K$ .

*Наслідок.* Теорема синусів установлює зв'язок між сторонами та протилежними їм кутами сферичного трикутника:

а) *напроти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки:*  $a = b \Leftrightarrow A = B$ ;

б) *напроти більшого кута сферичного трикутника лежить більша сторона і, навпаки, проти більшої сторони сферичного трикутника лежить більший кут:*  $A > B \Leftrightarrow a > b$ .

*Зауваження.* Для малого сферичного трикутника, коли  $a, b, c \ll R$ , можна покласти  $\sin a \sim a$ ,  $\sin b \sim b$ ,  $\sin c \sim c$ . Тоді дістанемо теорему синусів для плоского трикутника:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = K, \text{ де } K = \text{const}.$$

#### 4.4 Формули п'яти елементів сферичного трикутника

*Формули п'яти елементів* установлюють зв'язок: а) між трьома сторонами та двома кутами сферичного трикутника (*основні формули п'яти елементів*); б) між трьома кутами та двома сторонами сферичного трикутника (*змінені формули п'яти елементів*).

Скористаємося формулами косинусів сторін:

$$\left. \begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\}.$$

Спочатку виключимо  $\cos c$  із першої формули, застосовуючи другу:

$$\cos b = \cos a (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = (1 - \sin^2 a) \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = \cos b - \sin^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B.$$

Зведемо подібні члени, а потім розділимо обидві частини рівності на  $\sin a$ . Дістанемо:

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C.$$

Якщо зі взятої пари формул виключити  $\cos b$ , то одержимо:

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B.$$

Зробимо аналогічні перетворення для двох інших пар формул косинусів сторін. Отримаємо **основні формули п'яти елементів**:

$$\left. \begin{aligned} \sin c \cos B &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C \\ \sin b \cos C &= \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B \\ \sin c \cos A &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \sin b \cos A &= \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \end{aligned} \right\}.$$

*Добуток синуса сторони на косинус прилеглого кута дорівнює добутку синуса третьої сторони на косинус протилежної цьому куту сторони без добутку косинуса третьої сторони на синус тієї самої протилежної сторони та на косинус кута між ними.*

Одержані формули однорідні відносно синусів сторін сферичного трикутника. Згідно зі сферичною теоремою синусів зробимо наступну заміну в цих співвідношеннях:

$$\sin a = (1/K) \sin A; \quad \sin b = (1/K) \sin B; \quad \sin c = (1/K) \sin C.$$

Після простих перетворень одержимо так звані **змінені формули п'яти елементів**, що встановлюють зв'язок між трьома кутами та двома сторонами сферичного трикутника:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a \\ \sin A \cos c &= \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a \\ \sin B \cos a &= \sin C \cos A + \cos C \sin A \cos b \\ \sin B \cos c &= \sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b \\ \sin C \cos b &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c \\ \sin C \cos a &= \sin B \cos A + \cos B \sin A \cos c \end{aligned} \right\}.$$

*Добуток синуса кута на косинус прилеглої сторони дорівнює добутку косинуса кута, що протилежний цій стороні, на синус третього кута плюс добуток синуса протилежного кута на косинус третього кута та на косинус сторони між ними.*

#### 4.5 Формули чотирьох елементів сферичного трикутника (формули котангенсів)

Знайдемо формули, що встановлюють зв'язок між чотирма поряд розташованими елементами – двома сторонами та двома прилеглими до них кутами трикутника.

Якщо у лівій частині кожної з основних формул п'яти елементів зробити відповідну заміну синусів сторін за такими парами формул, що випливають із теореми синусів:

$$\text{а) } \sin c = \frac{\sin b}{\sin B} \sin C; \quad \sin b = \frac{\sin c}{\sin C} \sin B; \quad \text{б) } \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} \sin C;$$

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin C} \sin A; \quad \text{в) } \sin a = \frac{\sin b}{\sin B} \sin A; \quad \sin b = \frac{\sin a}{\sin A} \sin B,$$

то після простих перетворень одержимо **формули чотирьох елементів (формули котангенсів)**:

$$\left. \begin{aligned} \cos a \cos C &= \operatorname{ctg} b \sin a - \operatorname{ctg} B \sin C \\ \cos a \cos B &= \operatorname{ctg} c \sin a - \operatorname{ctg} C \sin B \\ \cos b \cos C &= \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C \\ \cos b \cos A &= \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A \\ \cos c \cos A &= \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A \\ \cos c \cos B &= \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B \end{aligned} \right\}.$$

Якщо у сферичному трикутнику  $ABC$  згідно зі схемою на рисунку 4.3 узяти ряд із чотирьох розташованих поруч елементів, наприклад,  $b, C, a, B$ , то елементи  $C, a$  є середніми, а елементи  $b, B$  – крайніми. Тоді *добуток косинусів середніх елементів дорівнює добутку котангенса крайньої сторони на синус середньої без добутку котангенса крайнього кута на синус середнього кута*.

Одержані вище шість груп основних формул надають можливість розв'язати довільний сферичний трикутник за відомими трьома його елементами. Для практичних розрахунків у типових задачах звичайно використовують більш прості співвідношення, що знаходяться перетворенням основних формул. Вони будуть наведені нижче.



## 5 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Сферичний трикутник має шість основних елементів – три сторони та три кути. Розв'язати сферичний трикутник – це означає знайти його невідомі основні елементи за заданими, яких має бути три. У випадку прямокутного трикутника прямий кут є апіорі заданим.

Для розв'язування трикутників застосовуються наближені розрахунки з використанням тих чи інших обчислювальних засобів. При цьому необхідно враховувати, що знаходження невідомого елемента за синусом чи косинусом призводить до значних похибок заокруглення: за синусом – коли шуканий кут або сторона близькі до  $90^\circ$ , а за косинусом – коли шуканий кут близький до  $0^\circ$  або до  $180^\circ$ . Тоді краще для визначення шуканих величин використовувати елементи, які обчислені у процесі розв'язування. При цьому спираються на формули, що містять котангенси.

### 5.1 Формули для розв'язування прямокутних трикутників

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \\ \sin A \sin b &= \sin a \sin B; \quad \sin A \sin c = \sin a \sin C \\ \cos b \cos C &= \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C \\ \cos b \cos A &= \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A \\ \cos c \cos B &= \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B \\ \cos c \cos A &= \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A \end{aligned} \right\}.$$

У наведених десяти співвідношеннях, виокремлених із шести груп основних формул, використані позначення:  $A$  – прямий кут,  $a$  – гіпотенуза,  $b$  і  $c$  – катети (рис. 5.1).

Ураховуючи, що  $A = 90^\circ$  і  $\cos 90^\circ = 0$ ;  $\sin 90^\circ = 1$ ;  $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$ , дістанемо десять відповідних робочих формул для розв'язання прямокутних сферичних трикутників. Непер запропо-

нував зручне мнемонічне правило для складання цих формул у вигляді двох груп.

**Правило Непера.** Якщо прийняти, що катети  $b$  та  $c$  лежать поруч, тобто не рахувати прямого кута  $A$ , і замінити катети їх доповненнями до  $90^\circ$  (схема на рис. 5.2), тоді *косинус довільного елемента прямокутного трикутника дорівнює добутку котангенсів прилеглих до нього елементів або добутку синусів елементів, що лежать окремо:*

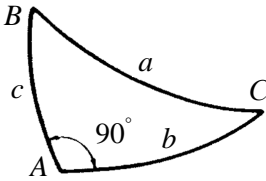


Рисунок 5.1

*Перша група формул*

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c) \\ \cos B &= \sin C \sin(90^\circ - b) \\ \cos C &= \sin B \sin(90^\circ - c) \\ \cos(90^\circ - b) &= \sin a \sin B \\ \cos(90^\circ - c) &= \sin a \sin C \end{aligned} \right\}$$

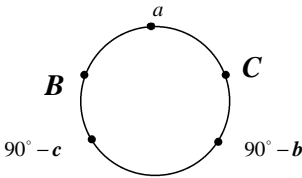


Рисунок 5.2

*Друга група формул*

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - c) \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \\ \cos(90^\circ - c) &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \\ \cos(90^\circ - b) &= \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg}(90^\circ - c) \end{aligned} \right\}$$

## 5.2 Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника

Зв'язок гіпотенузи з катетами виражає сферична теорема Піфагора:

$$\cos a = \cos b \cos c .$$

*Косинус гіпотенузи дорівнює добутку косинусів катетів.*

Нехай кожний з катетів менше  $90^\circ$ , тоді  $\cos b$  та  $\cos c$  – додатні, але тоді  $\cos a$  також додатний, тому  $a < 90^\circ$ .

Якщо кожний з катетів більше  $90^\circ$ , тоді  $\cos b$  і  $\cos c$  обидва від'ємні, а тому  $\cos a$  додатний і  $a < 90^\circ$ .

Якщо один з катетів більше  $90^\circ$ , а другий менше  $90^\circ$ , то косинус одного катета додатний, а другого – від’ємний. Тому  $\cos a$  буде від’ємний і  $a > 90^\circ$ .

Два елементи трикутника називають *однорідними*, якщо обидва вони більші або менші за  $90^\circ$ , і *різнорідними*, коли один з них більший, а другий менший за  $90^\circ$ .

Користуючись цими поняттями, залежність між величинами катетів і гіпотенузи можна сформулювати так:

*якщо катети однорідні, то гіпотенуза менша за  $90^\circ$ ; якщо ж катети різнорідні, то гіпотенуза більша за  $90^\circ$ .*

Для зв’язку гіпотенузи з прилеглими до неї кутами маємо співвідношення:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C .$$

Проаналізувавши цей вираз аналогічно проведеному аналізу формули Піфагора, встановимо таку залежність між гіпотенузою та прилеглими до неї кутами:

*якщо прилегли до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менша за  $90^\circ$ ; якщо ж ці кути різнорідні, то гіпотенуза більша за  $90^\circ$ .*

Для зв’язку одного катета та двох кутів, що прилягають до гіпотенузи, маємо співвідношення:

$$\cos B = \sin C \cos b .$$

Оскільки  $\sin C$  завжди додатний незалежно від того, гострий чи тупий кут  $C$ , то знаки  $\cos B$  і  $\cos b$  завжди співпадають:

*довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні.*

Одержані співвідношення між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника допомагають під час знаходження елементів такого трикутника за їхніми синусами вибирати, яке з двох можливих значень елемента є допустимим.

Наприклад, якщо у прямокутному  $\triangle ABC$  катет  $b > 90^\circ$  і в задачі для протилежного кута  $B$  одержано, що  $\sin B = 1/2$ , то за його значення приймається  $B = 150^\circ$ . Якщо ж у прямокутному  $\triangle ABC$  катет  $b < 90^\circ$  і в задачі для протилежного кута  $B$  одержано, що  $\sin B = 1/2$ , то за його значення приймається  $B = 30^\circ$ .

### 5.3 Основні випадки розв'язування прямокутних і просторонніх сферичних трикутників

Можливі шість різних випадків розв'язання прямокутних трикутників за даними:

1) гіпотенузою та катетом; 2) двома катетами; 3) гіпотенузою та прилеглим до неї кутом; 4) катетом та прилеглим до нього кутом; 5) двома кутами; 6) катетом та протилежним йому кутом.

Під час розв'язування необхідно стежити, щоб значення елементів відповідали *умовам існування сферичного трикутника*.

Якщо розв'язок трикутника за даними значеннями елементів існує, то у перших п'яти випадках він однозначний, а у шостому – двозначний. У шостому випадку перший з трьох шуканих елементів обчислюють за його синусом, що має додатне значення у першій та другій чвертях. Тому для першого елемента одержуємо два значення, що доповнюють один одного до  $180^\circ$ . Геометрично це означає, що дістаємо два спряжених прямокутних сферичних трикутники. Вони мають задані спільну сторону і протилежний їй кут при вершині двокутника.

Під час розв'язування просторонніх сферичних трикутників сторону, що дорівнює  $90^\circ$ , позначають через  $a$ . Трикутник, полярний відносно простороннього, є прямокутним. Це дозволяє звести розв'язання просторонніх трикутників до розв'язання прямокутних трикутників.

Розв'язування просторонніх трикутників здійснюють так:

1) за відомими елементами простороннього  $\triangle ABC$  знаходять відповідні елементи полярного прямокутного  $\triangle A_1B_1C_1$ ;

2) розв'язують прямокутний  $\triangle A_1B_1C_1$ ;

3) за знайденими елементами  $\triangle A_1B_1C_1$ , користуючись формулами зв'язку між елементами взаємополярних трикутників, знаходять елементи простороннього  $\triangle ABC$ .

Можливі шість різних випадків розв'язання просторонніх сферичних трикутників. Переходом до полярних трикутників вони зводяться до шести наведених вище випадків стосовно прямокутних трикутників.

*Приклад 1.* Дано гіпотенузу  $a = 80^\circ 00' 25''$  і катет  $b = 47^\circ 38' 36''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти: 1) катет

$c$ , кути  $B$  і  $C$ ; 2) сферичний надлишок  $\varepsilon$  і півпериметр  $p$ ;  
3) площу  $F$  сферичного трикутника у  $\text{км}^2$ , якщо  $R = 6370$  км.

□ 1) Спираючись на правило Непера, для визначення  $c$  маємо:

$$\cos a = \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c); \quad \cos a = \cos b \cos c.$$

Для визначення кута  $B$  застосовуємо:

$$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin B.$$

Для визначення кута  $C$  використовуємо:

$$\cos C = \text{ctgactg}(90^\circ - b) = \text{ctgatgb}.$$

Звідси невідомі елементи можна визначити за наступними розрахунковими формулами:

$$1) \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \quad 2) \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}; \quad 3) \cos C = \frac{\text{tgb}}{\text{tga}}.$$

Для катета  $c$  з першої формули одержимо один розв'язок. Для кута  $B$  із другої формули одержимо два значення: менше  $90^\circ$  і більше  $90^\circ$ . Із двох розв'язків виберемо таке значення  $B$ , щоб кут  $B$  та сторона  $b$  були однорідні, тобто  $B < 90^\circ$ . Для кута  $C$  за третьою формулою одержимо одне значення.

Для того, щоб трикутник був можливий, необхідно, щоб  $\cos c$ ,  $\sin B$  і  $\cos C$  в одержаних трьох розрахункових формулах були менші одиниці. Для цього необхідно та достатньо, щоб гіпотенуза розташовувалась за величиною між катетом та доповненням його до  $180^\circ$ .

Дійсно, із другої формули бачимо, що умова  $\sin B < 1$  приводить до нерівностей  $\sin b < \sin a$  і  $\sin(180^\circ - b) < \sin a$ . Обидві частини цих нерівностей – додатні, оскільки  $b$  і  $a$  менші за  $180^\circ$ . Для того, щоб ці нерівності справджувалися, необхідно, щоб виконувались нерівності: при  $a < 90^\circ$ ,  $b < a < 180^\circ - b$ , а при  $a > 90^\circ$ ,  $b > a > 180^\circ - b$ .

За тих самих умов  $\cos c$  і  $\cos C$  завжди будуть менші за одиницю.

Формулою для контролю обчислень має бути співвідношення, що пов'язує всі три знайдені елементи  $c$ ,  $B$  і  $C$ . Такою є третя формула першої групи формул за правилом Непера:

$$\cos C = \sin B \sin(90^\circ - c); \cos C = \sin B \cdot \cos c.$$

Дано:

$$a = 80^\circ 00' 25'' = 80,0069444; \quad b = 47^\circ 38' 36'' = 47,6433333.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin a = 0,9848288; \quad \sin b = 0,7389665;$$

$$\cos a = 0,1735288; \quad \cos b = 0,6737434;$$

$$\operatorname{tga} = 5,6753041; \quad \operatorname{tgb} = 1,0968045.$$

Обчислення невідомих:

$$\cos c = \frac{0,1735288}{0,6737434} = 0,2575592; \quad c = 75^\circ,0747181 = 75^\circ 04' 29'';$$

$$\sin B = \frac{0,7389665}{0,9848288} = 0,7503502; \quad B_1 = 48^\circ,620724 = 48^\circ 37' 15'';$$

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 131^\circ,3792756 = 131^\circ 22' 45''.$$

Згідно зі зазначеним вище вибираємо кут  $B_1$ .

$$\cos C = \frac{1,0968045}{5,6753041} = 0,1931253; \quad C = 78^\circ,8647684 = 78^\circ 51' 53''.$$

Контроль обчислень:

$$0,1931253 = 0,7503502 \cdot 0,2575592; \quad 0,1931253 = 0,1932596.$$

$$\text{Отже, } c = 75^\circ 04' 29''; \quad B = 48^\circ 37' 15''; \quad C = 78^\circ 51' 53''.$$

2) Знаходимо  $\varepsilon$  і  $p$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A + B + C - 180^\circ = 90^\circ + 48^\circ 37' 15'' + 78^\circ 51' 53'' - 180^\circ = \\ &= 37^\circ 29' 08'' \end{aligned}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{80^{\circ}00'25'' + 47^{\circ}38'36'' + 75^{\circ}04'29''}{2} = 101^{\circ}21'45''.$$

3) Знаходимо площу  $F$  сферичного трикутника у км<sup>2</sup>:

$$F = R^2 \cdot \varepsilon; \quad \varepsilon = 0,6542464; \quad F = 26,55 \cdot 10^6 \text{ км}^2. \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* Дано катети  $b = 150^{\circ}52'40''$  і  $c = 114^{\circ}15'54''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти:  $a$ ,  $B$ ,  $C$ .

□ За правилом Непера одержуємо формули:

$$- \text{для визначення } a: \cos a = \sin(90^{\circ} - b) \cdot \sin(90^{\circ} - c);$$

$$- \text{для визначення } B: \cos(90^{\circ} - c) = \text{ctg} B \text{ctg}(90^{\circ} - b);$$

$$- \text{для визначення } C: \cos(90^{\circ} - b) = \text{ctg} C \text{ctg}(90^{\circ} - c).$$

$$\text{Звідси: } \cos a = \cos b \cos c; \quad \text{tg} B = \frac{\text{tg} b}{\sin c}; \quad \text{tg} C = \frac{\text{tg} c}{\sin b}.$$

Шукані величини визначаються за косинусом і тангенсами. Отже, задача завжди має єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos a = \text{ctg} B \cdot \text{ctg} C.$$

$$\text{Дано: } b = 150^{\circ}52'40'' = 150^{\circ},8777778;$$

$$c = 114^{\circ}15'54'' = 114^{\circ},265.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos b = 0,8735835; \quad \cos c = -0,4109575;$$

$$\sin b = 0,4866742; \quad \sin c = 0,9116545;$$

$$\text{tg} b = 0,5571010; \quad \text{tg} c = -2,2183666.$$

Обчислення невідомих:

$$\cos a = (-0,8735835)(-0,4109575) = 0,3590057;$$

$$a = 68^{\circ},9608553 = 68^{\circ}57'39''; \quad \text{tg} B = \frac{-0,5571010}{0,9116545} = -0,6110879;$$

$$B = 148^{\circ},5801337 = 148^{\circ}34'48'';$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{-2,2183666}{0,48667212} = -4,558217;$$

$$C = 102^\circ,3737509 = 102^\circ 22' 25''.$$

Контроль обчислень:

$$0,3590057 = \frac{1}{(-0,6110879)} \cdot \frac{1}{(-4,558217)} = 0,3590057.$$

Контроль зійшовся.

Отже,  $a = 68^\circ 57' 39''$ ;  $B = 148^\circ 34' 48''$ ;  $C = 102^\circ 22' 25''$ . ■

*Приклад 3.* Дано гіпотенузу  $a = 110^\circ 46' 20''$  та прилеглий до неї кут  $C = 153^\circ 58' 28''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти:  $b$ ,  $c$ ,  $B$ .

□ На підставі правила Непера запишемо формули для визначення:

$$- b : \cos C = \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - b); \cos C = \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{tgb};$$

$$- c : \cos(90^\circ - c) = \sin a \cdot \sin C; \sin c = \sin a \cdot \sin C;$$

$$- B : \cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Для розв'язання трикутника маємо три розрахункові формули:

$$1) \operatorname{tgb} = \operatorname{tga} \cos C; 2) \sin c = \sin a \cdot \sin C; 3) \operatorname{ctg} B = \cos a \operatorname{tg} C.$$

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos(90^\circ - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^\circ - b), \sin c = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tgb}.$$

Друга розрахункова формула визначає катет  $c$  за синусом. Величину для  $c$  з двох її значень вибирають таку, щоб вона була в одній чверті з кутом  $C$ . Перша та третя розрахункові формули визначають  $b$  і  $B$  за тангенсами та дають для них по одному значенню, що знаходяться в одній чверті. Отже, трикутник завжди можливий і має єдиний розв'язок.

$$\text{Дано: } a = 110^\circ 46' 20'' = 110^\circ,7722222;$$

$$C = 153^\circ 58' 28'' = 153^\circ,9744444.$$



Проміжні обчислення:

$$\begin{aligned} \sin a &= 0,9349977 ; & \sin C &= 0,4387720 ; \\ \cos a &= -0,3546537 ; & \cos C &= -0,8985984 ; \\ \operatorname{tga} &= -2,6363681 ; & \operatorname{tg} C &= -0,4882848 . \end{aligned}$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tgb} = (-2,6363681) \cdot (-0,8985984) = 2,3690362 ;$$

$$b = 67^\circ,1147794 = 67^\circ 06' 53'' ;$$

$$\sin c = 0,9349977 \cdot 0,4387720 = 0,4102508 ;$$

$$c = 24^\circ,2205913 = 24^\circ 13' 14'' ; c_2 = 155^\circ,7794087 = 155^\circ 46' 46'' .$$

В одній чверті з кутом  $C$  буде  $c_2$ , отже, за розв'язок беремо  $c = 155^\circ 46' 46''$ .

$$\operatorname{ctg} B = (-0,3546537) \cdot (-0,4882848) = 0,1731720 ;$$

$$B = 80^\circ,1754098 = 80^\circ 10' 31'' ;$$

Контроль обчислень:

$$0,4102508 = 0,1731720 \cdot 2,3690362 = 0,4102507 .$$

Контроль зійшовся.

Отже,  $b = 67^\circ 06' 53''$ ;  $c = 155^\circ 46' 46''$ ;  $B = 80^\circ 10' 31''$ . ■

*Приклад 4.* Дано катет  $b = 37^\circ 52' 09''$  та прилеглий до нього кут  $C = 45^\circ 34' 35''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти:  $a$ ,  $c$ ,  $B$ .

□ За правилом Непера маємо такі співвідношення для визначення:

$$- a : \cos C = \operatorname{ctg} (90^\circ - b) \operatorname{ctg} a , \quad \cos C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a ;$$

$$- c : \cos (90^\circ - b) = \operatorname{ctg} (90^\circ - c) \operatorname{ctg} C , \quad \sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C ;$$

$$- B : \cos B = \sin (90^\circ - b) \sin C , \quad \cos B = \cos b \cdot \sin C .$$

Звідси одержимо для визначення невідомих елементів такі три розрахункові формули:

$$1) \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{tgb}}{\cos C}; \quad 2) \operatorname{tgc} = \sin b \cdot \operatorname{tg} C; \quad 3) \cos B = \cos b \cdot \sin C.$$

Елементи  $a$  і  $c$  визначаються за тангенсами й мають по одному значенню. Кут  $B$  визначається за косинусом і теж має одне значення. Що стосується знаку косинуса  $B$ , то  $\cos B$  має той самий знак, що і косинус  $b$ . Отже трикутник завжди можливий і задача має єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos B = \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{tgc} = \frac{\operatorname{tgc}}{\operatorname{tga}}.$$

$$\text{Дано: } b = 37^{\circ}52'09'' = 37,8691666;$$

$$C = 45^{\circ}34'35'' = 45,5763888.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin b = 0,6138605;$$

$$\sin C = 0,7141843;$$

$$\cos b = 0,7894145;$$

$$\cos C = 0,6999577;$$

$$\operatorname{tgb} = 0,7776148;$$

$$\operatorname{tg} C = 1,0203249.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tga} = \frac{0,7776148}{0,6999577} = 1,1109454; \quad a = 48^{\circ},0085387 = 48^{\circ}00'31'';$$

$$\operatorname{tgc} = 0,6138605 \cdot 1,0203249 = 0,6263372;$$

$$c = 32^{\circ},0604428 = 32^{\circ}03'38'';$$

$$\cos B = 0,7894145 \cdot 0,7141843 = 0,5637874;$$

$$B = 55^{\circ},6818686 = 55^{\circ}40'55''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5637874 = \frac{0,6263372}{1,1109454} = 0,5637875.$$

Контроль зійшовся.

Отже,  $a = 48^{\circ}00'31''$ ,  $C = 32^{\circ}03'38''$ ,  $B = 55^{\circ}40'55''$ . ■

Приклад 5. Дано кути:  $B = 80^{\circ}10'32''$ ;  $C = 154^{\circ}58'28''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти:  $b$ ,  $c$ ,  $a$ .

□ За правилом Непера маємо співвідношення:

$$- \text{ для визначення } b: \cos B = \sin(90^{\circ} - b) \sin C;$$

$$- \text{ для визначення } c: \cos C = \sin(90^{\circ} - c) \sin B;$$

$$- \text{ для визначення } a: \cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Звідси дістаємо для розв'язання трикутника такі розрахункові формули:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C; \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Для контролю обчислень візьмемо сферичну формулу Піфагора:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Розв'язок матиме одне значення, оскільки всі елементи трикутника визначаються за косинусами.

Трикутник можливий тільки тоді, коли сума даних кутів знаходиться між  $90^{\circ}$  і  $270^{\circ}$ , а їх різниця між  $-90^{\circ}$  і  $90^{\circ}$ .

Насправді: уявимо для даного сферичного прямокутного трикутника полярний, у нього будуть сторони:  $90^{\circ}$ ,  $180^{\circ} - B$  і  $180^{\circ} - C$ . Зважаючи на те, що сума сторін сферичного трикутника повинна бути менша за  $360^{\circ}$ , а кожна з них менша за суму двох інших, маємо такі чотири нерівності:

$$1) 450^{\circ} - (B + C) < 360^{\circ}; \quad 90^{\circ} < B + C;$$

$$2) 90^{\circ} < 360^{\circ} - (B + C); \quad 270^{\circ} > B + C;$$

$$3) 180^{\circ} - B < 270^{\circ} - C; \quad -90^{\circ} < B - C;$$

$$4) 180^{\circ} - C < 270^{\circ} - B; \quad 90^{\circ} > B - C.$$

Об'єднавши першу нерівність з другою, а третю з четвертою, одержимо:

$$90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; \quad -90^{\circ} < B - C < 90^{\circ}.$$

Дано:  $B = 80^{\circ}10'32'' = 80^{\circ},1755556$ ;

$C = 154^{\circ}58'28'' = 154^{\circ},9744444$ .

Проміжні обчислення:

$$\sin B = 0,9853352;$$

$$\sin C = 0,4230225;$$

$$\cos B = 0,1706299;$$

$$\cos C = -0,9061192;$$

$$\operatorname{tg} B = 5,7746926;$$

$$\operatorname{tg} C = -0,4668508.$$

Обчислення невідомих:

$$\cos a = \frac{-1}{5,7746926 \cdot 0,4668508} = -0,3709309;$$

$$a = 111^{\circ},7730402 = 111^{\circ}46'23'';$$

$$\cos b = \frac{0,1706299}{0,4230225} = 0,40335894;$$

$$b = 66^{\circ},2116955 = 66^{\circ}12'42'';$$

$$\cos c = -\frac{0,9061192}{0,9853352} = -0,9196050;$$

$$c = 156^{\circ},8684086 = 156^{\circ}52'06''.$$

Контроль обчислень:

$$-0,3709309 = 0,40335894 \cdot (-0,9196050) = -0,3709490.$$

Контроль хороший.

Отже,  $a = 111^{\circ}46'23''$ ;  $b = 66^{\circ}12'42''$ ;  $c = 156^{\circ}52'06''$ . ■

*Приклад 6.* Дано катет  $b = 38^{\circ}27'50''$  і протилежний йому кут  $B = 56^{\circ}00'34''$  прямокутного сферичного  $\triangle ABC$ . Знайти:  $a$ ,  $c$ ,  $C$ .

□ За правилом Непера одержуємо співвідношення для визначення:

$$- a: \cos(90^{\circ} - b) = \sin B \sin a; \sin b = \sin B \sin a;$$

$$- c: \cos(90^{\circ} - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^{\circ} - b); \sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b;$$

$$- C: \cos B = \sin(90^\circ - b) \sin C; \cos B = \cos b \sin C.$$

Звідси невідомі елементи визначають за такими розрахунковими формулами:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}; \quad \sin C = \frac{\cos b}{\cos B}.$$

Для контролю обчислень візьмемо формулу

$$\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin C; \quad \sin c = \sin a \sin C.$$

Для існування трикутника необхідно, щоб  $\sin a$ ,  $\sin c$  і  $\sin C$  були додатні та менші одиниці. Тобто щоб  $b$  та  $B$  були однорідними – обидва або більші за  $90^\circ$ , або менші за  $90^\circ$ . Для виконання нерівності  $\sin a < 1$ , потрібно, щоб  $\sin b$  був менше за  $\sin B$ . Відповідно до того, що  $b$  та  $B$  повинні перебувати в одній чверті, то при  $b < 90^\circ$  повинно виконуватися  $b < B < 90^\circ$ , а при  $b > 90^\circ$  – відповідно  $90^\circ < B < b$ .

Якщо задача можлива, то дістанемо два розв'язки, тобто два сферичних трикутники. Сторони  $a_1$ ,  $c_1$  і кут  $C_1$  першого трикутника будуть доповненнями відповідних сторін  $a_2$ ,  $c_2$  і кута  $C_2$  другого трикутника до  $180^\circ$ . Ці трикутники матимуть спільний катет  $b$ , а протилежні цьому катету кути будуть рівні  $B$ .

$$\text{Дано: } b = 38^\circ 27' 50'' = 38,4638889;$$

$$B = 56^\circ 00' 34'' = 56,0094444.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin b = 0,6220213; \quad \sin B = 0,8291297;$$

$$\cos b = 0,7830003; \quad \cos B = 0,5590562;$$

$$\operatorname{tg} b = 0,7944074; \quad \operatorname{tg} B = 1,4830882.$$

Обчислення невідомих:

$$\sin a = \frac{0,6220213}{0,8291297} = 0,7502099;$$

$$a_1 = 48^\circ,6085624 = 48^\circ 36' 31'';$$

$$a_2 = 131^\circ,3914376 = 131^\circ 23' 29'';$$

$$\sin c = \frac{0,7944074}{1,4830882} = 0,5356441;$$

$$c_1 = 32^\circ,3876012 = 32^\circ 23' 15'';$$

$$c_2 = 147^\circ,6123988 = 147^\circ 36' 45'';$$

$$\sin C = \frac{0,5590562}{0,7830003} = 0,7139923;$$

$$C_1 = 45^\circ,5606768 = 45^\circ 33' 38'';$$

$$C_2 = 134^\circ,4393232 = 134^\circ 26' 22''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5356441 = 0,7502099 \cdot 0,789923 = 0,5356441.$$

Контроль зійшовся.

Перший розв'язок:

$$a_1 = 48^\circ 36' 31'';$$

$$c_1 = 32^\circ 23' 15'';$$

$$C_1 = 45^\circ 33' 38'';$$

Другий розв'язок:

$$a_2 = 131^\circ 23' 29'';$$

$$c_2 = 147^\circ 36' 45'';$$

$$C_2 = 134^\circ 26' 22''. \quad \blacksquare$$

#### 5.4 Формули синусів, косинусів і тангенсів половини кутів сферичного трикутника

Розглянемо довільний косокутний сферичний  $\triangle ABC$ . Приймаючи до уваги, що внутрішні кути лежать у межах від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , скористаємося тригонометричними формулами зниження степеня:

$$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2, \quad \cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha)/2,$$

а також співвідношенням для кута  $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ , що

впливає з формули косинуса сторони

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

і поняттям півпериметра  $p = (a + b + c)/2$ . За допомогою тотожних перетворень одержимо такі групи формул:

1. Формули синусів половини кутів.

$$\begin{aligned} \sin^2(A/2) &= (1/2) \left( 1 - (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c) \right) = \\ &= \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c} = \frac{(\cos b \cos c + \sin b \sin c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = 2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} / (2 \sin b \sin c) = \\ &= \sin \frac{a+b+c-2c}{2} \sin \frac{a+b+c-2b}{2} / (\sin b \sin c) = \\ &= \frac{\sin(p-c) \sin(p-b)}{\sin b \sin c}; \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}. \end{aligned}$$

Виконавши аналогічні перетворення для  $\sin(B/2)$  і  $\sin(C/2)$ , остаточно дістанемо **формули синусів половини кутів**:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\sin(p-b) \sin(p-c) / (\sin b \sin c)} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\sin(p-a) \sin(p-c) / (\sin a \sin c)} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\sin(p-a) \sin(p-b) / (\sin a \sin b)} \end{aligned} \right\}.$$

2. Формули косинусів половини кутів.

$$\begin{aligned} \cos^2(A/2) &= (1/2) \left( 1 + (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c) \right) = \\ &= \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{2 \sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c} = 2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} / (2 \sin b \sin c) = \end{aligned}$$

$$= \sin p \sin \frac{a+b+c-2a}{2} / (\sin b \sin c) = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c};$$

$$\cos(A/2) = \sqrt{\sin p \sin(p-a) / (\sin b \sin c)}.$$

Виконавши аналогічні перетворення для  $\cos(B/2)$  і  $\cos(C/2)$ , у підсумку отримаємо **формули косинусів половини кутів**:

$$\left. \begin{aligned} \cos(A/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-a) / (\sin b \sin c)} \\ \cos(B/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-b) / (\sin a \sin c)} \\ \cos(C/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-c) / (\sin a \sin b)} \end{aligned} \right\}.$$

*Зауваження 1.* Формули синусів половини кутів рекомендують застосовувати, коли шуканий кут значно відрізняється від  $180^\circ$ . Якщо його величина близька до  $180^\circ$ , то краще користуватися формулами косинусів половини кутів.

### 3. Формули тангенсів половини кутів.

Розділивши ліві та праві частини формул синусів половини кутів на відповідні ліві та праві частини формул косинусів половини кутів, одержимо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}} \end{aligned} \right\}$$

– **формули тангенсів половини кутів.**

Введемо допоміжну величину

$$M = \sqrt{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c) / \sin p}$$

і дістанемо формули тангенсів половини кутів у вигляді:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned} \right\}.$$

Тангенс половини кута сферичного трикутника дорівнює допоміжній величині  $M$ , поділеній на синус різниці півпериметра та протилежної куту сторони.

Перемножимо окремо ліві та праві частини останніх формул, використаємо вираз для величини  $M$  і отримаємо:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}.$$

Зуваження 2. Величина  $M$  дорівнює тангенсу сферичного радіуса  $r_m$  малого кола, вписаного у даний трикутник:  $M = \operatorname{tg} r_m$ .

### 5.5 Формули синусів, косинусів і тангенсів половини сторін сферичного трикутника

Щоб одержати зазначені формули, необхідно формули синусів і косинусів половини кутів записати для кутів трикутника  $A_1B_1C_1$ , полярного до даного  $\Delta ABC$ .

Нехай  $p_1 = (a_1 + b_1 + c_1)/2$  – півпериметр полярного трикутника  $A_1B_1C_1$ .

Для елементів взаємополярних трикутників виконуються відомі співвідношення:

$$a_1 = 180^\circ - A; \quad b_1 = 180^\circ - B; \quad c_1 = 180^\circ - C; \quad A_1 = 180^\circ - a.$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (540^\circ - A - B - C)/2 = 180^\circ - \varepsilon/2; \quad p_1 - a_1 = A - \varepsilon/2; \\ p_1 - b_1 &= B - \varepsilon/2; \quad p_1 - c_1 = C - \varepsilon/2; \quad A_1/2 = 90^\circ - a/2, \end{aligned} \right\}$$

де  $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$  – сферичний надлишок трикутника  $ABC$ .

Скористаємося формулами синусів і косинусів половини кутів, записаними для трикутника  $A_1B_1C_1$  та підставимо у них значення величин із наведених вище співвідношень для елементів і півпериметра взаємополярних трикутників, Одержимо:

1. Формули синусів половини сторін.

Запишемо першу з формул косинусів половини кутів для полярного  $\Delta A_1B_1C_1$ :

$$\cos(A_1/2) = \sqrt{\sin p_1 \sin(p_1 - a_1) / (\sin b_1 \sin c_1)}$$

і підставимо в неї замість елементів полярного трикутника  $A_1B_1C_1$  відповідні вирази через елементи трикутника  $ABC$ . Отримаємо:

$$\cos \frac{180^\circ - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(180^\circ - \varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C)}}.$$

За тригонометричними формулами зведення дістанемо:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}}.$$

Виконавши аналогічні тотожні перетворення з другою та третьою формулою косинусів половини кутів, остаточно одержимо

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(B - \varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} \\ \sin \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(C - \varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} \end{aligned} \right\}$$

– **формули синусів половини сторін.**

2. Формули косинусів половини сторін.

Запишемо першу з формул синусів половини кутів для полярного  $\Delta A_1B_1C_1$ :

$$\sin(A_1/2) = \sqrt{\sin(p_1 - b_1)\sin(p_1 - c_1)/(\sin b_1 \sin c_1)}.$$

Підставимо в це співвідношення замість елементів полярного  $\Delta A_1 B_1 C_1$  відповідні вирази через елементи трикутника  $ABC$ . Дістанемо:

$$\sin \frac{180^\circ - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)}}.$$

Застосуємо до цього виразу формули зведення й отримаємо:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}}.$$

Співвідношення для  $\cos(b/2)$  і  $\cos(c/2)$  дістаємо аналогічно. У підсумку маємо **формули косинусів половини сторін**:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} \\ \cos \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} \end{aligned} \right\}.$$

### 3. Формули тангенсів половини сторін.

Діленням окремо лівих і правих частин формул синусів і косинусів половини сторін одержимо **формули тангенсів половини сторін**:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}} \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}} \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}} \end{aligned} \right\}.$$

Введемо допоміжну величину

$$N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2) \sin(B - \varepsilon/2) \sin(C - \varepsilon/2)}}$$

і запишемо формули тангенсів половини сторін у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= N \sin(A - \varepsilon/2) \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= N \sin(B - \varepsilon/2) \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= N \sin(C - \varepsilon/2) \end{aligned} \right\}.$$

*Тангенс половини сторони сферичного трикутника дорівнює добутку допоміжної величини  $N$  на синус різниці протилежного кута та половини сферичного надлишку.*

Перемножимо окремо ліві та праві частини останніх співвідношень, скористаємося виразом для величини  $N$  і дістанемо:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Зауваження.* Величина  $N$  дорівнює тангенсу сферичного радіуса  $R_m$  малого кола, описаного навколо даного трикутника:

$$N = \operatorname{tg} R_m.$$

*Приклад.* У прямокутному сферичному  $\triangle ABC$  відомі всі його елементи: гіпотенуза  $a = 80^\circ 00' 25''$ , катети  $b = 47^\circ 38' 36''$ ,  $c = 75^\circ 04' 29''$  і кути  $B = 48^\circ 37' 15''$ ,  $C = 78^\circ 51' 53''$ . Знайти сферичні радіуси  $r_m$  і  $R_m$  вписаного й описаного малих кіл.

□ Спочатку обчислюємо ексцес  $\varepsilon$  і півпериметр  $p$ , а потім знаходимо  $r_m$  і  $R_m$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A + B + C - 180^\circ = 37^\circ 29' 08''; \\ p &= \frac{a + b + c}{2} = \frac{80^\circ 00' 25'' + 47^\circ 38' 36'' + 75^\circ 04' 29''}{2} = 101^\circ 21' 45''; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tgr}_m = M ; M = \sqrt{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)/\sin p} ;$$

$$p-a = 101^\circ,3625 - 80^\circ,0069444 = 21,3555556 ;$$

$$\sin(p-a) = 0,36415445 ;$$

$$p-b = 53^\circ,719167 ; \quad \sin(p-b) = 0,8061263 ;$$

$$p-c = 26^\circ,2877819 ; \quad \sin(p-c) = 0,4428800 ;$$

$$\sin p = 0,9804003 ; \quad M = 0,3641545 ;$$

$$r_m = 20^\circ,0093217 = 20^\circ 00' 33'' ;$$

$$\operatorname{tg}R_m = N ; N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}} ;$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 18^\circ,7427778 ; \quad \sin \frac{\varepsilon}{2} = 0,3213201 ;$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} = 71^\circ,2572222 ; \quad \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,9469706 ;$$

$$B - \frac{\varepsilon}{2} = 29^\circ,8779462 ; \quad \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,4981540 ;$$

$$C - \frac{\varepsilon}{2} = 60^\circ,1219906 ; \quad \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,8670880 ;$$

$$N = 0,8863134 ; \quad R_m = 41^\circ 55' 1000 = 41^\circ 33' 04'' . \quad \blacksquare$$

## 5.6 Формули Деламбра – Гаусса й аналогії Непера

Якщо у тригонометричні тотожності:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A \pm B}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \pm \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ \cos \frac{A \pm B}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \end{aligned} \right\}$$

підставити відповідні значення з формул синусів і косинусів половини кутів і половини сторін, зробити необхідні тотожні перетворення, то дістанемо чотири **формули Деламбра – Гаусса**:

$$\left. \begin{aligned} 1) \sin \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2} \\ 2) \sin \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \sin \frac{c}{2} \\ 3) \cos \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2} \\ 4) \cos \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} / \sin \frac{c}{2} \end{aligned} \right\},$$

які виражають залежність між шістьма елементами сферичного трикутника.

Для прикладу виведемо першу з наведених формул. Для цього підставимо у тотожність для  $\sin \frac{A+B}{2}$  вирази для синусів і косинусів половини кутів, а потім виконаємо тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}} + \\ &+ \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} \cdot \left( \frac{\sin(p-b)}{\sin c} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \right) = \cos \frac{C}{2} \times \\ &\times \frac{2 \sin(p-a/2-b/2) \cos((a-b)/2)}{2 \sin(c/2) \cos(c/2)} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Аналогічно виводяться інші формули Деламбра – Гаусса.

У цих формулах поділимо перше співвідношення по частинно на третє, а друге – на четверте. У результаті одержимо **першу та другу аналогії Непера** для кутів сферичного трикутника:

$$\left. \begin{aligned} 1) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \cos \frac{a+b}{2} \\ 2) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \sin \frac{a+b}{2} \end{aligned} \right\}.$$

*Тангенс півсуми двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як косинус піврізниці протилежних їм сторін до косинуса півсуми тих самих сторін.*

*Тангенс піврізниці двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як синус піврізниці протилежних їм сторін до синуса півсуми тих самих сторін.*

Поділивши четверту формулу Делаμβра – Гаусса на третю, а другу на першу, дістанемо **третю та четверту аналогії Непера** для сторін сферичного трикутника:

$$\left. \begin{aligned} 3) \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \cos \frac{A+B}{2} \\ 4) \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \sin \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \sin \frac{A+B}{2} \end{aligned} \right\}.$$

*Тангенс півсуми двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як косинус піврізниці протилежних їм кутів до косинуса півсуми цих самих кутів.*

*Тангенс піврізниці двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як синус піврізниці протилежних їм кутів до синуса півсуми цих самих кутів.*

*Зауваження.* Загальне число аналогій Непера дорівнює дванадцяти. Інші вісім аналогій можна одержати, застосовуючи метод кругової перестановки елементів сферичного трикутника.

Поділивши почастинно першу і другу, або третю та четверту аналогії Непера, отримаємо **контрольну формулу Гаусса**:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2},$$

що використовується для перевірки обчислень за формулами Делаμβра – Гаусса і аналогіями Непера під час розв’язування сферичних трикутників.

### 5.7 Формули для обчислення сферичного надлишку

Перемножимо почленно перші дві формули синусів половини сторін і скористаємося третьою формулою косинусів половини сторін. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A-\varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} = \\ &= \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C} \cdot \sqrt{\frac{\sin(A-\varepsilon/2) \sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} = \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C} \cdot \cos \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Знайдемо звідси } \sin(\varepsilon/2): \sin \frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C / \cos \frac{c}{2}.$$

Аналогічні вирази для  $\sin(\varepsilon/2)$  можна отримати, перетворивши у подібний спосіб ще два добутки  $\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$  і  $\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2}$ .

У результаті маємо *першу формулу Каньолі*, що задається одним із виразів:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C / \cos \frac{c}{2} \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A / \cos \frac{a}{2} \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} \sin B / \cos \frac{b}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Ці співвідношення виражають сферичний надлишок як функцію трьох сторін і одного кута сферичного трикутника. Їх також можна одержати один з одного методом перестановки елементів по колу.

*Синус половини сферичного надлишку трикутника дорівнює добутку синусів половини двох сторін на синус кута між ними, поділеному на косинус половини третьої сторони.*

*Друга формула Каньолі:*

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos(a/2) \cos(b/2) \cos(c/2)}$$



подає сферичний надлишок як функцію трьох сторін трикутника. Її одержують заміною у першій формулі Каньолі  $\sin C$  виразом

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin a \sin b},$$

що впливає з формул синусів і косинусів половини кутів.

Сферичний надлишок можна обчислити ще за **формулою Люїльє**:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}},$$

що також подає ексцес як функцію трьох сторін сферичного трикутника. Вона є аналогом формули Герона у планіметрії. Її одержують на основі першої та третьої формул Делаμβра – Гаусса з використанням співвідношень:

$$\begin{aligned} A + B = 180^\circ + \varepsilon - C; \quad a + b + c = 2p; \quad a + b - c = 2(p - c); \\ a - b + c = 2(p - b); \quad b + c - a = 2(p - a). \end{aligned}$$

*Зауваження.* Наведені формули Каньолі та Люїльє не рекомендується безпосередньо застосовувати для знаходження сферичного надлишку трикутників зі сторонами малої кутової величини, оскільки при цьому спостерігається значний вплив похибок обчислень.

## 5.8 Основні випадки розв'язування косокутних сферичних трикутників

Сферичний трикутник повністю визначений, якщо з шести його елементів задані три. Можливі шість геометрично різних випадків розв'язання косокутних трикутників за даними: 1) трьома сторонами; 2) трьома кутами; 3) двома сторонами та кутом між ними; 4) стороною та двома прилеглими до неї кутами; 5) двома сторонами та кутом, що лежить проти однієї з них; 6) двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них.

Під час розв'язування необхідно стежити, щоб значення елементів задовольняли **умови існування сферичного трикутника**.

Під час визначення усіх трьох невідомих елементів розв'я-

зання трикутника у першому та другому випадках виконують за формулами тангенсів половини кутів і половини сторін, у третьому та четвертому випадках – за аналогіями Непера. У п'ятому та шостому випадках розв'язання трикутника виконують за теоремою синусів та аналогіями Непера.

Якщо розв'язок сферичного трикутника за даними значеннями елементів існує, то в перших чотирьох випадках він однозначний, а в п'ятому та шостому – двозначний. Пояснення цього аналогічне до відповідних випадків розв'язання прямокутних трикутників.

*Зауваження.* Перебіг розв'язування завжди необхідно контролювати, виконуючи додаткові обчислення за формулами, що не використовувались у разі знаходження невідомих величин, або визначаючи значення тієї самої невідомої величини за різними співвідношеннями.

*Приклад 1.* Розв'язання сферичного трикутника за трьома сторонами. Дано:  $a = 60^{\circ}31'42''$ ;  $b = 117^{\circ}28'19''$ ;  $c = 78^{\circ}42'23''$ . Знайти: 1)  $A, B, C$ ; 2)  $\varepsilon, r_m, R_m$ ; 3)  $F$ , якщо  $R = 6370$  км.

□ 1) Обчислення виконаємо за формулами тангенсів половини кутів:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{M}{\sin(p-a)}; \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{M}{\sin(p-b)}; \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin(p-c)},$$

$$\text{де } M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

Для контролю обчислення скористаємося співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}.$$

Для можливості задачі необхідно, щоб синуси, що входять під радикал, були додатні. Для цього необхідно, щоб виконувались нерівності:  $p < 180^{\circ}$ ;  $p - a > 0^{\circ}$ ;  $p - b > 0^{\circ}$ ;  $p - c > 0^{\circ}$ , або  $a + b + c < 360^{\circ}$ ,  $c + b > a$ ;  $a + c > b$ ,  $a + b > c$ . Всі нерівності є загальними для існування кожного сферичного трикутника.

Задача допускає єдиний повністю визначений розв'язок, оскільки невідомі елементи знаходяться за тангенсами аргументів  $A/2$ ,

$B/2$  і  $C/2$ , які менші за  $90^\circ$ .

$$\text{Дано: } a = 60^\circ 31' 42'' = 60,5283333;$$

$$b = 117^\circ 28' 19'' = 117,4719444; c = 78^\circ 42' 23'' = 78,7063889.$$

Розглянувши дані величини, приходимо до висновку, що вони відповідають умовам існування сферичного трикутника, а тому розв'язок задачі можливий.

Проміжні обчислення:

$$2p = 256,7066667; p = 128,3533333; \sin p = 0,7841991;$$

$$p - a = 67,825; \sin(p - a) = 0,9260354; p - b = 10,8813889;$$

$$\sin(p - b) = 0,1887765; p - c = 49,6469444;$$

$$\sin(p - c) = 0,7620691;$$

$$M = \sqrt{\frac{0,9260354 \cdot 0,1887765 \cdot 0,7620691}{0,7841991}} = 0,4121656.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{0,4121656}{0,9260354} = 0,4450862; \quad \frac{A}{2} = 23,9931876;$$

$$A = 47,9863752 = 47^\circ 59' 11'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{0,4121656}{0,1887765} = 2,1833523; \quad \frac{B}{2} = 65,3916854;$$

$$B = 130,7833707 = 130^\circ 47' 00'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{0,4121656}{0,7620691} = 0,5408507; \quad \frac{C}{2} = 28,4067698;$$

$$C = 56,8135397 = 56^\circ 48' 49''.$$

Контроль обчислень:

$$0,4450862 \cdot 2,1833523 \cdot 0,5408507 = \frac{0,4121656}{0,7841991};$$

$$0,5255879 = 0,5255879. \text{ Контроль зійшовся.}$$

Отже,  $A = 47^{\circ}59'11''$ ;  $B = 130^{\circ}47'00$ ;  $C = 56^{\circ}48'49''$ .

2) Ексцес знайдемо за формулою Люільє:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}};$$

$$\frac{p}{2} = 64^{\circ},1766666; \operatorname{tg} \frac{p}{2} = 2,0664513; \frac{p-a}{2} = 33^{\circ},9125000;$$

$$\operatorname{tg} \frac{p-a}{2} = 0,6722888; \frac{p-b}{2} = 5^{\circ},4406946; \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} = 0,0952444;$$

$$\frac{p-c}{2} = 24^{\circ},8234722; \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} = 0,4625621;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{2,0664513 \cdot 0,6722888 \cdot 0,0952444 \cdot 0,4625621} =$$

$$= 0,2473975$$

$$\frac{\varepsilon}{4} = 13^{\circ},8958157; \varepsilon = 55^{\circ},5832629 = 55^{\circ}34'59''.$$

Радіус вписаного кола  $r_m$  знайдемо за формулою:

$$\operatorname{tgr}_m = M = 0,4121656; r_m = 22^{\circ},3997719 = 22^{\circ}23'59''.$$

Радіус описаного кола  $R_m$  знайдемо за формулою:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}, \text{ звідки } \operatorname{tg} R_m = N = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 0,5835142; \operatorname{tg} \frac{b}{2} = 1,6470396; \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0,8200421;$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = 0,4662574;$$

$$\operatorname{tg} R_m = N = \frac{0,5835142 \cdot 1,6470396 \cdot 0,8200421}{0,4662574} = 1,6903081;$$

$$R_m = 59^\circ,3910968 = 59^\circ 23' 28''.$$

Отже,  $\varepsilon = 55^\circ 34' 59''$ ;  $r_m = 22^\circ 23' 59''$ ;  $R_m = 59^\circ 23' 28''$ .

3) Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19):  $F = R^2 \varepsilon$ . За умовою  $R = 6370$  км і знайдено вище, що

$$\varepsilon = 55^\circ 34' 59'' = 55,5832629. \text{ У радіанах } \varepsilon = 0,9700.$$

$$\text{Тоді } F = (6370)^2 \cdot 0,97 = 3,94 \cdot 10^7 \text{ (км)}^2. \quad \blacksquare$$

*Приклад 2.* Розв'язання сферичного трикутника за трьома його кутами. Дано:  $A = 47^\circ 59' 12''$ ;  $B = 130^\circ 46' 58''$ ;  $C = 56^\circ 48' 52''$ . Знайти:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

□ Обчислення виконаємо за формулами тангенсів половини сторін:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= N \sin \left( A - \frac{\varepsilon}{2} \right); \operatorname{tg} \frac{b}{2} = N \sin \left( B - \frac{\varepsilon}{2} \right); \\ \operatorname{tg} (c/2) &= N \sin (C - \varepsilon/2), \end{aligned}$$

$$\text{де } N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2) \sin(B - \varepsilon/2) \sin(C - \varepsilon/2)}}.$$

Контроль обчислень проведемо за формулою:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Під час розв'язання задачі одержимо єдиний повністю визначений розв'язок.

Трикутник можливий, оскільки дані відповідають умовам (1.12) і (1.13) з пункту 1.3.

$$\text{Дано: } A = 47^\circ 59' 12'' = 47,9866667;$$

$$B = 130^\circ 46' 58'' = 130,7827778; \quad C = 56^\circ 48' 52'' = 56,8144444.$$

Проміжні обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 55,5838889 = 55^\circ 35' 02'';$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 27^{\circ},7919445 = 27^{\circ}47'31''; \sin \frac{\varepsilon}{2} = 0,4662623;$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} = 20^{\circ},1947222; \sin \left( A - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,3452117;$$

$$B - \frac{\varepsilon}{2} = 102^{\circ},9908333; \sin \left( B - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,9744060;$$

$$C - \frac{\varepsilon}{2} = 29^{\circ},0224999; \sin \left( C - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,4851530;$$

$$N = \sqrt{\frac{0,4662623}{0,3452117 \cdot 0,9744060 \cdot 0,4851530}} = 1,6902972.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 1,6902972 \cdot 0,3452117 = 0,5835104; \quad \frac{a}{2} = 30^{\circ},2640048;$$

$$a = 60^{\circ},5280095 = 60^{\circ}31'41'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = 1,6902972 \cdot 0,9744060 = 1,6470336; \quad \frac{b}{2} = 58^{\circ},7359120;$$

$$b = 117^{\circ},471824 = 117^{\circ}28'18'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = 1,6902972 \cdot 0,4851530 = 0,8200528; \quad \frac{c}{2} = 39^{\circ},3535600;$$

$$c = 78^{\circ}707112 = 78^{\circ}42'26''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5835104 \cdot 1,6470336 \cdot 0,8200528 = 1,6902972 \cdot 0,4662623;$$

$$0,78812096 = 0,78812186; \text{ Контроль хороший.}$$

Отже,  $a = 60^{\circ}31'41''$ ;  $b = 117^{\circ}28'18''$ ;  $c = 78^{\circ}42'26''$ . ■

*Приклад 3.* Розв'язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом між ними. Дано:  $a = 40^{\circ}28'36''$ ;  $b = 110^{\circ}18'32''$ ;  $C = 56^{\circ}40'54''$ . Знайти:  $A$ ,  $B$ ,  $c$ .

□ Для обчислення кутів  $A$  і  $B$  застосуємо першу та другу

аналогії Непера:

$$\left. \begin{aligned} 1) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \cos \frac{a+b}{2} \\ 2) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \sin \frac{a+b}{2} \end{aligned} \right\},$$

а для обчислення сторони  $c$  скористаємося формулою косинуса сторони:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Контроль за обчисленням виконаємо за формулою косинуса кута:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Аналіз вихідних даних задачі свідчить про те, що вони відповідають умовам існування сферичного трикутника. Використані для обчислення невідомих формули дають єдиний повністю визначений розв'язок.

$$\text{Дано: } a = 40^\circ 28' 36'' = 40,4766667;$$

$$b = 110^\circ 18' 32'' = 110,3088889; \quad C = 56^\circ 40' 54'' = 56,6816667.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos a = 0,7606704; \quad \sin a = 0,6491383;$$

$$\cos b = -0,3470812; \quad \sin b = 0,9378351;$$

$$\frac{a-b}{2} = -34,9161112; \quad \cos \frac{a-b}{2} = 0,8199910;$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = -0,5723765; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = -0,6980278;$$

$$\frac{a+b}{2} = 75,3927778; \quad \cos \frac{a+b}{2} = 0,2521913;$$

$$\sin \frac{a+b}{2} = 0,9676774; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 3,8370762;$$

$$\cos C = 0,5492902; \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1,8540349.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{0,8199910}{0,2521913} \cdot 1,8540349 = 6,0283282 ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{-0,5723765}{0,9676776} \cdot 1,8540349 = -1,0966524 ;$$

$$\frac{A+B}{2} = 80^{\circ},5813444 ; \quad \frac{A-B}{2} = -47^{\circ},6393785 ;$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 80^{\circ},5813444 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -47^{\circ},6393785 \end{array} \right. \quad - \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 80^{\circ},5813444 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -47^{\circ},6393785 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A = 32^{\circ},9419659 &= & B = 128^{\circ},2207229 &= \\ &= 32^{\circ}56'32'' & &= 128^{\circ}13'15'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos c &= 0,7606704(-0,3470812) + 0,6491383 \cdot 0,9378351 \times \\ &\times 0,5492902 = 0,0703808 \end{aligned}$$

$$c = 85^{\circ},9641415 = 85^{\circ}57'51'' .$$

Контроль обчислень:

$$0,5492902 = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B \cos c ;$$

$$\cos A = 0,8392218 ; \quad \sin A = 0,5437889 ;$$

$$\cos B = -0,6200628 ; \quad \sin B = 0,7845521 ;$$

$$\begin{aligned} 0,5492902 &= -0,8392218(-0,6186941) + 0,5437899 \times \\ &\times 0,7845521 \cdot 0,0703808 \end{aligned}$$

$$0,549202 = 0,549248 . \text{ Контроль хороший.}$$

Отже,  $A = 32^{\circ}56'31''$ ;  $B = 128^{\circ}13'15''$ ;  $c = 85^{\circ}57'51''$ . ■

*Приклад 4.* Розв'язання сферичного трикутника за стороною та двома прилеглими кутами. Дано:  $A = 59^{\circ}32'16''$ ;  $B = 77^{\circ}18'20''$  і  $c = 31^{\circ}29'34''$ . Знайти:  $a$ ,  $b$ ,  $C$ .

□ Задача розв'язується безпосередньо за третьою та четвер-



тою аналогіями Непера:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}.$$

Дано:  $A = 59^{\circ}32'16'' = 59^{\circ},537778$ ;

$B = 77^{\circ}18'20'' = 77^{\circ},3055556$ ;  $c = 31^{\circ}29'34'' = 31^{\circ},4927778$ .

Проміжні обчислення:

$$\frac{A-B}{2} = -8,8838889; \quad \cos \frac{A-B}{2} = 0,9880033;$$

$$\sin \frac{A-B}{2} = -0,1544325; \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = -0,1563077;$$

$$\frac{A+B}{2} = 68^{\circ},4216668; \quad \cos \frac{A+B}{2} = 0,3677729;$$

$$\sin \frac{A+B}{2} = 0,9299156; \quad \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 2,5285049;$$

$$\frac{c}{2} = 15^{\circ},7463889; \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0,2819611.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0,2819611 \cdot \frac{0,9880033}{0,3677729} = 0,7574743;$$

$$\frac{a+b}{2} = 37^{\circ},1429939;$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = 0,2819611 \cdot \frac{(-0,1544325)}{0,9299156} = -0,0468257;$$

$$\frac{a-b}{2} = -2^{\circ},6809572;$$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a = 34^{\circ},4534222 = 34^{\circ}27'12'';$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b = 39^{\circ},8239511 = 39^{\circ}49'26''.$$

Контроль обчислень при визначенні сторін  $a$  і  $b$  виконаємо за формулою Гаусса:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}; \\ \frac{0,7574743}{-0,0468257} &= \frac{2,5285049}{-0,1563077}; \end{aligned}$$

$-16,1764651 = -16,1764575$ . Контроль хороший.

Для визначення кута  $C$  візьмемо першу та другу аналогії Непера:

$$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}.$$

Проміжні обчислення:

$$\begin{aligned} \cos \frac{a+b}{2} &= 0,7971311; \quad \cos \frac{a-b}{2} = 0,9989055; \\ \sin \frac{a+b}{2} &= 0,6038063; \quad \sin \frac{a-b}{2} = -0,0467746. \end{aligned}$$

Обчислення невідомого:

$$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2,5285049 \cdot 0,7971311}{0,9989055} = 2,0177583;$$

$$\frac{C}{2} = 26^{\circ},3629922; \quad C = 52^{\circ},7259844 = 52^{\circ}43'34'';$$

$$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{-0,1563077 \cdot 0,6038063}{-0,0467746} = 2,0177567;$$

$$\frac{C}{2} = 26^{\circ},3630558; \quad C = 52^{\circ},7261116 = 52^{\circ}43'34''.$$

Контролем точності для знаходження кута  $C$  є обчислення

його за двома різними формулами. Одержані результати співпадають.

У процесі розв'язування цієї задачі дістаємо дійсні та цілком певні значення шуканих елементів за умови, що величини кожного з даних елементів розташовані між  $0^\circ$  та  $180^\circ$ . Розв'язок задачі завжди існує та при цьому єдиний.

Отже,  $a = 34^\circ 27' 13''$ ;  $b = 39^\circ 49' 26''$ ;  $C = 52^\circ 43' 34''$ . ■

*Приклад 5.* Розв'язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом, що лежить проти однієї з них. Дано:  $a = 57^\circ 41' 13''$ ;  $b = 76^\circ 34' 42''$ ;  $A = 40^\circ 23' 28''$ . Знайти:  $B, C$  та  $c$ .

□ Кут  $B$  визначимо за формулою синусів:

$$\sin B = \sin A \cdot \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Кут  $C$  та сторону  $c$  визначимо за формулами, що впливають з аналогій Непера:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}.$$

Контролем знаходження величин  $C$  та  $c$  слугує обчислення кожної з них за двома різними співвідношеннями. Обчислення кута  $B$  перевіримо за контрольною формулою Гаусса:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Під час обчислення кута  $B$  за формулою синусів можливі три випадки:

- а)  $\sin B > 1$ , при цьому розв'язок задачі не існує;
- б)  $\sin B = 1$ , тоді кут  $B = 90^\circ$  і задача має єдиний розв'язок;

в)  $\sin B < 1$ , тоді для кута  $B$  дістанемо два значення: перше менше за  $90^\circ$ , а друге більше за  $90^\circ$ . Задача матиме два розв'язки.

Оскільки в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і навпаки, то шуканий кут мусить задовольняти умові, щоб різниці  $A - B$  і  $a - b$  мали той самий знак. Якщо ця умова не справджується, то сферичний трикутник не можливий. Якщо ж ця умова виконана одним або двома одержаними значеннями кута  $B$ , то дістанемо один або два розв'язки трикутника. Справді, при кожному певному значенні кута  $B$ , що задовольняє попередній умові, за формулами Непера для кута  $C$  і сторони  $c$  отримаємо єдині цілком певні значення.

З того, що різниці  $A - B$  і  $a - b$  мають однакові знаки, спираючись на умову: якщо  $A + B \leq 180^\circ$ , то і  $a + b \leq 180^\circ$ , маємо:

$$0^\circ < \frac{C}{2} < 90^\circ; \quad 0^\circ < \frac{c}{2} < 90^\circ, \quad \text{або} \quad C < 180^\circ, \quad c < 180^\circ. \quad \text{Звідси очевидно}$$

но, що знаходження кута  $C$  і сторони  $c$  за тангенсами  $\frac{C}{2}$  і  $\frac{c}{2}$  для кожного значення  $B$  буде однозначним.

$$\text{Дано: } a = 57^\circ 41' 13'' = 57,6869444;$$

$$b = 76^\circ 34' 42'' = 76,5783333; \quad A = 40^\circ 23' 28'' = 40,3911111.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin a = 0,8451400; \quad \sin b = 0,97268817; \quad \sin A = 0,6480017;$$

$$\sin B = 0,6480017 \frac{0,97268817}{0,8451400} = 0,7457929; \quad B_1 = 48^\circ,2272247;$$

$$B_2 = 131^\circ,7727534; \quad B_1 = 48^\circ 13' 38''; \quad B_2 = 131^\circ 46' 22'';$$

$$a + b = 134^\circ,2652777 < 180^\circ; \quad A + B_1 = 88^\circ,6183358 < 180^\circ;$$

$$A + B_2 = 172^\circ,1638645 < 180^\circ; \quad a - b = -18^\circ,8913889;$$

$$A - B_1 = -7,8361136; \quad A - B_2 = -91^\circ,3816423.$$

Оскільки  $a - b < 0$ ,  $A - B_1 < 0$  і  $A - B_2 < 0$ , то обидва розв'язки задачі можливі.

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{A+B_1}{2} = 44^\circ,3091679; & \cos \frac{A+B_1}{2} = 0,715581; \\
& \sin \frac{A+B_1}{2} = 0,6985298; & \operatorname{tg} \frac{A+B_1}{2} = 0,9761716; \\
& \operatorname{ctg} \frac{A+B_1}{2} = 1,0244101; & \frac{A-B_1}{2} = -3,9180568; \\
& \cos \frac{A-B_1}{2} = 0,9976628; & \sin \frac{A-B_1}{2} = -0,0683297; \\
& \operatorname{tg} \frac{A-B_1}{2} = -0,0684898; & \operatorname{ctg} \frac{A-B_1}{2} = -14,6007179; \\
& \frac{a+b}{2} = 67^\circ,1326388; & \cos \frac{a+b}{2} = 0,3885991; \\
& \sin \frac{a+b}{2} = 0,9214069; & \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 2,3710988; \\
& \frac{a-b}{2} = -9,4456944; & \cos \frac{a-b}{2} = 0,9864416; \\
& \sin \frac{a-b}{2} = -0,1641127; & \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = -0,1663684; \\
2) \quad & \frac{A+B_2}{2} = 86^\circ,0819322; & \cos \frac{A+B_2}{2} = 0,0683299; \\
& \sin \frac{A+B_2}{2} = 0,9976628; & \operatorname{tg} \frac{A+B_2}{2} = 14,600677; \\
& \operatorname{ctg} \frac{A+B_2}{2} = 0,0684899; & \frac{A-B_2}{2} = -45,6908212; \\
& \cos \frac{A-B_2}{2} = 0,6985299; & \sin \frac{A-B_2}{2} = -0,7155808; \\
& \operatorname{tg} \frac{A-B_2}{2} = -1,0244097; & \operatorname{ctg} \frac{A-B_2}{2} = -0,9761719.
\end{aligned}$$

Контроль обчислення кута  $B_{1,2}$ :

$$B_1: \quad \operatorname{tg} \frac{A+B_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2};$$

$$\frac{0,9761716}{-0,0684898} = \frac{2,3710988}{-0,1663684}; \quad -14,2528026 = -14,2520984;$$

$$B_2: \quad \operatorname{tg} \frac{A+B_2}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2};$$

$$\frac{14,600677}{-1,0244097} = \frac{2,3710988}{-0,1663684}; \quad -14,2527711 = -14,2520984.$$

Узгодженість хороша.

Обчислення кута С :

$$C_1: \quad \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B_1}{2} \cos \frac{a-b}{2} / \cos \frac{a+b}{2} =$$

$$= 1,0244101 \cdot 0,9864416 / 0,3885991 = 2,6004197;$$

$$\frac{C_1}{2} = 68^\circ,9655871 = 68^\circ 57' 56'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B_1}{2} \sin \frac{a-b}{2} / \sin \frac{a+b}{2} =$$

$$= -14,6007179 \cdot (-0,1641127) / 0,9214069 = 2,6005484;$$

$$\frac{C_1}{2} = 68^\circ,9665373 = 68^\circ 57' 59''.$$

Візьmemo  $C_1$  як середнє з двох розрахунків:

$$C_1 = 137^\circ,9321244 = 137^\circ 55' 56''.$$

$$C_2: \quad \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B_2}{2} \cos \frac{a-b}{2} / \cos \frac{a+b}{2} =$$

$$= 0,0684899 \cdot 0,9864416 / 0,3885991 = 0,1738586;$$

$$\frac{C_2}{2} = 9^\circ,8627778 = 9^\circ 51' 46'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A - B_2}{2} \sin \frac{a - b}{2} / \sin \frac{a + b}{2} = \\ &= -0,9761719 \cdot (-0,1641127) / 0,9214069 = 0,1738669; \\ \frac{C_2}{2} &= 9^\circ,8632434 = 9^\circ 51' 48''. \end{aligned}$$

Візьмемо  $C_2$  як середнє з двох розрахунків:

$$C_2 = 19^\circ,7260212 = 19^\circ 43' 34''.$$

Обчислення сторони  $c$ :

$$\begin{aligned} c_1: \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a + b}{2} \cos \frac{A + B_1}{2} / \cos \frac{A - B_1}{2} = \\ &= 2,3710988 \cdot 0,715581 / 0,9976628 = 1,7373178; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 60^\circ,0752730 = 60^\circ 04' 31'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a - b}{2} \sin \frac{A + B_1}{2} / \sin \frac{A - B_1}{2} = \\ &= -0,1663684 \cdot 0,6985298 / (-0,0683297) = 1,7007726; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 59^\circ,5458316 = 59^\circ 32' 45''.$$

Візьмемо  $c_1$  як середнє з двох розрахунків:

$$c_1 = 119^\circ,6211046 = 119^\circ 37' 16''.$$

$$\begin{aligned} c_2: \operatorname{tg} \frac{c_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a + b}{2} \cos \frac{A + B_2}{2} / \cos \frac{A - B_2}{2} = \\ &= 2,3710988 \cdot 0,0683299 / 0,6985299 = 0,23193988; \end{aligned}$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0582826 = 13^\circ 03' 30'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a - b}{2} \sin \frac{A + B_2}{2} / \sin \frac{A - B_2}{2} =$$

$$= -0,1663684 \cdot 0,9976628 / (-0,7155808) = 0,2319508;$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0588780 = 13^\circ 05' 20''.$$

Візьмемо  $c_2$  як середнє з двох розрахунків

$$c_2 = 26^\circ,1470622 = 26^\circ 08' 49''.$$

Отже,  $B_1 = 48^\circ 13' 48''$ ;  $C_1 = 137^\circ 55' 56''$ ;  $c_1 = 119^\circ 37' 16''$ ;

$$B_2 = 131^\circ 46' 22''$$
;  $C_2 = 19^\circ 43' 34''$ ;  $c_2 = 26^\circ 08' 49''$ . ■

*Приклад 6.* Розв'язання сферичного трикутника за двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них. Дано:  $A = 60^\circ 57' 33''$ ;  $B = 72^\circ 40' 32''$ ;  $a = 57^\circ 17' 28''$  Знайти:  $b, c$  та  $C$ .

□ Для розв'язання даної задачі скористаємося методом безпосереднього обчислення за допомогою основних формул і аналогій Непера.

Визначимо сторону  $b$  за формулою синусів:

$$\sin b = \sin B \sin a / \sin A.$$

Перевірку обчислення виконаємо за контрольною формулою Гаусса:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Кут  $C$  та сторону  $c$ , як і у попередньому прикладі 5, обчислимо за аналогіями Непера:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}.$$

Контролем точності знаходження  $C$  та  $c$  є подвійне об-



числення кожної величини за двома різними формулами.

$$\text{Дано: } A = 60^{\circ}57'33'' = 60^{\circ},9591667 ;$$

$$B = 72^{\circ}40'32'' = 72^{\circ},6755556 ; a = 57^{\circ}17'28'' = 57^{\circ},2911111 .$$

Обчислення сторони  $b$  :

$$\sin b = \sin B \sin a / \sin A ; \quad \sin B = 0,9546338 ;$$

$$\sin a = 0,8414270 ; \quad \sin A = 0,8742740 ;$$

$$\sin b = \frac{0,9546338 \cdot 0,8414270}{0,8742740} = 0,9187677 ;$$

$$b_1 = 66^{\circ},7465823 = \quad b_2 = 113^{\circ},2534177 = \\ = 67^{\circ}44'48'' \quad \quad \quad = 113^{\circ}15'12''$$

Різниці  $A - B < 0$  та  $a - b_1 < 0$  і, відповідно,  $A - B < 0$  та  $a - b_2 < 0$  мають однакові знаки, а тому існують два розв'язки:

$$b_1 = 67^{\circ}44'48'' \text{ та } b_2 = 113^{\circ}15'12'' .$$

Обчислення  $C$  та  $c$  :

$$\frac{A+B}{2} = 66^{\circ},8773612 ; \quad \text{ctg} \frac{A+B}{2} = 0,4282419 ;$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = 0,3936634 ; \quad \sin \frac{A+B}{2} = 0,9192547 ;$$

$$\frac{A-B}{2} = -5^{\circ},8581944 ; \quad \text{ctg} \frac{A-B}{2} = -9,7463449 ;$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = 0,9947776 ; \quad \sin \frac{A-B}{2} = -0,1020667 ;$$

$$\frac{a+b_1}{2} = 62^{\circ},0188467 ; \quad \cos \frac{a+b_1}{2} = 0,4691811 ;$$

$$\sin \frac{a+b_1}{2} = 0,8831020 ; \quad \text{tg} \frac{a+b_1}{2} = 1,8822198 ;$$

$$\frac{a-b_1}{2} = -4^{\circ},7273559 ; \quad \cos \frac{a-b_1}{2} = 0,9965982 ;$$

$$\sin \frac{a-b_1}{2} = -0,0824143; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2} = -0,0826957;$$

$$\frac{a+b_2}{2} = 85^\circ,2722644; \quad \cos \frac{a+b_2}{2} = 0,0824209;$$

$$\sin \frac{a+b_2}{2} = 0,9965976; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b_2}{2} = 12,0915571;$$

$$\frac{a-b_2}{2} = -27^\circ,9811533; \quad \cos \frac{a-b_2}{2} = 0,8831020;$$

$$\sin \frac{a-b_2}{2} = -0,4691811; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b_2}{2} = -0,5312876.$$

$$\text{Кут } C_1: \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cos \frac{a-b_1}{2} / \cos \frac{a+b_1}{2} =$$

$$= 0,4282419 \cdot 0,9864136 / 0,4691811 = 0,9003424;$$

$$\frac{C_1}{2} = 41^\circ,9980491 = 41^\circ 59' 59''; \quad C_1 = 83^\circ,9996098 = 83^\circ 59' 59'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \sin \frac{a-b_1}{2} / \sin \frac{a+b_1}{2} =$$

$$= -9,7463449 \cdot (-0,0824143) / 0,8831020 = 0,9095649;$$

$$\frac{C_1}{2} = 42^\circ,2885564; \quad C_1 = 84^\circ,5771129 = 84^\circ 34' 38''.$$

$C_1$  беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_1 = 84^\circ,2883614 = 84^\circ 17' 18''.$$

$$\text{Кут } C_2: \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cos \frac{a-b_2}{2} / \cos \frac{a+b_2}{2} =$$

$$= 0,4282419 \cdot 0,8831020 / 0,0824209 = 4,5884148;$$

$$\frac{C_2}{2} = 74^\circ,7052000; \quad C_2 = 155^\circ,4104 = 155^\circ 24' 37'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \sin \frac{a-b_2}{2} / \sin \frac{a+b_2}{2} = \\ &= -9,7463449 \cdot (-0,4691811) / 0,9965976 = 4,5884124 ; \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{2} = 77^\circ,7051938 ; \quad C_2 = 155^\circ,4103876 = 155^\circ 24' 37'' .$$

$C_2$  беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_2 = 155^\circ 24' 37'' .$$

$$\begin{aligned} \text{Сторона } c_1: \quad \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b_1}{2} \cos \frac{A+B}{2} / \cos \frac{A-B}{2} = \\ &= 1,8822198 \cdot 0,3936634 / 0,9947776 = 0,7448510 ; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 36^\circ,6806187 ; \quad c_1 = 73^\circ,3612374 = 73^\circ 21' 40'' ;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2} \sin \frac{A+B}{2} / \sin \frac{A-B}{2} = \\ &= -0,0826957 \cdot 0,9192547 / (-0,1020667) = 0,7447915 ; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 36^\circ,6784277 ; \quad c_1 = 73^\circ,3568555 = 73^\circ 21' 25'' .$$

$c_1$  беремо як середнє за двома розрахунками:  $c_1 = 73^\circ 21' 33''$  .

$$\begin{aligned} \text{Сторона } c_2: \quad \operatorname{tg} \frac{c_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b_2}{2} \cos \frac{A+B}{2} / \cos \frac{A-B}{2} = \\ &= 12,0915571 \cdot 0,3936634 / 0,9947776 = 4,7849926 ; \end{aligned}$$

$$\frac{c_2}{2} = 78^\circ,1958357 ; \quad c_2 = 156^\circ,3916714 = 156^\circ 23' 30'' ;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b_2}{2} \sin \frac{A+B}{2} / \sin \frac{A-B}{2} = \\ &= -0,5312876 \cdot 0,9192547 / (-0,1020667) = 4,7849947 ; \end{aligned}$$

$$\frac{c_2}{2} = 78^\circ,1958408; \quad c_2 = 156^\circ,3916816 = 156^\circ 23' 30''.$$

Середнє значення  $c_2$  за двома розрахунками:

$$c_2 = 156^\circ 23' 30''.$$

Отже,  $b_1 = 67^\circ 44' 48''$ ;  $c_1 = 73^\circ 21' 33''$ ;  $C_1 = 84^\circ 17' 18''$ ;

$b_2 = 113^\circ 15' 12''$ ;  $c_2 = 156^\circ 23' 30''$ ;  $C_2 = 155^\circ 24' 37''$ . ■

### 5.9 Розв'язування малих сферичних трикутників

У геодезичних вимірюваннях Землю зазвичай ототожнюють з кулею, радіус якої  $R \approx 6370$  км. Тоді трикутники, що утворюються геодезичними пунктами на поверхні Землі, можна розглядати як сферичні. Сторони цих трикутників порядку  $40 \div 60$  км і, порівняно з радіусом Землі, малі. Такі трикутники називають **сферичними трикутниками малого вигину (малими сферичними трикутниками)**.

Застосовувати загальні формули сферичної тригонометрії до розв'язання малих трикутників недоцільно за таких причин. У геодезії оперують із лінійними величинами, а у сферичній тригонометрії обчислення проводять у кутовій мірі. Під час використання загальних співвідношень знадобиться оперувати з тригонометричними функціями малих кутів ( $\sim 20'$ ), що може призвести до великих обчислювальних похибок.

Ці незручності усуваються шляхом застосування для розв'язування малих сферичних трикутників **теорема Лежандра**:

*кути сферичного трикутника приблизно на третину сферичного надлишку більші відповідних кутів плоского трикутника, що має сторони відповідно рівні сторонам сферичного трикутника.*

Нехай сферичний трикутник  $ABC$  та плоский трикутник  $A_1B_1C_1$  мають однакові за довжиною сторони  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Тоді за теоремою Лежандра відповідні кути цих трикутників пов'язані між собою співвідношеннями:

$$A - A_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad B - B_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad C - C_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – сферичний надлишок трикутника  $ABC$ .

*Зуваження.* Хоча на практиці в малому трикутнику вимірюють усі три кути, знаходити ексцес  $\varepsilon$  безпосередньо за означенням не рекомендується, оскільки похибки у вимірюванні кутів звичай перевищують сам ексцес. Обчислення його за загальними формулами Каньолі та Люїльє, як зазначено вище, також недоцільне.

Кутова величина  $\varepsilon^\circ$  сферичного надлишку малого трикутника наближено може бути обчислена за однією зі спрощених формул:

$$\varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} bc \sin A_1; \quad \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ac \sin B_1; \quad \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ab \sin C_1,$$

які одержані зі співвідношення для площі сферичного трикутника з використанням відповідних виразів для площі плоского трикутника  $A_1B_1C_1$ :

$$F = \frac{1}{2} bc \sin A_1; \quad F = \frac{1}{2} ac \sin B_1; \quad F = \frac{1}{2} ab \sin C_1,$$

де  $\rho^\circ = 57^\circ,2957795\dots$ ;  $R$  – радіус Землі;  $A_1, B_1$  і  $C_1$  – кути плоского трикутника;  $a, b$  і  $c$  – довжини сторін (величини  $R, a, b$  і  $c$  вимірюються у лінійних одиницях). При цьому припускається, що трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  приблизно рівновеликі  $F_{ABC} \approx F_{A_1B_1C_1}$ .

Значення теореми Лежандра полягає в тому, що вона дає змогу застосовувати під час розв'язування малих сферичних трикутників формули плоскої тригонометрії. Для цього обчислюють сферичний надлишок за якою-небудь із наведених формул і переходять від кутів сферичного трикутника  $ABC$  до кутів плоского трикутника  $A_1B_1C_1$ , який має ті самі довжини відповідних сторін, що і трикутник  $ABC$ , після чого розв'язують плоский трикутник  $A_1B_1C_1$ . У випадку малих сферичних трикутників на земній поверхні зі сторонами до 200 км такі обчислення призводять до абсолютної похибки в кутах, що не перевищує  $0",01$ .

## 5.10 Диференціальні формули сферичної тригонометрії

Практичні геодезичні вимірювання супроводжуються деякими похибками, вплив яких на значення шуканих величин необхідно враховувати. Для цього використовують залежності між нескінченно малими приростами (диференціалами) різних елементів сферичного трикутника. Їх можна одержати шляхом диференціювання основних співвідношень для сферичного трикутника з подальшим їх спрощенням. Наведемо (без доведення) перелік найважливіших диференціальних формул сферичної тригонометрії.

1. Залежність між нескінченно малими змінами одного з кутів і трьох сторін:

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin c \sin B \cdot dA;$$

$$db = \cos A \cdot dc + \cos C \cdot da + \sin a \sin C \cdot dB; .$$

$$dc = \cos B \cdot da + \cos A \cdot db + \sin b \sin A \cdot dC .$$

2. Залежність між нескінченно малими змінами однієї зі сторін і трьох кутів:

$$dA = \sin b \sin C \cdot da - \cos b \cdot dC - \cos c \cdot dB;$$

$$dB = \sin c \sin A \cdot db - \cos c \cdot dA - \cos a \cdot dC; .$$

$$dC = \sin a \sin B \cdot dc - \cos a \cdot dB - \cos b \cdot dA .$$

3. Залежність між нескінченно малими змінами одного з кутів та протилежної до нього сторони:

$$\operatorname{ctg} A \cdot dA = \operatorname{ctg} a \cdot da; \operatorname{ctg} B \cdot dB = \operatorname{ctg} b \cdot db; \operatorname{ctg} C \cdot dC = \operatorname{ctg} c \cdot dc .$$

4. Залежність між нескінченно малими змінами двох сторін і протилежних до них двох кутів:

$$\cos A \sin b \cdot dA + \cos b \sin A \cdot db = \cos B \sin a \cdot dB + \cos a \sin B \cdot da ;$$

$$\cos A \sin c \cdot dA + \cos c \sin A \cdot dc = \cos C \sin a \cdot dC + \cos a \sin C \cdot da ;$$

$$\cos C \sin b \cdot dC + \cos b \sin C \cdot db = \cos B \sin c \cdot dB + \cos c \sin B \cdot dc .$$

*Зауваження.* Формули, що виражають залежність між нескінченно малими змінами однієї зі сторін і трьох кутів, можна вивести з формул, що описують залежність між нескінченно малими змінами одного з кутів і трьох сторін, переходом до полярного трикутника.

## 5.11 Контрольні запитання та вправи

1. Які задачі розв'язує сферична тригонометрія?
2. У чому полягає метод перестановки елементів по колу?
3. Як читають формулу косинуса сторони сферичного трикутника? Формулу косинуса кута сферичного трикутника?
4. Яка залежність визначається сферичною теоремою синусів?
5. Як читають формулу добутку синуса сторони на косинус прилеглого кута (формулу п'яти елементів)?
6. Як читають формулу добутку синуса кута на косинус прилеглої сторони (змінену формулу п'яти елементів)?
7. Як читають формулу котангенсів (формулу чотирьох елементів)?
8. Чи можливий сферичний трикутник  $ABC$  при наступних значеннях його елементів?
  - а)  $a = 35^{\circ}32'$ ;  $b = 38^{\circ}56'$ ; б)  $a = 41^{\circ}18'$ ;  $b = 20^{\circ}15'$ ;
  - в)  $a = 20^{\circ}33'$ ;  $b = 68^{\circ}10'$ ; г)  $A = 25^{\circ}27'$ ;  $B = 64^{\circ}9'$ ;
  - д)  $A = 35^{\circ}21'$ ;  $B = 46^{\circ}10'$ ; е)  $A = 43^{\circ}7'$ ;  $B = 47^{\circ}35'$ ;
  - е)  $c = 80^{\circ}15'$ ;  $A = 17^{\circ}22'$ ; ж)  $C = 101^{\circ}6'$ ;  $a = 21^{\circ}43'$ .
9. Що таке прямокутний сферичний трикутник? Які його елементи?
10. Сформулюйте мнемонічне правило Непера та умови його застосування.
11. Наведіть усі шість випадків розв'язання прямокутних сферичних трикутників.
12. Чи можливий прямокутний сферичний трикутник  $ABC$  при наступних значеннях його елементів?
  - а)  $a = 150^{\circ}25'$ ;  $b = 110^{\circ}12'$ ;  $c = 136^{\circ}43'$ ;
  - б)  $a = 71^{\circ}23'$ ;  $b = 140^{\circ}54'$ ;  $c = 114^{\circ}16'$ ;
  - в)  $b = 33^{\circ}18'$ ;  $B = 60^{\circ}24'$ ;  $C = 37^{\circ}5'$ .
13. Складіть схеми обчислень для кожного випадку розв'язання прямокутних сферичних трикутників.
14. Як зв'язані величини катета та протилежного йому кута у прямокутному сферичному трикутнику?
15. Як розв'язують просторонні сферичні трикутники?

16. Уставте пропущене слово: щоб розв'язати косокутний сферичний трикутник, необхідно знати ... елементи.

17. Наведіть усі шість випадків розв'язання косокутних сферичних трикутників.

18. У яких випадках неможливо розв'язати косокутний сферичний трикутник?

19. Складіть схеми безпосереднього обчислення шуканих елементів косокутного сферичного трикутника для кожного випадку його розв'язання.

20. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три сторони?

21. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три кути?

22. Коли краще застосовувати формули синусів, а коли – формули косинусів половини кутів?

23. Наведіть формули Делаμβра – Гаусса.

24. Що виражають аналогії Непера?

25. За якими формулами розв'язується косокутний сферичний трикутник, якщо задані дві сторони та кут між ними?

26. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані сторона та два прилеглих до неї кути?

27. Наведіть формули для обчислення сферичного надлишку.

28. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, вписаного в даний сферичний трикутник?

29. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, описаного навколо даного сферичного трикутника?

30. Як записують контрольну формулу Гаусса?

31. У чому полягають формули Каньолі та Люільє? Для чого їх застосовують?

32. Як контролюють перебіг розв'язування сферичних трикутників?

33. Що таке малі сферичні трикутники?

34. Сформулюйте теорему Лежандра. У чому полягає її значення?

35. За якими спрощеними формулами обчислюють ексцес малого сферичного трикутника?

36. Уставте пропущені слова: малий сферичний трикутник можна наближено розв'язати як плоский із такими самими за величиною сторонами і кутами, меншими на ... .



## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Знайти перелічені далі елементи рухомого супровідного тригранника і характеристики кривини лінії  $L$ , що задана векторно-параметричним рівнянням  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , у точці  $M_0$ , що відповідає вказаному значенню параметра  $t_0$ :

- 1) рівняння дотичної прямої та рівняння нормальної площини;
- 2) рівняння бінормалі та рівняння стичної площини;
- 3) рівняння головної нормалі та рівняння спрямної площини;
- 4) орти канонічного репера (репера Френе)  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\beta}$ ;
- 5) кривину  $k_1$  і скрут  $k_2$ .

Вариант	Лінія $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$	Точка $M_0 = M(t_0)$
1	$\vec{r} = e^{\sin t} \cdot \vec{i} + (t - \pi) \sin t \cdot \vec{j} + 3 \cos t \vec{k}$	$t_0 = \pi$
2	$\vec{r} = 2t \ln t \cdot \vec{i} + t^2 \vec{j} + e^{t-1} \vec{k}$	$t_0 = 1$
3	$\vec{r} = e^{t-1} \vec{i} + 2te^{t-1} \vec{j} + t^2 \vec{k}$	$t_0 = 1$
4	$\vec{r} = e^t \cos t \cdot \vec{i} + e^t \sin t \cdot \vec{j} + 2e^t \cdot \vec{k}$	$t_0 = 0$
5	$\vec{r} = (1 - \cos t) \cdot \vec{i} + e^{\sin t} \sin t \cdot \vec{j} + 4 \cos t \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
6	$\vec{r} = e^{\cos t} \sin t \cdot \vec{i} + 2 \sin t \cdot \vec{j} + 3 \cos t \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi/2$
7	$\vec{r} = 2 \cos t \cdot \vec{i} + 3 \sin t \cdot \vec{j} + e^{t-\pi} \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
8	$\vec{r} = 2 \cos t \cdot \vec{i} + 4 \sin t \cdot \vec{j} + 3e^{\sin t} \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
9	$\vec{r} = \sin^2 t \cdot \vec{i} + \sin t \cos t \cdot \vec{j} + 2 \cos t \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi/2$
10	$\vec{r} = (2 - \sin t) \cdot \vec{i} + t \cos t \cdot \vec{j} + 4e^t \cdot \vec{k}$	$t_0 = 0$
11	$\vec{r} = (t - \cos t) \cdot \vec{i} + 2(t + \sin t) \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$	$t_0 = 0$
12	$\vec{r} = (t - \pi) \cos t \cdot \vec{i} + 3 \sin t \cdot \vec{j} + 2e^{t-\pi} \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
13	$\vec{r} = 3 \cos t \cdot \vec{i} + e^{\sin t} \cos t \cdot \vec{j} + 2(t - \pi) \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
14	$\vec{r} = (2/t) \cdot \vec{i} + t \ln t \cdot \vec{j} + 3t^2 \cdot \vec{k}$	$t_0 = 1$

15	$\vec{r} = 2e^{\sin t} \cos t \cdot \vec{i} + (t - \pi) \sin t \cdot \vec{j} + 3e^{t-\pi} \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
16	$\vec{r} = (3/t) \cdot \vec{i} + (t + \ln t) \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$	$t_0 = 1$
17	$\vec{r} = 2te^{t-1} \cdot \vec{i} + 2(t - \ln t) \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$	$t_0 = 1$
18	$\vec{r} = \sin t \cdot \vec{i} + e^{\sin t} \cos t \cdot \vec{j} + 4 \cos t \cdot \vec{k}$	$t_0 = \pi$
19	$\vec{r} = 2t \sin t \cdot \vec{i} + e^{\sin t} \cos t \cdot \vec{j} + 2t \cdot \vec{k}$	$t_0 = 0$
20	$\vec{r} = t^2 e^{t-1} \cdot \vec{i} + (2/t) \cdot \vec{j} + \ln t \cdot \vec{k}$	$t_0 = 1$

**Завдання 2.** Задано поверхню  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , точку на ній  $M_0$ , що відповідає вказаним значенням параметрів  $u_0, v_0$ , і лінію  $L: u = u(t), v = v(t)$  на цій поверхні, що проходить через точку  $M_0$ . У точці  $M_0$  знайти:

1) рівняння нормальної прямої та рівняння дотичної площини до поверхні  $S$ ;

2) першу квадратичну форму  $I$  поверхні  $S$ ;

3) косинус кута  $\omega$  між координатними лініями  $u = u_0 = \text{const}$  і  $v = v_0 = \text{const}$ ;

4) другу квадратичну форму  $II$  поверхні  $S$ ;

5) нормальну кривину  $k_n$  поверхні  $S$  у напрямку дотичної до кривої  $L$ ;

6) головні кривини  $k_1$  і  $k_2$ , повну (гауссову)  $K$  і середню  $H$  кривини поверхні  $S$ ;

7) геодезичну кривину  $k_g$  кривої  $L$  на поверхні  $S$ .

Варіант	Поверхня $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$	Точка $M_0(u_0, v_0)$	Лінія $L: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$
1	$\vec{r} = (1 + 2 \cos u) \cos v \cdot \vec{i} + (1 + 2 \cos u) \sin v \cdot \vec{j} + 2 \sin u \cdot \vec{k}$	$u_0 = \pi,$ $v_0 = \pi/2$	$\begin{cases} u = \pi t \\ v = \pi t / 2 \end{cases}$

2	$\vec{r} = (2u + \cos v) \cdot \vec{i} + (2u - \sin v) \cdot \vec{j} + 3v \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = 0$	$\begin{cases} u = t \\ v = t^2 - 1 \end{cases}$
3	$\vec{r} = (5u - v) \cdot \vec{i} + (u^2 + v^2) \cdot \vec{j} + (u^3 - v^3) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 1$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = t^2 \end{cases}$
4	$\vec{r} = 2u \cos v \cdot \vec{i} + 2u \sin v \cdot \vec{j} + (u + v) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = 0$	$\begin{cases} u = 2 - t \\ v = t^3 - 1 \end{cases}$
5	$\vec{r} = 2u \sin v \cdot \vec{i} + 2u \cos v \cdot \vec{j} + 5u^2 \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = \pi/2$	$\begin{cases} u = t^2 \\ v = \pi t/2 \end{cases}$
6	$\vec{r} = 2 \cos u \cos v \cdot \vec{i} + 2 \cos u \sin v \cdot \vec{j} + (\sin u + 4) \cdot \vec{k}$	$u_0 = \pi/2,$ $v_0 = \pi$	$\begin{cases} u = \pi t/2 \\ v = \pi t \end{cases}$
7	$\vec{r} = u \cos v \cdot \vec{i} + u \sin v \cdot \vec{j} + (3u^2 + 5) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = \pi/2$	$\begin{cases} u = 2t^2 \\ v = \pi t/2 \end{cases}$
8	$\vec{r} = 2u \sin v \cdot \vec{i} + 2u \cos v \cdot \vec{j} + (u + 3) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = \pi$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = \pi t \end{cases}$
9	$\vec{r} = (u + 3) \cdot \vec{i} + (2v + 1) \cdot \vec{j} + (u^2 + v^2) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 1$	$\begin{cases} u = 2t^3 \\ v = 2 - t \end{cases}$
10	$\vec{r} = 2 \cos u \cos v \cdot \vec{i} + 7 \sin u \cos v \cdot \vec{j} + 3 \sin v \cdot \vec{k}$	$u_0 = \pi/2,$ $v_0 = \pi/2$	$\begin{cases} u = \pi(1 - t) \\ v = \pi t \end{cases}$
11	$\vec{r} = (u^2 + v^2) \cdot \vec{i} + (3u^2 - v^2) \cdot \vec{j} + 5uv \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = 2$	$\begin{cases} u = t^3 \\ v = 2t \end{cases}$
12	$\vec{r} = (2u - v) \cdot \vec{i} + 4uv \cdot \vec{j} + (u^3 + v^3) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 1$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = t^3 \end{cases}$
13	$\vec{r} = 3u \cdot \vec{i} + (u^2 - 5v) \cdot \vec{j} + (u^3 + 3uv) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 2$	$\begin{cases} u = 2t^3 \\ v = 3 - t \end{cases}$

14	$\vec{r} = (2u + \cos v) \cdot \vec{i} + (u - \sin v) \cdot \vec{j} + (u + 3) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = \pi$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = \pi t^2 \end{cases}$
15	$\vec{r} = 2u \cos v \cdot \vec{i} + 2u \sin v \cdot \vec{j} + 3u^2 \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = \pi/2$	$\begin{cases} u = t^3 \\ v = \pi t/2 \end{cases}$
16	$\vec{r} = 8u \cos v \cdot \vec{i} + 8u \sin v \cdot \vec{j} + 5v \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = 0$	$\begin{cases} u = t^3 \\ v = \pi(t-1) \end{cases}$
17	$\vec{r} = (2u + v) \cdot \vec{i} + 3uv \cdot \vec{j} + (u^3 + v^3) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 1$	$\begin{cases} u = 2t^3 \\ v = 3 - 2t \end{cases}$
18	$\vec{r} = (u + \cos v) \cdot \vec{i} + (u - \sin v) \cdot \vec{j} + 5u \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = \pi$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = \pi t^3 \end{cases}$
19	$\vec{r} = 2u \cos v \cdot \vec{i} + 2u \sin v \cdot \vec{j} + (3u + 2v) \cdot \vec{k}$	$u_0 = 1,$ $v_0 = 0$	$\begin{cases} u = t \\ v = t^3 - 1 \end{cases}$
20	$\vec{r} = (u^2 + v^2) \cdot \vec{i} + (u^2 - v^2) \cdot \vec{j} + uv \cdot \vec{k}$	$u_0 = 2,$ $v_0 = 1$	$\begin{cases} u = 2t \\ v = 2 - t^3 \end{cases}$

**Завдання 3.** Визначити найкоротшу (ортодромічну) відстань  $M_1M_2$  між двома точками  $M_1$  та  $M_2$  земної кулі ( $R = 6370$  км), що задані їхніми географічними координатами  $(\varphi, \lambda)$ , де  $\varphi$  – північна широта і  $\lambda$  – східна довгота. Знайти азимут  $\mu_{21}$  точки  $M_2$  відносно точки  $M_1$ . Знайти довжину  $S$  та кут  $K$  локсодромії між точками  $M_1$  та  $M_2$ .

Варіант	$M_1$	$M_2$	Варіант	$M_1$	$M_2$
1	(55°50'; 60°35')	(56°45'; 37°30')	11	(59°56'; 30°17')	(56°52'; 35°53')
2	(53°20'; 61°31')	(50°30'; 41°31')	12	(37°16'; 42°18')	(45°27'; 61°30')
3	(45°11'; 60°29')	(56°45'; 37°30')	13	(41°18'; 60°17')	(51°19'; 62°18')
4	(51°12'; 45°30')	(51°12'; 62°11')	14	(44°19'; 64°23')	(52°21'; 65°19')
5	(41°39'; 81°20')	(60°14'; 69°13')	15	(47°20'; 62°20')	(54°37'; 63°11')

6	(49°18'; 72°31')	(30°28'; 80°17')	16	(49°21'; 61°31')	(52°41'; 64°15')
7	(31°21'; 10°37')	(45°30'; 60°17')	17	(52°31'; 60°47')	(61°13'; 80°16')
8	(48°31'; 21°45')	(60°42'; 45°18')	18	(54°11'; 49°30')	(58°17'; 72°13')
9	(51°39'; 32°16')	(62°17'; 41°19')	19	(56°27'; 48°31')	(60°17'; 70°01')
10	(55°46'; 37°30')	(59°56'; 30°17')	20	(62°17'; 45°30')	(70°18'; 50°11')

**Завдання 4.** За даними елементами прямокутного сферичного трикутника ( $A = 90^\circ$ ) знайти:

- 1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;
  - 2)  $\varepsilon$  (сферичний надлишок),  $p$  (півпериметр),  $r_m$  та  $R_m$  (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл);
  - 3) площу  $F$  трикутника в км<sup>2</sup>, якщо  $R = 6370$  км.
- Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано гіпотенузу та катет:

Вариант	$a$	$b$	Вариант	$a$	$b$
1	61°07'08"	33°18'17"	11	61°07'08"	54°41'47"
2	32°08'00"	23°50'48"	12	32°08'00"	22°12'00"
3	64°03'10"	40°04'16"	13	64°03'10"	55°07'35"
4	107°17'00"	143°12'03"	14	107°17'00"	68°13'15"
5	83°01'04"	73°02'12"	15	83°01'04"	65°22'56"
6	58°40'13"	15°15'42"	16	58°40'13"	12°22'39"
7	78°21'49"	13°02'17"	17	78°21'49"	78°03'04"
8	83°01'04"	73°02'12"	18	83°01'04"	65°22'56"
9	115°56'50"	124°52'25"	19	58°40'13"	15°15'42"
10	80°52'27"	72°13'48"	20	64°03'10"	40°04'16"

б) Дано два катета:

Вариант	$b$	$c$	Вариант	$b$	$c$
1	48°27'21"	33°07'37"	11	50°00'00"	52°55'26"
2	51°02'48"	12°16'42"	12	57°13'00"	98°47'00"
3	48°54'54"	12°16'42"	13	108°07'00"	39°03'05"
4	50°00'00"	52°55'26"	14	43°18'02"	118°53'58"
5	2°44'00"	11°38'11"	15	75°18'12"	118°09'21"
6	43°18'02"	118°53'58"	16	98°47'00"	57°13'00"
7	75°18'12"	118°09'21"	17	52°55'26"	50°00'00"

8	47°15'00"	56°25'00"	18	56°25'00"	47°15'00"
9	63°31'26"	58°40'30"	19	58°40'30"	63°31'26"
10	2°44'00"	11°38'11"	20	12°16'42"	48°54'54"

в) Дано гіпотенузу та прилеглий кут:

Вари- ант	$a$	$B$	Вари- ант	$a$	$B$
1	40°33'40"	65°58'47"	11	120°38'43"	116°56'17"
2	127°32'26"	21°08'18"	12	115°17'20"	19°13'50"
3	120°38'43"	44°54'44"	13	60°21'19"	32°39'23"
4	115°17'20"	98°28'30"	14	87°16'00"	76°57'43"
5	60°21'19"	72°24'40"	15	44°44'18"	47°37'21"
6	87°16'00"	78°21'49"	16	60°22'25"	38°57'12"
7	44°44'18"	52°05'54"	17	87°16'00"	78°21'49"
8	60°22'25"	68°12'58"	18	120°38'43"	116°56'17"
9	40°33'40"	30°23'50"	19	115°17'20"	19°13'50"
10	127°32'26"	103°15'23"	20	60°16'00"	78°03'04"

г) Дано катет і прилеглий кут:

Вари- ант	$b$	$C$	Вари- ант	$b$	$C$
1	54°06'20"	73°11'06"	11	118°12'48"	55°30'20"
2	60°38'07"	40°56'23"	12	74°21'53"	52°05'54"
3	50°00'00"	59°56'10"	13	54°08'20"	73°11'06"
4	28°07'10"	8°19'25"	14	37°52'18"	49°21'45"
5	64°30'09"	132°44'57"	15	60°38'07"	40°56'23"
6	37°52'18"	49°21'45"	16	38°25'51"	47°30'18"
7	50°00'00"	59°56'10"	17	28°07'10"	8°19'25"
8	2°44'00"	78°21'49"	18	64°30'09"	132°44'57"
9	28°07'10"	8°19'25"	19	54°06'20"	73°11'06"
10	64°30'09"	132°44'57"	20	60°38'07"	40°56'23"

д) Дано два кута:

Вари- ант	$B$	$C$	Вари- ант	$B$	$C$
1	58°27'40"	53°43'14"	11	53°43'14"	58°27'40"
2	32°14'03"	64°59'40"	12	64°59'40"	32°14'13"
3	42°38'51"	63°13'22"	13	63°13'22"	42°38'51"
4	11°56'56"	87°16'00"	14	66°20'00"	74°30'00"
5	77°43'18"	52°05'51"	15	87°16'00"	11°56'56"

6	74°30'00"	66°20'00"	16	52°30'00"	48°12'17"
7	48°12'47"	52°30'00"	17	140°10'04"	70°05'02"
8	13°19'00"	87°16'00"	18	87°16'00"	13°19'00"
9	70°05'02"	140°10'04"	19	58°27'40"	53°43'14"
10	87°16'00"	13°19'00"	20	42°38'51"	63°13'22"

е) Дано катет і протилежний кут:

Вари- ант	$b$	$B$	Вари- ант	$b$	$B$
1	29°31'40"	60°28'05"	11	18°42'58"	34°30'20"
2	38°29'00"	55°34'00"	12	33°01'24"	46°14'48"
3	35°03'00"	49°07'00"	13	37°23'43"	53°05'00"
4	108°41'36"	102°35'40"	14	41°19'28"	42°52'09"
5	4°33'27"	71°26'24"	15	1°32'06"	18°38'15"
6	162°37'18"	111°17'43"	16	7°00'26"	22°22'04"
7	51°02'48"	80°14'41"	17	12°16'42"	15°38'07"
8	108°41'36"	102°35'40"	18	41°19'28"	42°52'09"
9	138°40'32"	137°07'57"	19	161°17'02"	145°20'40"
10	146°58'36"	133°45'12"	20	142°58'36"	126°55'00"

**Завдання 5.** За даними елементами косокутного сферичного трикутника знайти:

- 1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;
  - 2)  $\varepsilon$  (сферичний надлишок),  $p$  (півпериметр),  $r_m$  та  $R_m$  (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл);
  - 3) площу  $F$  трикутника в км<sup>2</sup>, якщо  $R = 6370$  км.
- Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано три сторони:

Вари- ант	$a$	$b$	$c$	Вари- ант	$a$	$b$	$c$
1	34°12'48"	42°55'12"	51°02'30"	11	109°14'32"	65°46'04"	80°38'18"
2	59°46'20"	83°17'38"	96°04'22"	12	129°16'54"	45°09'46"	112°58'04"
3	82°11'17"	64°19'21"	31°31'30"	13	39°01'40"	77°18'34"	69°32'35"
4	69°34'26"	57°49'22"	114°16'14"	14	60°31'41"	117°28'18"	78°42'26"
5	60°31'42"	117°28'19"	78°42'23"	15	142°47'00"	118°48'00"	83°17'00"
6	171°18'12"	54°07'16"	133°09'24"	16	51°12'26"	75°03'10"	45°55'52"
7	42°18'00"	17°12'00"	58°30'00"	17	42°55'12"	34°12'48"	51°02'30"

8	79°33'20"	65°28'20"	37°51'40"	18	64°19'12"	82°11'17"	31°31'30"
9	30°04'56"	27°32'22"	32°15'48"	19	117°27'59"	60°32'00"	78°42'23"
10	69°30'36"	62°20'54"	39°46'43"	20	65°28'20"	37°51'40"	79°33'20"

б) Дано три кути:

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1	62°05'40"	54°36'10"	70°14'30"	11	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"
2	90°40'16"	71°00'36"	43°04'39"	12	112°56'18"	70°56'10"	57°54'54"
3	116°08'04"	60°07'25"	69°45'17"	13	118°19'56"	31°16'39"	48°37'53"
4	123°15'06"	50°00'20"	84°07'18"	14	32°56'31"	128°13'15"	56°40'54"
5	40°00'48"	95°02'16"	73°04'34"	15	36°28'26"	111°50'54"	52°14'16"
6	47°59'12"	130°46'58"	56°48'52"	16	106°59'00"	56°55'00"	100°40'00"
7	148°14'00"	130°18'00"	120°12'00"	17	121°15'13"	81°36'20"	34°15'36"
8	49°54'13"	108°30'47"	44°50'42"	18	64°40'30"	22°48'09"	106°43'40"
9	83°42'39"	54°16'13"	55°05'54"	19	120°26'21"	39°04'28"	57°46'10"
10	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"	20	74°32'10"	49°10'18"	61°09'50"

в) Дано дві сторони та кут між ними:

Варіант	a	b	C	Варіант	a	b	C
1	48°12'36"	37°30'42"	55°05'54"	11	40°28'36"	110°18'32"	56°40'54"
2	104°23'15"	67°04'28"	36°17'49"	12	38°15'06"	75°10'08"	52°14'16"
3	105°40'00"	62°21'14"	70°56'10"	13	118°31'00"	50°20'00"	100°40'00"
4	35°00'28"	56°01'25"	118°19'26"	14	50°10'30"	40°00'10"	121°36'20"
5	30°04'56"	27°32'22"	70°14'04"	15	45°09'46"	112°58'04"	123°15'06"
6	62°20'54"	39°46'43"	90°40'16"	16	39°01'40"	77°18'34"	73°04'34"
7	69°30'36"	62°20'54"	43°04'39"	17	69°32'35"	39°01'40"	95°02'16"
8	109°14'32"	65°46'04"	69°45'17"	18	60°31'41"	117°28'18"	56°48'52"
9	65°46'04"	80°38'18"	116°08'04"	19	78°42'26"	60°31'41"	130°46'58"
10	129°16'54"	45°09'46"	84°07'18"	20	118°48'00"	83°17'00"	148°14'00"

г) Дано сторону та прилеглі до неї кути:

Варіант	a	B	C	Варіант	a	B	C
1	64°02'41"	22°48'09"	106°43'40"	11	55°25'20"	36°28'26"	111°50'54"
2	100°00'00"	39°04'28"	57°46'10"	12	85°57'50"	32°56'31"	128°13'15"



3	22°04'47"	74°32'10"	61°09'50"	13	76°34'55"	31°16'39"	48°37'53"
4	118°50'00"	49°18'00"	61°40'00"	14	81°10'58"	112°56'18"	57°54'54"
5	34°29'34"	59°32'16"	77°18'20"	15	51°31'20"	132°54'22"	44°08'36"
6	68°12'58"	56°52'23"	76°00'32"	16	37°58'00"	83°42'39"	54°16'13"
7	68°50'00"	114°35'00"	30°19'00"	17	30°04'56"	54°36'10"	70°14'30"
8	66°32'00"	111°32'00"	75°51'00"	18	62°20'54"	90°40'16"	43°20'39"
9	76°56'00"	42°15'13"	34°15'36"	19	39°46'43"	90°40'16"	71°00'13"
10	115°28'00"	106°59'00"	56°55'00"	20	45°09'46"	123°15'06"	84°07'18"

д) Дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них:

Варіант	$a$	$b$	$A$	Варіант	$a$	$b$	$A$
1	47°04'46"	36°39'51"	56°16'50"	11	28°36'22"	20°04'47"	49°10'18"
2	54°33'51"	97°12'25"	51°18'13"	12	28°36'22"	25°47'46"	74°32'10"
3	63°22'30"	81°14'20"	54°39'10"	13	58°54'43"	83°51'23"	49°18'00"
4	112°40'26"	58°27'42"	98°22'40"	14	36°52'33"	42°46'04"	59°32'16"
5	82°33'51"	27°16'09"	26°31'57"	15	52°05'54"	66°06'04"	56°52'23"
6	57°41'13"	76°34'42"	40°23'28"	16	85°03'00"	33°34'00"	114°35'00"
7	66°02'00"	108°49'00"	64°28'00"	17	107°16'00"	84°30'00"	111°32'00"
8	113°03'00"	82°39'00"	116°20'00"	18	72°17'58"	22°40'34"	106°43'40"
9	22°40'34"	72°17'58"	22°48'09"	19	100°00'00"	75°04'07"	120°26'21"
10	46°31'13"	75°04'07"	39°03'13"	20	22°04'47"	25°47'46"	49°10'18"

е) Дано сторону та два кути, один з яких лежить проти даної сторони:

Варіант	$a$	$A$	$B$	Варіант	$a$	$A$	$B$
1	54°12'28"	66°10'42"	41°00'24"	11	113°15'13"	72°40'32"	60°57'47"
2	124°10'48"	96°48'12"	46°07'06"	12	66°44'47"	72°40'32"	155°24'40"
3	52°35'25"	54°42'20"	81°26'35"	13	103°27'00"	73°13'22"	143°30'11"
4	26°50'14"	39°37'09"	69°25'27"	14	76°33'00"	73°13'22"	100°23'23"
5	61°05'12"	59°30'40"	73°13'22"	15	92°55'30"	100°23'23"	59°30'40"
6	57°17'28"	60°57'33"	72°40'32"	16	155°47'40"	144°36'36"	69°25'27"
7	51°24'00"	50°32'00"	109°51'00"	17	138°29'08"	69°25'27"	39°37'09"
8	44°55'05"	100°02'04"	152°03'10"	18	44°21'16"	81°02'25"	69°25'27"
9	160°21'47"	152°03'10"	169°21'35"	19	105°46'00"	81°26'35"	54°42'20"
10	122°24'00"	109°51'00"	103°25'00"	20	74°57'51"	82°54'46"	81°26'35"

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Асташова И. В. Геометрия и топология [Электронный ресурс] / И. В. Асташова, В. А. Никишкин. – М. : Евразийский открытый институт, 2011. – 258 с. – Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90953>
2. Бобенко А. И. Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура / А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис. – М. – Ижевск : НИЦ «РХД», 2010. – 488 с.
3. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія / О. А. Борисенко. – Харків : Основа, 1995. – 304 с.
4. Бурова Н. А. Дифференциальная геометрия [Электронный ресурс] / Н. А. Бурова, Ю. Н. Ковшова, Л. В. Лапина. – Новосибирск : НГПУ, 2013. – 132 с. – Режим доступа : <https://icdlib.nspu.ru/catalog/details/icdlib/644444/>
5. Волынский Б. А. Сферическая тригонометрия / Б. А. Волынский. – М. : Наука, 1977. – 135 с.
6. Геометрія на сфері [Електронний ресурс] – Режим доступу : <http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/>
7. Городецкий В. В. Диференціальна геометрія в теоремах і задачах / В. В. Городецкий, О. В. Мартинюк. – Чернівці : Книги – ХХІ, 2009. – 395 с.
8. Григорчук Г. В. Спецрозділи вищої математики: Конспект лекцій у двох частинах / Г. В. Григорчук, Л. І. Григорчук. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2009. – Частина 1. Сферична тригонометрія. – 82 с.
9. Григорчук Г. В. Спецрозділи вищої математики : Конспект лекцій у двох частинах / Г. В. Григорчук, Л. І. Григорчук. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2009. – Частина 2. Диференціальна геометрія. – 55 с.
10. Данилевський М. П. Основи сферичної геометрії та тригонометрії / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 92 с.
11. Кашкаха В. Е. Сферическая тригонометрия и вычислительные методы в маркшейдерском деле / В. Е., Кашкаха, В. В. Откидач. – Донецк : ДонГУ, 1984. – 112 с.
12. Кранц П. Сферическая тригонометрия. – М. : URSS. ЛКИ, 2007. – 93 с.

13. Кованцов М. И. Дифференциальная геометрия / М. И. Кованцов. – Киев : Вища школа, 1973. – 312 с.

14. Кованцов Н. И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ : сборник задач / Н. И. Кованцов, Г. М. Зражевская, В. Г. Кочаровский, В. И. Михайловский. – Киев : Вища школа, 1989. – 384 с.

15. Львова Л. В. Дифференциальная геометрия [Электронный ресурс] / Л. В. Львова ; науч. ред. К. О. Кизбикенов ; Алтайская гос. пед. академия. – Барнаул, 2011. – 107 с. – Режим доступа : <http://icdlib.nspu.ru/catalog/details/icdlib/645021/>

16. До Кармо Манфредо П. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей / Манфредо П. до Кармо. – М. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. – 608 с.

17. Марченко В. О. Дифференциальная геометрия и топология / В. О. Марченко, М. П. Красницкий. – Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2010. – 100 с.

18. Матвиевская Г. П. Становление плоской и сферической тригонометрии. Из истории математических идей / Г. П. Матвиевская. – М. : Знание, 1982. – 64 с.

19. Мищенко А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. – М. : Физматлит, 2004. – 412 с.

20. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.

21. Навігаційні електронні таблиці: навігаційні трикутники [Електронний ресурс] – Режим доступу : [http://www.navigation-spreadsheets.com/navigation\\_triangles.html](http://www.navigation-spreadsheets.com/navigation_triangles.html)

22. Пандул И. С. Сферическая тригонометрия и сферическая астрономия применительно к решению инженерно-геодезических задач / И. С. Пандул. – Ленинград : ЛГИ, 1982. – 99 с.

23. Паньженский В. И. Введение в дифференциальную геометрию / В. И. Паньженский. – СПб : Лань, 2015. – 240 с.

24. Применение векторного исчисления в задачах сферической геометрии [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://engbul.bmstu.ru/doc/746407.html>

25. Програмне забезпечення для геометричних побудов на сфері [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://sourceforge.net/projects/sphaerica/>

26. Рашевська Н. В. Вища математика. Диференціальна геометрія. Сферична тригонометрія / Н. В. Рашевська, М. О. Рашевський. – Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирсеєвського, 2014. – 131 с.

27. Селькин М. В. Дифференциальная геометрия : курс лекций / М. В. Селькин, В. М. Селькин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 127 с.

28. Селькин М. В. Дифференциальная геометрия : практ. пособие / М. В. Селькин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2006.–107 с.

29. Сизый С. В. Лекции по дифференциальной геометрии / С. В. Сизый. – М. : Физматлит, 2007. – 376 с.

30. Староверов В. С. Вища геодезія. Системи координат. Системи висот / В. С. Староверов, М. В. Ковальов. – Київ : ЦП «Компринт», 2015. – 193 с.

31. Стеблянко П. О. Основи диференціальної геометрії (застосування сучасних комп'ютерних технологій, зокрема системи MatLab) / П. О. Стеблянко, О. М. Коломієць. – Черкаси : ВВ ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2011. – 203 с.

32. Стеганцева П. Г. Диференціальна геометрія / П. Г. Стеганцева, І. Г. Величко. – Запоріжжя : ЗНУ, 2014. – 143 с.

33. Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии / И. А. Тайманов. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002, – 176 с.

34. Тарасенкова Н. А. Вступ до сферичної геометрії / Н. А. Тарасенкова, Є. В. Петрова. – Черкаси : ЧНУ, 2008. – 80 с.

35. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М. : Ленанд, 2015. – 208 с.

36. Франовський А. Ц. Диференціальна геометрія : практикум з розв'язування задач / А. Ц. Франовський. – Житомир : Поліграфічний центр ЖДПУ, 2001. – 64 с.

37. Шаров Г. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Г. С. Шаров, А. М. Шелехов, М. А. Шестакова. – М. : МЦНМО, 2005. – 112 с. – Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63244>

*Навчальне видання*

**КОЛОСОВ** Анатолій Іванович,  
**ЯКУНІН** Анатолій Вікторович

# **ТЕОРІЯ КРИВИХ І ПОВЕРХОНЬ ДЛЯ ГЕОІНФОРМАТИКІВ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 03.08.2018. Формат 60 × 84 1/16

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 10,0

Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства ім. О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.