МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ та МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Частина 2. Випадкові величини

ЛЕКЦІЇ і ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 143 «Атомна енергетика»,
спеціалізацією «Атомні електричні станції»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 519.2(075,8)

Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 2. Випадкові величини: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 143 «Атомна енергетика», спеціалізації «Атомні електричні станції» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,21 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 77 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №8 від -24.06.2021 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол №5 від 26.05.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ та МАТЕМАТИЧНАСТАТИСТИКА

Частина 2. Випадкові величини

ЛЕКЦІЇ і ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Веригіна Інга Вячеславівна, старший викладач*
Островська Ольга Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний редактор *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, професор*

Рецензент: *Калюжний Олександр Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник (Інститут математики НАН України)*

У навчальному посібнику теоретичний матеріал подається у формі лекцій і супроводжується прикладами типових задач. Наприкінці кожної лекції наведено перелік основних запитань для самоконтролю знань і достатню кількість завдань для проведення практичних занять. Розміщено завдання для підсумкового контролю.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

ЗМІСТ

Передмова

У природі немає жодного процесу, в якому б не був присутній елемент випадковості. Випадкові відхилення супроводжують будь-яке закономірне явище. Теорія ймовірностей як наука виникла на основі спостереження, що поведінку великої кількості однорідних випадкових подій можна описати за допомогою детермінованих закономірностей. Сьогодні практично немає жодної галузі науки, в якій не застосовуються ймовірнісні методи: фізика, економіка, радіотехніка, біологія, медицина, фізіологія, кібернетика, соціологія, психологія, філологія, лінгвістика та ін.

У процесі здобуття вищої освіти математико-статистичні дисципліни традиційно вважаються найбільш складними для студентів. Цей навчальний посібник ставить за мету допомогти зрозуміти прикладний та практичний зміст проблем, які розв'язуються методами теорії ймовірностей та математичної статистики тим, хто вивчає ці курси як на стаціонарі, так і заочно.

Матеріал даного посібника подано у вигляді п'яти лекцій та п'яти відповідних практичних занять, у яких доступно та детально викладено теоретичні положення з доведенням основних теорем та формул, наведено багато прикладів, представлено велику кількість розв'язаних задач і задач для самостійного виконання. Розв'язані задачі дають можливість зрозуміти універсальність ймовірнісно-статистичного аналізу як інструменту розв'язання проблем, пов'язаних з ризиками та невизначеністю. Розроблено варіанти завдань для підсумкового контролю у вигляді контрольних робіт.

Навчальний посібник є результатом узагальнення багаторічного досвіду авторів при викладанні даної дисципліни у вищих начальних закладах . Тематика запропонованого матеріалу відповідає навчальній програмі курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика", розділ "Випадкові величини", для студентів тепло-енергетичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, спеціальність 143 "Атомна енергетика". Навчальний посібник рекомендовано для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ЛЕКЦІЯ №6
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

6.1. Поняття випадкової величини (ВВ). Дискретні та неперервні випадкові величини

Випадковою величиною (ВВ) називається величина, яка в результаті експерименту набуває різних значень.

Наведемо приклади.

Приклад 6.1. Експеримент *E* – три рази стріляють по мішені. Розглянемо випадкову величину ξ – кількість влучень при трьох пострілах. У результаті експерименту випадкова величина ξ може набути одного із значень: 0, 1, 2, 3.

Приклад 6.2. Експеримент *E* – перевірка 100 приладів, випадкова величина ξ – кількість працюючих приладів. Можливі значення ξ: 0, 1, ..., 100.

Приклад 6.3. Експеримент *E* – стріляють по мішені до першого влучення, випадкова величина ξ – кількість пострілів. Множина значень випадкової величини ξ: 1, 2, 3, … .

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається випадкова величина, яка набуває скінченної або зліченної кількості ізольованих числових значень з певними ймовірностями.

Якщо кількість таких значень є скінченною – дискретна випадкова величина називається ***скінченною.***

Якщо кількість таких значень є нескінченною, але зліченною – дискретна випадкова величина є ***нескінченною.***

У прикладах 6.1, 6.2 наведено приклади скінченних дискретних випадкових величин. У прикдаді 6.3 розглянуто нескінченну дискретну випадкову величину.

Розглянемо ще декілька прикладів випадкових величин.

Приклад 6.4. Експеримент *E* – постріл у кругову мішень радіуса R. Нехай ξ – абсциса точки влучення, значення $\xi \in [-R; R]$.

Приклад 6.5. Експеримент *E* – при селекційному відборі досліджують вагу зерен пшениці. Нехай ξ – вага кожної зернини, $\xi \in [0; m]$ (де *m* – максимальне значення ваги зернини пшениці).

Приклад 6.6. Експеримент *E* – досліджують тривалість часу роботи приладу. Нехай ξ – час безвідмовної роботи приладу, $\xi \in [0; +\infty)$.

Наведені у прикладах 6.4 – 6.6 випадкові величини набувають значень, які щільно заповнюють деякий проміжок числової прямої. Такі випадкові величини називають неперервними.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називається випадкова величина, яка може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу або декількох інтервалів.

Зауваження. Випадкові величини та випадкові події тісно між собою пов'язані. Випадкова величина – інший спосіб вивчення випадкових подій. Наведемо приклади.

1) Розглянемо експеримент E – виконано 3 постріли по мішені.

Порівняємо:

Мовою випадкових подій	*Мовою випадкових величин*
Події: A_0 – "не було жодного влучення"; A_1 – "було 1 влучення"; A_2 – "було 2 влучення"; A_3 – "було 3 влучення".	Випадкова величина ξ – кількість влучень. Множина значень ξ: 0,1,2,3.
Вивчаємо ймовірності $P(A_i)$.	Ймовірності $P\{\xi = i\} = p_i$, $i = 0,1,2,3.$

При цьому $P\{\xi = i\} = P(A_i),\ i = 0,1,2,3.$

2) Нехай подія $A \subset \mathbf{\Omega}$, $P(A)$ – ймовірність події A.

Розглянемо випадкову величину χ_A, що набуває значень: $\chi_A = 1$, якщо подія A відбудеться, та $\chi_A = 0$, якщо подія A не відбудеться. Тоді $P\{\chi_A = 1\} = P(A)$; $P\{\chi_A = 0\} = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Така випадкова величина називається *характеристичною випадковою величиною події А.* Отже, можна вивчати випадкову подію A за допомогою випадкової величини χ_A.

6.2. Дискретні випадкові величини (ДВВ). Закон розподілу ДВВ

Нехай ξ – ДВВ, що набуває окремих значень $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо відомі ймовірності: $P\{\xi = x_1\} = p_1$, $P\{\xi = x_2\} = p_2, ...,$ $P\{\xi = x_n\} = p_n$, вважаємо, що ДВВ є заданою.

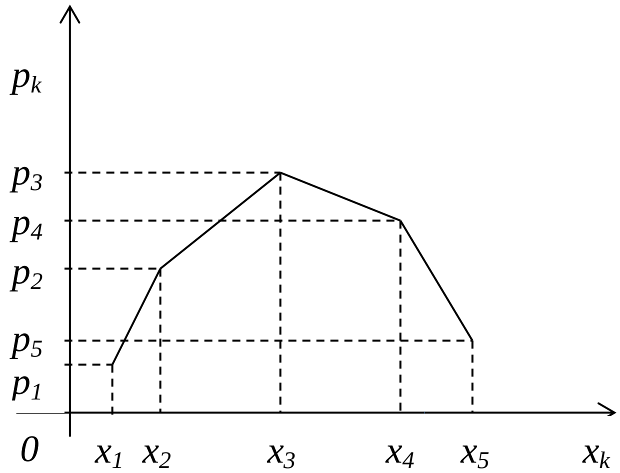
Набір значень $x_1, x_2, ..., x_n$ та ймовірностей $p_1, p_2, ..., p_n$ (де $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ – *умова нормування*) називають ***законом розподілу*** ДВВ ξ.

Цей закон розподілу може бути поданий у вигляді таблиці, яку називаємо ***рядом розподілу:***

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Зауваження. Якщо множина можливих числових значень ξ є нескінченною (але зліченною), то сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ дорівнює одиниці (*умова нормування*).

Закон розподілу, поданий у графічному вигляді, називається *многокутником розподілу*:



Тобто, *многокутник розподілу* це є ламана лінія, яка з'єднує точки з координатами (x_k, p_k), $k = 1, 2, ...$ у порядку зростання індексів.

6.3. Функція розподілу випадкової величини

Одним із важливих понять, що дозволяє описати поведінку випадкової величини, є функція розподілу випадкової величини .

Функцією розподілу випадкової величини ξ називається ймовірність того, що випадкова величина ξ потрапляє в інтервал $(-\infty; x)$:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}. \tag{6.1}$$

Задати функцію розподілу означає задати випадкову величину. Такий спосіб задання застосовується як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини.

6.3.1. Властивості функції розподілу

1

1^0 *Функція розподілу* $F_\xi(x)$ *набуває значень від 0 до 1.*

Дійсно, оскільки ймовірність $P\{\xi < x\} \in [0,1]$, то для всіх $x \in R$ значення функції розподілу $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

2^0 *Функція розподілу* $F_\xi(x)$ *є неспадною на* R.

Доведення: Нехай $x_1 < x_2$, розглянемо події $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{\xi < x_2\}$.

$A \subset B$ (з події *A* випливає подія *B*), тоді за властивістю ймовірності $P(A) \le P(B)$. Отже, $P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\}$, звідки $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.

3^0 *Якщо* $x \to +\infty$*, то значення функції розподілу* $F_\xi(x)$ *прямують до 1.*

Дійсно, нехай $x \to +\infty$, тоді

$$F_\xi(+\infty) = P\left\{\xi < +\infty\right\} = \left|\text{достовірна подія}\right| = 1$$

4^0 *Якщо* $x \to -\infty$*, то значення функції розподілу* $F_\xi(x)$ *прямують до 0.*

Дійсно, нехай $x \to -\infty$, тоді

$$F_\xi(-\infty) = P\left\{\xi < -\infty\right\} = \left|\text{неможлива подія}\right| = 0.$$

5^0 *Для ДВВ* $F_\xi(x)$ *– неперервна зліва, для НВВ* $F_\xi(x)$ *– є неперервною на* $(-\infty;+\infty)$.

6.3.2. Ймовірність потрапляння ВВ у півінтервал

Розглянемо наступні події:

$A = \{\alpha \le \xi < \beta\}$, $B = \{\xi < \alpha\}$, $C = \{\xi < \beta\}$, де $\alpha, \beta = const \in R$.

Події *A, B* – несумісні , подія *C* є сумою подій *A* і *B*: *C*=*A*+*B*. Тоді

$$P(C) = P(A) + P(B).$$

Звідки

$$P(A) = P(C) - P(B) = P\left\{\xi < \beta\right\} - P\left\{\xi < \alpha\right\} = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$$

Тоді,

$$P\left\{\alpha \le \xi < \beta\right\} = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha). \tag{6.2}$$

Отже, ймовірність потрапляння випадкової величини у деякий напівінтервал може бути подано через функцію розподілу. Тому, якщо задано функцію розподілу ВВ, то ВВ вважається заданою.

6.3.3. Побудова функції розподілу для ДВВ

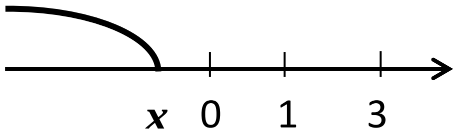
Приклад 6.7. Нехай задано ДВВ з таким рядом розподілу:

x_k	0	1	3
p_k	0,2	0,5	0,3

Побудувати функцію розподілу.

Розв'язання.

1) Нехай $x \le 0$.

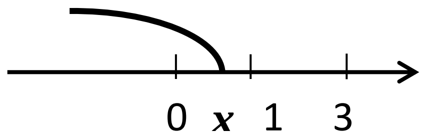


Оскільки випадкова величина не набуває від'ємних значень, потрапляння її в інтервал $(-\infty; x)$ є неможливою подією:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0.$$

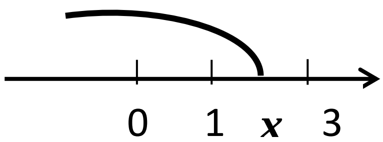
Для $x = 0$ розглянемо окремо: подія $\{\xi < 0\}$ є неможливою, отже, також при $x = 0$, $F_\xi(0) = P(\xi < 0) = 0$. Остаточно, якщо $x \in (-\infty; 0] \Rightarrow F_\xi(x) = 0.$

2) Нехай $x \in (0;1]$. При такому значенні x подія $\{\xi \in (-\infty; x)\}$ рівносильна події $\{\xi = 0\}$.



$$P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0,2.$$

3) Нехай $x \in (1;3]$.

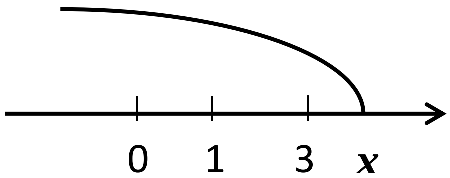


$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0 \text{ або } \xi = 1\} = \left| \begin{matrix} \textit{Події} \\ \textit{несумісні} \end{matrix} \right| = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} =$$

$$= 0,2 + 0,5 = 0,7$$

4) Нехай $x \in (3; +\infty)$.

Всі можливі значення випадкової величини потрапляють у цей проміжок.

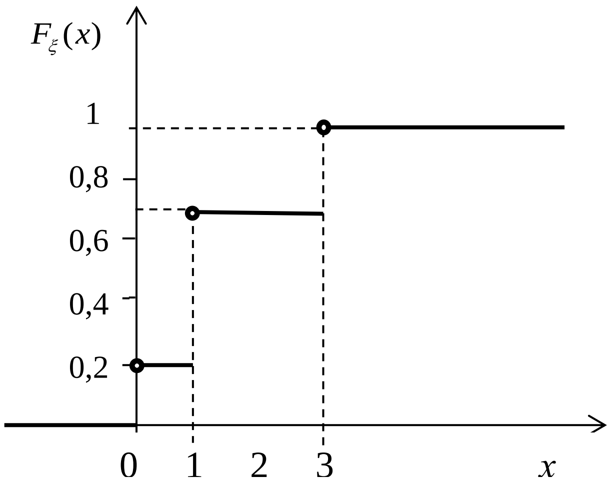


Отже, $P\{\xi < x\} = 1.$

Остаточно, функція розподілу заданої дискретної випадкової величини має вигляд:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0; & \text{якщо} \quad x\le 0\\ 0,2; & \text{якщо}\ 0<x\le 1\\ 0,7; & \text{якщо}\ 1<x\le 3\\ 1; & \text{якщо} \quad x>3\end{cases}$$

Графік функції розподілу:



Перевіримо виконання властивостей функції розподілу. Дійсно,

1) $0\le F_{\xi}(x)\le 1$
2) $F_{\xi}(x)$ - неспадна (зростає стрибками на величину p_i)
3) $F_{\xi}(+\infty)=1$
4) $F_{\xi}(-\infty)=0$
5) $F_{\xi}(x)$ - неперервна зліва.

Зауваження. Для ДВВ функція розподілу $F_{\xi}(x)$ є розривно-східчастою функцією, що має розриви I-го роду у точках $x=x_k$, з величиною стрибка, що дорівнює p_k.

Отже, якщо задано функцію розподілу вказаного типу, то за нею можна відновити ряд розподілу дискретної віпадкової величини.

6.4. Приклади стандартних розподілів дискретних випадкових величин

6.4.1. Рівномірний розподіл ДВВ

Дискретна випадкова величина має р*івномірний розподіл*, якщо вона набуває *n* різних значень з однаковими ймовірностями. Множина значень

$\xi: x_1, x_2, ..., x_n$, відповідні ймовірності: $P\{\xi = x_1\} = P\{\xi = x_2\} = ... = P\{\xi = x_n\} = \frac{1}{n}$.

Ряд розподілу:

x_k	x_1	x_2	...	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

6.4.2. Біноміальний закон розподілу

Дискретна випадкова величина, що має *біноміальний розподіл*, пов'язана зі схемою Бернуллі (див. [13], лекція №5). Нехай відбувається серія n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A («успіх») відбувається з імовірністю p та не відбувається з імовірністю $q = 1 - p$. Розглянемо випадкову величину ξ – кількість «успіхів» у схемі Бернуллі. Величина ξ має ***біноміальний розподіл (біноміально розподілена випадкова величина).*** Або іншими словами, це величина, яка набуває значень з множини $\{0, 1, ..., n\}$ з відповідними ймовірностями:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,...,n. \quad (6.3)$$

Приклад 6.8. Стрілець виконує три постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі p = 0,4. Випадкова величина ξ – кількість влучень. Побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Випадкова величина ξ може набувати значень: 0, 1, 2, 3. Позначимо $q = 1 - p = 0,6$ та за допомогою формули Бернуллі, знайдемо ймовірності, з якими випадкова величина набуває відповідних значень.

$P\{\xi = 0\} = q^3 = 0,6^3 = 0,216$;

$P\{\xi = 1\} = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432$;

$P\{\xi = 2\} = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288$;

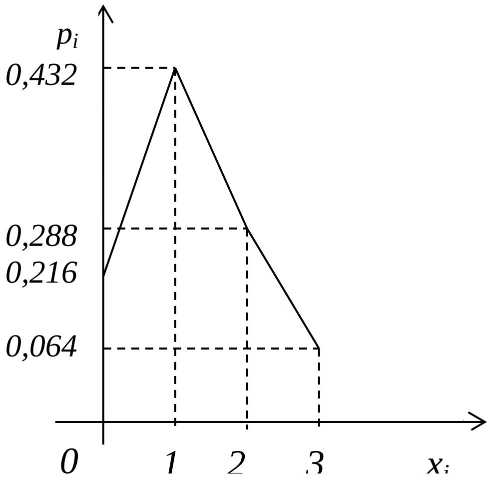
$P\{\xi = 3\} = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = 0,064$.

Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл. Подамо закон розподілу ДВВ у вигляді ряду розподілу:

x_k	0	1	2	3
p_k	0,216	0,432	0,288	0,064

$$\sum_{k=0}^{3} p_k = 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$$ – умова нормування виконується.

Побудуємо многокутник розподілу:



6.4.3. Розподіл Пуассона

Випадкова величина ξ розподілена за ***законом Пуассона***, якщо вона набуває цілих значень $\xi \in \overline{1,\infty}$ з ймовірностями

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{6.4}$$

де λ – параметр розподілу.

Перевіримо умову нормування:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Розподіл Пуассона часто використовують як апроксимацію біноміального розподілу при великих n. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n велика ($n>30$), а ймовірність появи події p у кожному випробуванні дуже мала ($p<0,1$), то замість формули Бернуллі використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

де параметр $\lambda = np$ (середня кількість появи події в n випробуваннях).

Приклад 6.9. Магазин отримав 5000 пляшок мінеральної води.

Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою дорівнює 0,0002. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, що визначає кількість розбитих пляшок та ймовірність того, що при транспортуванні виявиться три розбитих пляшки. $C_n^k p^k q^{n-k}$

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ кількість розбитих пляшок має розподіл Пуассона, оскільки $n = 5000$ (достатньо велике), а $p = 0,0002$ (достатньо мале). Тоді $\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$, і закон розподілу кількості розбитих пляшок при транспортуванні має вигляд $P\{\xi = k\} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}$, $k = 0,1,2,3,\ldots$, або

x_i	0	1	2	3	4	$\ldots$	k	$\ldots$
p_i	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2!e}$	$\frac{1}{3!e}$	$\frac{1}{4!e}$	$\ldots$	$P\{\xi = k\} = \frac{e^{-1}}{k!}\cdot$	$\ldots$

Ймовірність того, що розбитих пляшок виявиться рівно три $P\{\xi = 3\} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$

6.4.4. Геометричний закон розподілу

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A («успіх») може відбутися з імовірністю $p\ (0 < p < 1)$, і не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$. Нехай випробування відбуваються до першої появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явиться у k-му випробуванні, то у попередніх $(k-1)$ випробуваннях її не було. Випадкова величина ξ – це кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, отже, ξ: $1,2,3,...,k,\ldots$ Імовірність можна знайти за формулою множення незалежних подій:

$$P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p. \tag{6.5}$$

Такий закон розподілу ДВВ ξ називають ***геометричним.***

Перевіримо умову нормування: $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

Приклад 6.10. Стрілець виконує постріли по мішені до першого влучення, ймовірність влучення при одному пострілі *p*. Випадкова величина ξ – кількість пострілів. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ.

Розв’язання. Випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу, та набуває значень : 1, 2, 3 …, *n*, … .

Відповідні ймовірності: $P\{\xi=1\}=p$; $P\{\xi=2\}=p\cdot q$;

$P\{\xi=3\}=p\cdot q^2$; $P\{\xi=4\}=p\cdot q^3$; …… $P\{\xi=n\}=p\cdot q^{n-1}\ldots$

Ряд розподілу:

x_k	1	2	3	4	…	n	…
p_k	p	$p\cdot q$	$p\cdot q^2$	$p\cdot q^3$	…	$p\cdot q^{n-1}$	…

Запитання для самоконтролю

1. Що називається випадковою величиною? Наведіть приклади дискретних та неперервних випадкових величин.

2. Що називають законом розподілу дискретної випадкової величини? Що таке ряд розподілу ДВВ?

3. Дайте означення функції розподілу випадкової величини.

4. Вкажіть властивості функції розподілу.

5. Як за допомогою функції розподілу задати ймовірність потрапляння випадкової величини у напівінтервал?

6. Що таке рівномірний розподіл ДВВ?

7. Яка випадкова величина має біноміальний розподіл?

8. Яка випадкова величина розподілена за законом Пуассона?

9. Наведіть приклад ДВВ, яка має геометричний розподіл.

Практичне заняття №6

Дискретні випадкові величини. Способи задання

Приклади розв'язування задач

Задача 6.1. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числа появ герба при двох підкиданнях монети, побудувати многокутник розподілу.

Розв'язання. При двох підкиданнях монети герб може з'явитись 0, 1 або 2 рази. Це будуть значення випадкової величини. Знайдемо ймовірності появи герба, користуючись формулою Бернуллі:

$$P_2(0) = C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

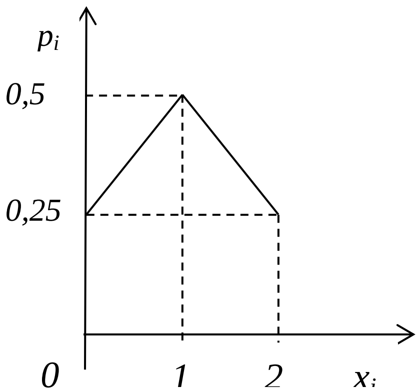
$$P_2(1) = C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P_2(2) = C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Отже, закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Побудуємо многокутник розподілу:



Задача 6.2. Дано закон розподілу випадкової величини ξ:

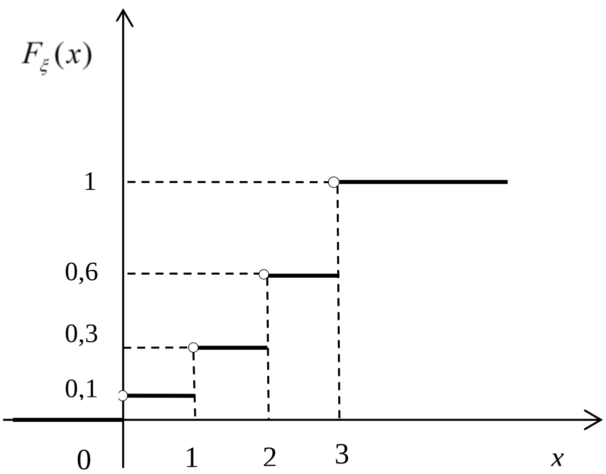
x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Записати функцію розподілу $F_{\xi}\left(x\right)$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0;\\ 0,1, & 0<x\le 1;\\ 0,3, & 1<x\le 2;\\ 0,6, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Побудуємо графік функції розподілу:



Задача 6.3. Екзаменатор задає студенту додаткове запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке запитання – 0,9. Викладач припиняє екзамен, якщо студент не знає відповіді на поставлене запитання. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – кількості додаткових запитань, які задаватиме викладач студенту та найімовірніше число k_0 поставлених додаткових запитань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ – число заданих додаткових запитань приймає такі значення: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ ...,\ x_k=k,\ ...$ Знайдемо відповідні ймовірності.

Величина ξ набуде значення $x_1=1$ (викладач задасть тільки одне запитання), якщо студент не відповість на перше запитання. Ймовірність цієї події дорівнює $P\{\xi=1\}=0{,}1.$

Величина ξ набуде можливого значення $x_2=2$ (екзаменатор поставить тільки два запитання), якщо студент відповість на перше запитання і не відповість на друге, то $P\{\xi=2\}=0{,}9\times 0{,}1=0{,}09.$

Аналогічно знайдемо:

$$P\{\xi=3\}=0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}081,\ ...,\ P\{\xi=k\}=0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1,\ ...$$

Отже, шуканий геометричний закон розподілу має вигляд:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	0,1	0,09	0,081	…	$0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1$	…

Найімовірніше число k_0 заданих запитань (найімовірніше можливе значення ξ), тобто число поставлених викладачем запитань, яке має найбільшу ймовірність, як бачимо із закону розподілу, дорівнює одиниці.

Задача 6.4. Друкарка набирає сторінку тексту із 3000 символів. При наборі тексту вона робить помилку з ймовірністю 0,002. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ, кількості помилок на сторінці тексту, та знайти ймовірність того, що їх буде більше чотирьох.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ, кількість помилок на сторінці набраного тексту, має розподіл Пуассона, оскільки $n = 3000$ (достатньо велике), а $p = 0{,}002$ (достатньо мале). Тоді $\lambda = np = 3000\cdot 0{,}002 = 6$ і закон розподілу кількості помилок на набраній сторінці тексту має вигляд $P\{\xi = k\} = \dfrac{6^k}{k!}\cdot e^{-6},\ k = 0,1,2,3,...,$ або

x_i	0	1	2	3	4	…	k	…
p_i	0,0025	0,015	0,045	0,089	0,134	…	$P\{\xi = k\} = \frac{6^k}{k!}\cdot e^{-6}$	…

Ймовірність того, що помилок буде більше чотирьох $P\{\xi > 4\} = 1 - P\{\xi \le 4\} = 1 - (0{,}0025 + 0{,}015 + 0{,}045 + 0{,}089 + 0{,}134) \approx 0{,}715.$

Завдання для самостійного виконання

1. Рівень тиску води у водопровідній мережі контролюється трьома датчиками, що працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного з них дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу кількості відмов датчиків. Знати ймовірність того, що працюватимуть всі датчики.

2. Акції підприємства планують придбати чотири інвестори. Ймовірність відмови від покупки акцій кожного з інвесторів дорівнює 0,08. Скласти закон розподілу кількості інвесторів, які можуть відмовитися від купівлі акцій.

Знайти ймовірність, що від покупки акцій відмовиться принаймні один інвестор.

3. Відділ технічного контролю заводу перевіряє продукцію на стандартність до першого виявлення браку. Ймовірність появи браку дорівнює 0,25. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – кількості перевірених одиниць продукції до першої появи браку.

4. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри два. Знайти розподіл випадкової величини ξ – кількість підкидань кубика до появи цифри два.

5. Студент вивчив 10 білетів з 30 та намагається скласти іспит. Випадкова величина ξ – кількість спроб для успішного складання. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ та знайти ймовірність того, що студента відрахують за академзаборгованість (іспит дозволяється перескладати тричі).

6. Підручник видано накладом 5000 примірників. Ймовірність того, що зброшурований підручник виявиться неякісним, дорівнює 0,002. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, що характеризує кількість неякісно зброшурованих екземплярів та ймовірність того, що бракованих примірників буде більше п’яти.

7. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Протягом однієї хвилини на АТС приходить в середньому виклик від чотирьох абонетів. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, яка дорівнює кількості викликів, які надійшли на АТС протягом 1 хв, та ймовірніть того, що за цей час надійде хоча б один виклик.

8. Менеджер подає заявку на продукцію чотири рази. Можливий результат «успіх» або «невдача». Скласти закон розподілу кількості «невдач».

9. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ.

x_i	-4	-3	-2	0	1
p_i	a	a	$5a$	a	a

Знайти a, записати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і побудувати її графік.

10. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Записати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і побудувати її графік.

Лекція №7

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ (НВВ). СПОСОБИ ЗАДАННЯ. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

В багатьох прикладних задачах виникає потреба розглядати ВВ, значення яких неперервно заповнюють деякий інтервал, або декілька інтервалів. Для дослідження таких ВВ використовують поняття неперервної випадкової величини.

7.1. Способи задання НВВ. Щільність розподілу

Поведінку випадкової величини, у тому числі і неперервної, можна описати за допомогою функції розподілу (див. Лекція №6, пп.6.3). Неперервну випадкову величину крім функції розподілу можна задати також її іншою характеристикою, яка має назву щільність розподілу. Нагадаємо, що функцією розподілу ВВ називається функція $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Нехай функція розподілу ВВ $F_\xi(x)$ є неперервною і диференційовною. Розглянемо її похідну.

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_\xi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\xi(x+\Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

Як бачимо, $f_\xi(x)$ є границею відношення ймовірності потрапляння ВВ у проміжок $[x, x+\Delta x)$ до довжини цього проміжку, коли $\Delta x \to 0$. Ця функція має назву ***щільність розподілу*** (або ***диференціальна функція розподілу***). Отже,

$$f_\xi\left(x\right) = F'_\xi(x). \tag{7.1}$$

Знаючи щільність розподілу $f_\xi(x)$ можна знайти функцію розподілу ВВ або ***інтегральну функцію*** $F_\xi(x)$:

$$F_\xi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt \tag{7.2}$$

7.2. Властивості щільності розподілу

1^o ***Функція щільності набуває тільки невід'ємних значень:***

$$f_\xi\left(x\right) \ge 0, \forall x \in R.$$

Доведення: $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$, а $F_\xi(x)$ – неспадна (за властивістю 2^0 функції розподілу (див. пп. 6.3)), звідси $F'_\xi(x) \ge 0$.

2^o Виконується ***умова нормування*** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1. \tag{7.3}$$

Доведення. Оскільки, за формулою (7.2) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$, а за властивістю 3^0 функції розподілу (див. пп. 6.3) $F_\xi(+\infty) = 1$, то $F_\xi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1$.

3^0 ***Ймовірність потрапляння випадкової величини у півінтервал*** $[\alpha;\beta)$ знаходять за формулою:

$$P\{\alpha \le \xi < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx\,. \tag{7.4}$$

Доведення.

$$P\{\alpha \le \xi < \beta\} = \left| \begin{matrix} \textit{за формулою} \\ (6.2) \end{matrix} \right| = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) =$$

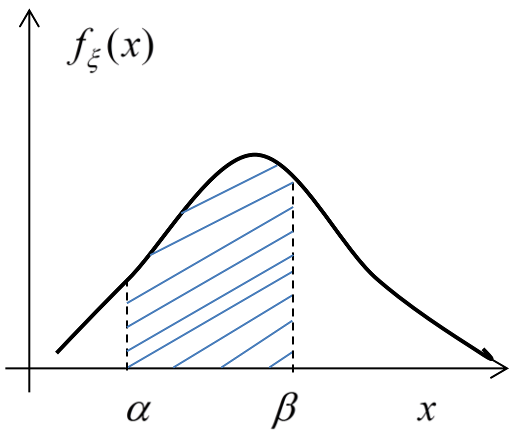
$$= \int_{-\infty}^{\beta} f_\xi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f_\xi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx.$$

Наслідки.

1. $P\{\xi = \alpha\} = P\{\alpha \le \xi < \alpha\} = \int_{\alpha}^{\alpha} f_\xi(x)\,dx = 0$.

2. $P(\alpha \le \xi < \beta) = P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \le \beta) = P(\alpha \le \xi \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx.$ (7.5)

Геометричний зміст рівностей (7.4), (7.5) полягає в тому, що ймовірність потрапляння випадкової величини у проміжок з кінцями α та β чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена функцією щільності $f_\xi(x)$, віссю *Ox* та прямими $x = \alpha$, $x = \beta$.



Крива $y = f_{\xi}(x)$ називається кривою розподілу ймовірностей або кривою розподілу. Якщо значення НВВ $\xi \in [\alpha;\beta]$, то $f_{\xi}(x) = 0$ для $x < \alpha$ або $x > \beta$.

Зауваження. Для дискретної випадкової величини набір ймовірностей $p_i = P\{\xi = x_i\}, i = 1,...,n,$ є аналогом поняття щільності розподілу для неперервної випадкової величини.

7.3. Приклади деяких стандартних стандартних розподілів НВВ

7.3.1. Рівномірний розподіл НВВ

Неперервна випадкова величина називається ***рівномірно розподіленою***, якщо її функція щільності:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a;b] \\ c, x \in [a;b] \end{cases}, \quad \text{де } c = const.$$

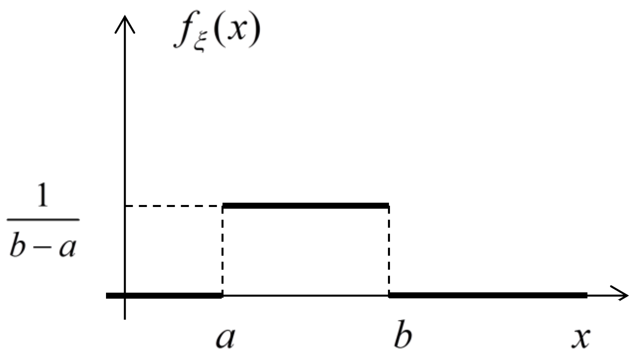
Для знаходження константи ***c*** використаємо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{a} f_{\xi}(x)\,dx + \int_{a}^{b} f_{\xi}(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f_{\xi}(x)\,dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} c\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad cx\Big|_a^b = 1 \quad \Rightarrow \quad c(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, функція щільності рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд: $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a;b] \\ \dfrac{1}{b-a}, x \in [a;b] \end{cases}$.

Графік функції щільності:



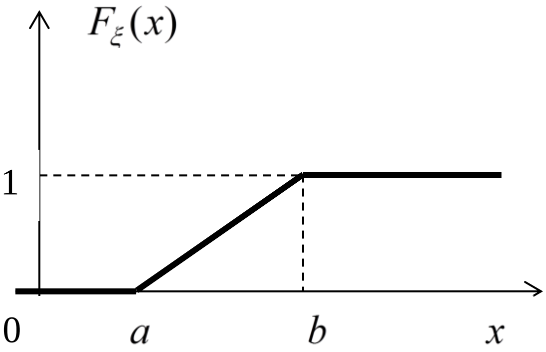
Знайдемо функцію розподілу. Якщо $x \le a$, то $F_{\xi}(x) = 0$. Якщо $x > b$, то $F_{\xi}(x) = 1$. Якщо $a < x \le b$, то:

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt=\int_{a}^{x} f_\xi(t)\,dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}.$$

Отже, функція рівномірного розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, x\in(a;b]\\ 1, x>b\end{cases}.$$

Графік функції розподілу:



Приклад 7.1. На відрізку $[a,b]$ з'являється точка, всі положення якої рівноможливі. Випадкова величина ξ – абсциса точки, є рівномірно розподіленою неперервною випадковою величиною.

7.3.2. Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина ξ є ***показниково розподіленою***, якщо її щільність розподілу задана у вигляді:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases},$$ де $\lambda>0$ – параметр розподілу.

Перевіримо, що виконується умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f_\xi(x)dx+\int_{0}^{\infty} f_\xi(x)dx=0+\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=e^0\equiv 1$$

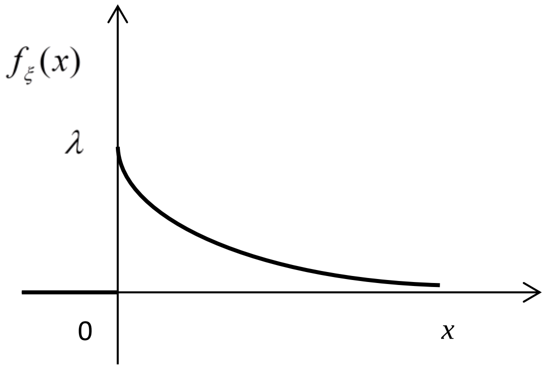
Знайдемо функцію розподілу НВВ. Якщо $x\le 0$, то $F_\xi(x)=0$. Якщо $x>0$, тоді

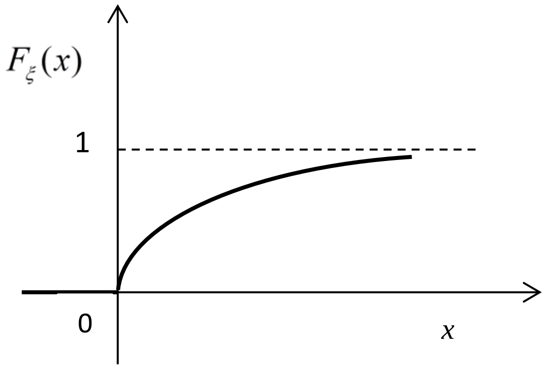
$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f_\xi(t)dt+\int_{0}^{x} f_\xi(t)dt=0+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^{x}=1-e^{-\lambda x}.$$

Отже, функція розподілу:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$$

Графіки функції щільності розподілу $f_\xi(x)$ та функції розподілу $F_\xi(x)$ мають вигляд:





Ймовірність того, що випадкова величина ξ, яка розподілена за показниковим законом, набуде значень з інтервалу (α,β), $\alpha,\beta>0$, дорівнює:

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Приклад 7.2. Неперервна ВВ ξ – час безвідмовної роботи приладу є прикладом показникові розподіленої випадкової величини. Функція надійності $R(t)=e^{-\lambda t}$, визначає ймовірність безвідмовної роботи приладу час t, параметр λ – інтенсивність відмов.

7.3.3. Нормальний розподіл

Випадкова величина ξ називається ***нормально розподіленою*** з параметрами a, σ, якщо її щільність розподілу задається формулою:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in R.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами a,σ використовують позначення $\xi = N(a;\sigma)$. Зокрема, якщо $a=0, \sigma=1$, то

$\xi^0 = N(0;1)$, такий розподіл називають стандартним. Щільність розподілу стандартної нормально розподіленої ВВ $f_{\xi^0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \varphi(x)$ є функцією Гауса. Для функції Гауса складено таблиці (див. Додаток 1).

Розглянемо загальний випадок, нехай $\xi = N(a;\sigma)$. Тоді нормована випадкова величина $\xi^0 = \frac{\xi - a}{\sigma} = N(0,1)$ має стандартний нормальний розподіл. Покажемо, що функцію щільності випадкової величини $\xi = N(a;\sigma)$ можна подати через функцію Гауса.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Також функція розподілу:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1 \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2}{2}} d\left(\frac{t-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{t-a}{\sigma} = z \\ t \to -\infty \Rightarrow z \to -\infty \\ t \to x \Rightarrow z \to \frac{x-a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\,dt = F_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, значення якої можна знайти з відповідної таблиці (див. Додаток 2).

Знайдемо ймовірність того, що ВВ $\xi = N(a;\sigma)$ потрапляє в інтервал $[\alpha;\beta)$.

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Отже,

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{7.5}$$

Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина відхиляється від положення a не більше, ніж на ε.

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Маємо,

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{7.6}$$

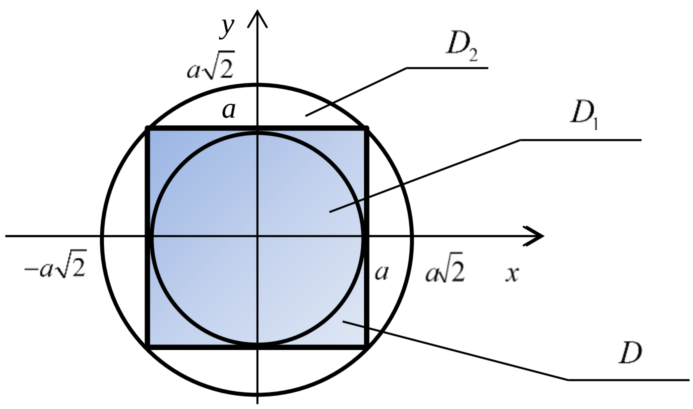
Інтеграл Пуассона *(для самостійного опрацювання)*

Довести, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Доведення. Розглянемо подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)^2,$$

де $D: \begin{cases} -a \le x \le a \\ -a \le y \le a \end{cases}$ - квадрат, $D_1 : x^2 + y^2 \le a^2$ - вписане в квадрат коло, $D_2 : x^2 + y^2 \le 2a^2$ - описане коло, $D_1 \subset D \subset D_2$.



$$\iint\limits_{D_1} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \le \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)^2 \le \iint\limits_{D_2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy .$$

Обчислимо один з інтегралів:

$$\iint\limits_{D_1} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \left| \begin{matrix} ПСК : x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int\limits_0^{a} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right) d\left(-\rho^2\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right)\right) = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

Аналогічно: $\iint\limits_{D_2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right)$.

Отже, $\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \le \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$. Перейдемо до границі. Тоді за теоремою про проміжну функцію отримаємо: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Наслідки.

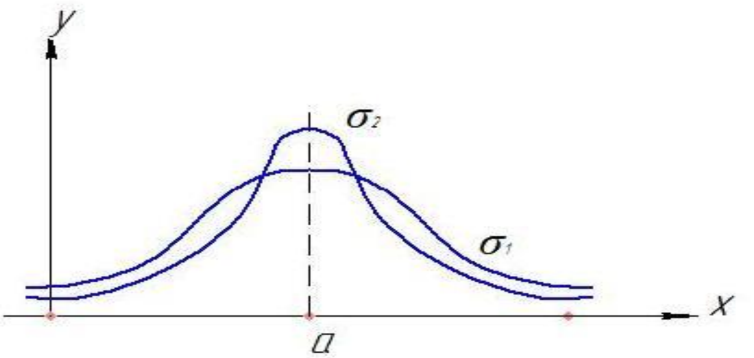
1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi}$

3. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Перевірте виконання умови нормування для $\xi = N\left(a;\sigma\right)$ самостійно.

Нехай $\xi = N\left(a,\sigma\right)$, тобто $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Графік функції щільності має вигляд (на рис. показано два графіка для різних $\sigma_2 < \sigma_1$):

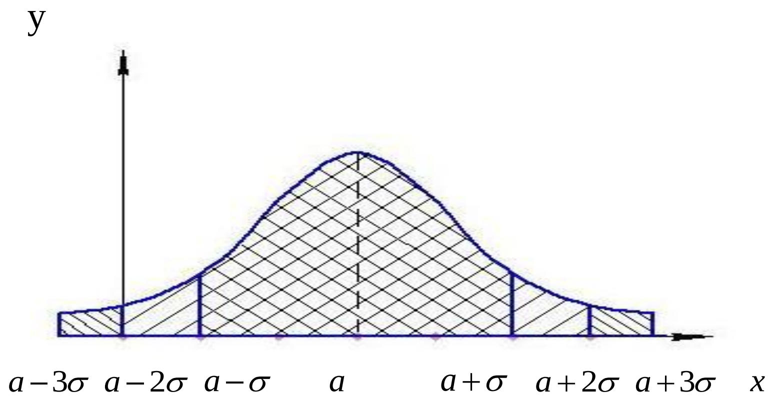


Площа під кривою графіка щільності (за умовою нормування) $S=1$.

Правило «трьох сигм»

У формулі (7.6) надамо величині ε різних значень.

Нехай $\varepsilon = \sigma$, тоді $P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 2\cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$;
якщо $\varepsilon = 2\sigma$, $P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 2\cdot 0{,}47722 = 0{,}9544$;
якщо $\varepsilon = 3\sigma$, $P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$.



«Правило трьох сигм» полягає в тому, що ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина віддалена від центрального положення a менше, ніж на 3σ, практично дорівнює 1.

Запитання для самоконтролю

1. *Які випадкові величини ми називаємо неперервними?*
2. *Наведіть два основні способи задання неперервної випадкової величини.*
3. *Назвіть властивості функції щільності.*
4. *Подайте ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал через функцію щільності.*
5. *Як, знаючи функцію розподілу, визначити функцію щільності?*
6. *Як подати функцію розподілу НВВ через функцію щільності?*
7. *Наведіть приклади стандартних неперервних розподілів та задайте їх за допомогою функції щільності.*

Практичне заняття №7

Неперервні випадкові величини. Способи задання

Приклади розв'язування задач.

Задача 7.1. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією щільності

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}}{a}, x \in (-2;7], \\ 0, \qquad x \notin (-2;7]. \end{cases}$$

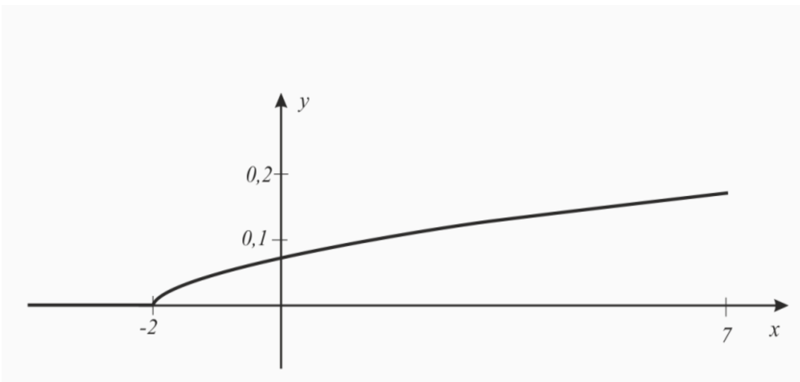
Необхідно:

1) знайти a;
2) побудувати графік щільності $y = f_\xi(x)$;
3) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;
4) знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < \xi < \beta) - ?$, $\alpha = 5$, $\beta = 6,5$.

Розв'язання. 1) Скористаємося умовою нормування функції щільності (7.3), отримаємо $\int\limits_{-2}^{7} \dfrac{\sqrt{x+2}}{a} dx = 1$. Звідси $a = 18$. Отже функція щільності має вигляд:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}}{18}, \quad x \in \left(-2;7\right], \\ 0, \qquad\quad x \notin \left(-2;7\right]. \end{cases}$$

2) Графік функції щільності



3) Для знаходження функції розподілу скористаємося (7.2).

Нехай $x \le -2$, тоді $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

якщо $-2 < x \le 7$, *то* $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{-2} 0dt + \int\limits_{-2}^{x} \frac{\sqrt{t+2}}{18}dt = \frac{1}{27}(t+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}$;

якщо $x > 7$ то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{-2} 0dt + \int\limits_{-2}^{7} \frac{\sqrt{t+2}}{18}dt + \int\limits_{7}^{x} 0dt = 1.$

Отже функція розподілу має вигляд $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$

4) Ймовірність попадання в інтервал (5; 6,5) знайдемо користуючись формулою (6.2).

$$P(5 \le \xi \le 6{,}5) = F_\xi(6{,}5) - F_\xi(5) = \frac{1}{27}\left(\sqrt{8{,}5^3} - \sqrt{7^3}\right) \approx 0{,}23.$$

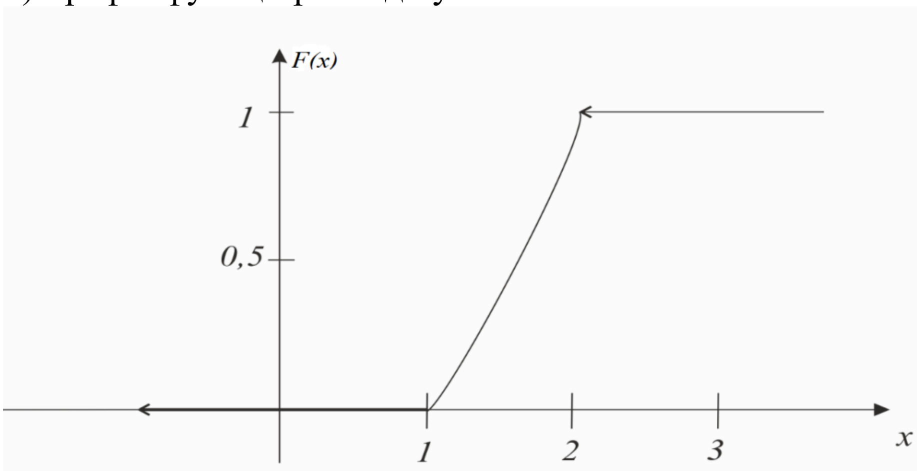
Задача 7.2. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ a(x^2 - x), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ необхідно:

1) знайти a;
2) побудувати графік функції розподілу $y = F_\xi(x)$;
3) знайти функцію щільності $f_\xi(x)$;
4) знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < \xi < \beta)$, якщо $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5$.

Розв'язання. 1) Скористаємося властивістю функції розподілу $F_\xi(b) = 1$, тобто $F_\xi(2) = 1$. Отримаємо $a = \frac{1}{2}$, і функція розподілу матиме вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

2) Графік функції розподілу



3) Функція щільності – похідна від функції розподілу. Тому

$$f_\xi(x) = F_\xi{}'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

4) Ймовірність потрапляння в інтервал (0,5; 1,5) знайдемо користуючись функцією розподілу та формулою (6.2):

$$P(0,5 \le x \le 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{1}{2}\left(2,25 - 1,5\right) = 0,375.$$

Завдання для самостійного виконання

Завдання 11-14. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F_\xi(x)$. Необхідно:

1) знайти c;

2) побудувати графік функції розподілу $y = F_\xi(x)$;

3) знайти функцію щільності $f_\xi(x)$;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < \xi < \beta)$.

11. $$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ c \cdot \sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7, \\ 1, & x > 7, \end{cases} \quad \alpha = 1, \beta = 8.$$

12. $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ c\cdot x^2, 0<x\le 1, & \\ 1, & x>1,\end{cases}$ $\alpha=-2, \beta=2.$

13. $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ c\cdot\sin 2x, 0<x\le\dfrac{\pi}{4}, & \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$ $\alpha=0, \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

14. $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ c\cdot\left(\dfrac{x}{2}+1\right), -2<x\le 2, & \\ 1, & x>2,\end{cases}$ $\alpha=-2, \beta=1.$

Завдання 15-18. Випадкова величина ξ задана функцією щільності $f_\xi(x)$. Необхідно:

1) знайти c;
2) побудувати графік щільності $y=f_\xi(x)$;
3) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;
4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha<\xi<\beta)$.

15. $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x+3}}, x\in(-3;1], & \\ 0, & x\notin(-3;1],\end{cases}$ $\alpha=-4, \beta=1.$

16. $f_\xi(x)=\begin{cases}c\cdot\cos 2x, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right], & \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right],\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{6}, \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

17. $f_\xi(x)=\begin{cases}cx^2+6x-\dfrac{45}{4}, x\in(3;5], & \\ 0, & x\notin(3;5],\end{cases}$ $\alpha=3, \beta=4{,}5.$

18. $f_\xi(x)=\begin{cases}c\cdot(x-5)(x+1), x\in(-1;5], & \\ 0, & x\notin(-1;5],\end{cases}$ $\alpha=-1, \beta=2.$

Завдання 19. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина потрапить у проміжок $(a;b)$, якщо:

а) $a = -2, b = -1$; б) $a = 2, b = 3$; в) $a = -2, b = 2$.

Завдання 20. Продукція макаронної фабрики пакується в мішки. Вага одного мішка – випадкова величина, що має нормальний розподіл з параметрами $a = 12$ кг і $\sigma = 0,14$ кг. Визначити ймовірність того, що вага чергового мішка:

а) перебуватиме в межах від 11,96 до 12,06 кг; б) не перевищуватиме 12,06 кг.

ЛЕКЦІЯ № 8
ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Інформацію про розподіл випадкової величини ми отримуємо з експерименту. За відомим розподілом можна знайти числові характеристики, які, взагалі кажучи, не визначають розподіл однозначно, але дають певне уявлення про даний розподіл. Такими числовими характеристиками є: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

8.1. Математичне сподівання випадкової величини

8.1.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Нехай задано дискретну випадкову величину (ДВВ) ξ, що набуває значень $x_1, x_2, ..., x_n$ з ймовірностями $P\{\xi = x_k\} = p_k,\ k = 1, ..., n.$

Математичним сподіванням (або ***середнім***) ДВВ ξ називається число, яке дорівнює сумі добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності. Позначається одним із символів: $M(\xi),\ M_\xi,\ m_\xi$. Тобто

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ . \tag{8.1}$$

Якщо множина можливих значень ДВВ є зліченною, то математичне сподівання можна знайти за формулою:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{8.2}$$

за умови, що такий ряд є абсолютно збіжним.

Приклад 8.1. Нехай ДВВ ξ задана рядом розподілу:

x_k	1	2	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Знайдемо математичне сподівання ДВВ за формулою (8.1):

$M(\xi) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 0,3 + 0,8 + 1,5 = 2,6$. Отримане значення є середнім значенням випадкової величини ξ.

8.1.2. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини (НВВ) ξ**,** яка задана функцією щільності $f_\xi(x)$ та набуває можливих значень з відрізку $[a,b]$, знаходять за формулою

$$M(\xi)=\int_a^b x\cdot f_\xi(x)\,dx \qquad (8.3)$$

Якщо можливі значення належать R, то

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)\,dx \qquad (8.4)$$

за умови абсолютної збіжності невласного інтеграла.

8.1.3. Властивості математичного сподівання

1^0 ***Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:***

$$M_\xi=c.$$

Дійсно (на прикладі ДВВ): $M_\xi=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=\sum_{k=1}^{n}c\cdot p_k=c\sum_{k=1}^{n}p_k=c\cdot 1=c$.

2^0 ***Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:***

$$M(c\xi)=cM_\xi.$$

Доведення: $M(c\cdot\xi)=\sum_k (c\cdot x_k)\cdot p_k=c\sum_k x_k\cdot p_k=c\cdot M_\xi$.

3^0 ***Математичне сподівання суми двох ДВВ дорівнює сумі математичних сподівань доданків:***

$$M(\xi+\eta)=M_\xi+M_\eta.$$

Наслідки.

1. Математичне сподівання суми сталої величини c і ДВВ ξ дорівнює сумі математичного сподівання ДВВ ξ і сталої c. Тобто $M(\xi+c)=M_\xi+c$.

2. Математичне сподівання має властивість лінійності:

$$M(c_1 \cdot \xi + c_2) = c_1 \cdot M_\xi + c_2, \quad c_1, c_2 = const .$$

4^0 ***Математичне сподівання добутку двох незалежних ДВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань:***

$$M(\xi \cdot \eta) = M_\xi \cdot M_\eta .$$

8.2. Дисперсія випадкової величини

8.2.1. Означення дисперсії випадкової величини

Дисперсією дискретної випадкової величини ξ називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначається $D(\xi)$, або D_ξ:

$$D(\xi) = D_\xi = M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} \tag{8.5}$$

Наведемо ще одну формулу для обчислення $D(\xi)$.

Твердження. Дисперсія ВВ $D(\xi)$ дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини ξ та квадратом її математичного сподівання:

$$D(\xi) = D_\xi = M(\xi^2) - (M_\xi)^2. \tag{8.6}$$

Дійсно,

$$D_\xi = M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} = M\left\{\xi - 2\xi M_\xi + M_\xi{}^2\right\} = M(\xi^2) - M(2 \cdot \xi \cdot M_\xi) + M(M_\xi^2) =$$
$$= M(\xi^2) - 2 \cdot M(\xi) \cdot M(\xi) + M_\xi{}^2 = M(\xi^2) - M_\xi{}^2 .$$

Формула (8.6) є зручнішою для обчислень у порівнянні з формулою (8.5).

8.2.2. Знаходження дисперсії дискретної випадкової величини

Дисперсію дискретної випадкової величини можна знайти за однією із формул:

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M_\xi)^2 p_k \ . \qquad (8.7)$$

Або

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 p_k - M_\xi{}^2 \ . \qquad (8.8)$$

Якщо множина значень ДВВ є зліченною, то дисперсію можна знайти за формулами: $D(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M_\xi)^2 p_k$ або $D(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^2 p_k) - (M_\xi)^2$ за умови збіжності рядів.

Приклад 8.2. Обчислити дисперсію ДВВ, заданої рядом розподілу:

x_k	1	2	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Розв'язання. Спочатку знайдемо математичне сподівання ДВВ за формулою (8.1):

$M(\xi) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 0,3 + 0,8 + 1,5 = 2,6$.

Тепер обчислимо дисперсію.

I спосіб. За формулою (8.7):

$D(\xi) = D_\xi = M\left\{(\xi - 2,6)^2\right\} = (1 - 2,6)^2 \cdot 0,3 + (2 - 2,6)^2 \cdot 0,4 +$
$(5 - 2,6)^2 \cdot 0,3 = 2,64$.

II спосіб. За формулою (8.8):

$D(\xi) = D_\xi = M\left\{\xi^2\right\} - M_\xi{}^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,3 - 2,6^2 = 2,64$.

Отже, за формулами (8.7) та (8.8) отримали одне й те саме значення $D_\xi = 2,64$.

8.2.3. Знаходження дисперсії неперервної випадкової величини

Дисперсія неперервної випадкової величини визначається так само, як і у випадку дискретної випадкової величини, за формулою (8.5).

Якщо НВВ ξ, яка задана функцією щільності $f_\xi(x)$, набуває можливих значень з відрізку $[a,b]$, то $D(\xi)$ знаходять за формулою

$$D(\xi) = D_\xi = \int_a^b (x - M_\xi)^2 \cdot f_\xi(x) dx \ . \qquad (8.9)$$

Якщо всі можливі значення належать множині R, то

$$D(\xi) = D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot f_\xi(x)dx \tag{8.10}$$

(за умови абсолютної збіжності інтеграла).

Дисперсію неперервної випадкової величини також можна знаходити за формулою

$$D(\xi) = D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - (M_\xi)^2 \tag{8.11}$$

Приклад 8.3. Знайти значення *A* та обчислити математичне сподівання та дисперсію НВВ, заданої на відрізку [0;3] функцією щільності:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} Ax, \ x \in [0;1] \\ A, \ x \in (1;3] \end{cases}.$$

Розв'язання. Застосуємо умову нормування

$$\int_0^3 f_\xi(x)\, dx = \int_0^1 Ax\, dx + \int_1^3 A\, dx = \frac{A}{2} + 2A = \frac{5}{2}A = 1 \ .$$

Звідки $A = \frac{2}{5}$. Отже, $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, \ x \in [0;1] \\ \frac{2}{5}, \ x \in (1;3] \end{cases}$.

Математичне сподівання знайдемо за формулою (8.3):

$$M_\xi = \int_0^3 x\, f_\xi(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{5} x dx + \int_1^3 x \cdot \frac{2}{5} dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{26}{15} \ .$$

Дисперсію знайдемо за формулою (8.9):

$$D_\xi = \int_0^1 \left(x - \frac{26}{15} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} x\, dx + \int_1^3 \left(x - \frac{26}{15} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} dx =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\int_0^1 \left(x^3 - \frac{26}{15} x^2 + \frac{676}{225} x \right)^2 dx + \int_1^3 \left(x^2 - \frac{26}{15} x + \frac{676}{225} \right)^2 dx \right) = \frac{253}{450} \ .$$

За формулою (8.11):

$$D_\xi = \int_0^3 x^2\ f_\xi(x)\,dx - M_\xi{}^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{5}x\,dx + \int_1^3 x^2 \cdot \frac{2}{5}\,dx - \left(\frac{26}{15}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\left(9-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{26}{15}\right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{52}{15} - \frac{676}{225} = \frac{45+1560-1352}{450} = \frac{253}{450}.$$

8.2.4. Властивості дисперсії

1⁰ ***Дисперсія сталої величини*** c ***дорівнює нулю,*** тобто $D(c)=0$.

Дійсно, оскільки $M(c)=c$, тому $c-M(c)=0$, отже, $D(c)=M(0)=0$.

2⁰ ***Дисперсія ДВВ*** ξ ***є невід'ємною величиною,*** тобто $D(\xi)\geq 0$.

Дійсно, оскільки величина $(\xi - M(\xi))^2$ набуває невід'ємних значень, тому математичне сподівання цієї величини також є невід'ємним, отже, $D(\xi)\geq 0$.

3⁰ ***Сталий множник можна винести за знак дисперсії, підносячи його до квадрату,*** тобто $D(c\cdot\xi)=c^2\cdot D_\xi$.

Доведення.

$$D(c\cdot\xi) = M\left\{(c\cdot\xi - M_\xi)^2\right\} = M\left\{c^2\cdot(\xi - M_\xi)^2\right\} = c^2\cdot M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} = c^2\cdot D_\xi\ .$$

4⁰ ***Дисперсія суми двох незалежних ДВВ*** ξ ***та*** η ***дорівнює сумі їх дисперсій,*** тобто $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

Наслідок. Дисперсія суми сталої величини c і випадкової величини ξ дорівнює дисперсії випадкової величини ξ: $D(\xi+c)=D(\xi)$. Отже, зміщення випадкової величини не змінює її дисперсії.

8.3. Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається число σ_ξ, що визначається рівністю:

$$\sigma_\xi = \sigma(\xi) = \sqrt{D_\xi}\ . \qquad (8.12)$$

Середнє квадратичне відхилення суми скінченого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює:

$$\sigma(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \sqrt{\sigma^2(\xi_1) + \sigma^2(\xi_2) + ... + \sigma^2(\xi_n)}\,.$$

Приклад 8.4. За умовою приклада 8.2 знайти середнє квадратичне відхилення ДВВ ξ .

Розв'язання. Оскільки ми знайшли, що $D(\xi) = 2,64$, то $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{2,64} \approx 1,62$.

Приклад 8.5. За умовою приклада 8.3 знайти середнє квадратичне відхилення НВВ ξ.

Розв'язання. $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{\dfrac{253}{450}} \approx 0,75$.

Середнє квадратичне відхилення σ_ξ характеризує розсіювання випадкової величини ξ відносно математичного сподівання.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.

2. Як знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини?

3. Як знайти математичне сподівання неперервної випадкової величини?

4. Які властивості має математичне сподівання випадкової величини?

5. Дайте означення дисперсії випадкової величини.

6. Наведіть формули для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини.

7. Наведіть формули для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини.

8. Які властивості має дисперсія випадкової величини?

9. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини?

Практичне заняття №8.

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади розв'язування задач

Задача 8.1. Дано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ, можливі значення якої та відповідні їм ймовірності записано в таблиці:

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,4

Обчислити числові характеристики $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики випадкової величини користуючись формулами (8.1), (8.7) або (8.8), (8.12), отримаємо $M(\xi)=2$, $D(\xi)=1$, $\sigma(\xi)=1$

Задача 8.2. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини ξ: $x_1= -1$, $x_2=0$, $x_3=1$, а також $M(\xi)=0{,}1, M\left(\xi^2\right)=0{,}9$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Розв'язання. Користуючись тим, що сума ймовірностей усіх можливих значень ξ дорівнює одиниці, а також враховуючи, що $M(\xi)=0{,}1$, $M\left(\xi^2\right)=0{,}9$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ -p_1+p_3=0{,}1 \\ 1^2 p_1+(-1)^2 p_3=0{,}9 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему методом Гауса, Крамера або матричним, отримаємо: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}5$.

Задача 8.3. Дано закони розподілу незалежних випадкових величин ξ і η.

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

y_j	0	1	2	3
q_j	0,1	0,2	0,3	0,4

а) Скласти закони розподілу для $(\xi+\eta)$, $(\xi\cdot\eta)$, $(\xi-\eta)$ та обчислити $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$;

б) перевірити виконання рівностей:

$M(\xi+\eta)=M(\xi)+M(\eta)$, $M(\xi-\eta)=M(\xi)-M(\eta)$,

$M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$, $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)=D(\xi-\eta)$.

Розв'язання. а) Складемо допоміжну таблицю.

№ з/п	ξ	η	$\xi+\eta$	$\xi\cdot\eta$	$\xi-\eta$	Ймовірність відповідного результату
1	-1	0	-1	0	-1	$0,2\cdot 0,1=0,02$
2	-1	1	0	-1	-2	$0,2\cdot 0,2=0,04$
3	-1	2	1	-2	-3	$0,2\cdot 0,3=0,06$
4	-1	3	2	-3	-4	$0,2\cdot 0,4=0,08$
5	0	0	0	0	0	$0,3\cdot 0,1=0,03$
6	0	1	1	0	-1	$0,3\cdot 0,2=0,06$
7	0	2	2	0	-2	$0,3\cdot 0,3=0,09$
8	0	3	3	0	-3	$0,3\cdot 0,4=0,12$
9	1	0	1	0	1	$0,5\cdot 0,1=0,05$
10	1	1	2	1	0	$0,5\cdot 0,2=0,1$
11	1	2	3	2	-1	$0,5\cdot 0,3=0,15$
12	1	3	4	3	-2	$0,5\cdot 0,4=0,2$

Запишемо тепер розподіли $(\xi+\eta)$, $(\xi\cdot\eta)$ та $(\xi-\eta)$

$\xi+\eta$	-1	0	1	2	3	4
p	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,2

$\xi\cdot\eta$	-3	-2	-1	0	1	2	3
p	0,08	0,06	0,04	0,37	0,1	0,15	0,20

$\xi-\eta$	-4	-3	-2	-1	0	1
p	0,08	0,18	0,33	0,23	0,13	0,05

Знайдемо числові характеристики випадкових величин користуючись формулами (8.6), (8.7), отримаємо $M(\xi)=0{,}3,$ $M(\eta)=2,$ $D(\xi)=0$, ($\sigma(\xi)\approx 0{,}78$, $D(\eta)=1,$ $\sigma(\eta)=1,$ $M(\xi+\eta)=2{,}3,$ $M(\xi-\eta)=-1{,}7,$ $M(\xi\eta)=0{,}6,$ $D(\xi+\eta)=1{,}61,$ $D(\xi-\eta)=1{,}61.$

Отримані результати свідчать про правильність вказаних в умові рівностей.

Задача 8.4. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією щільності

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c\cdot x(2-x), x\in(0;2], \\ 0, \qquad x\notin(0;2]. \end{cases}$$

Необхідно:

1) знайти c;
2) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;

3) обчислити числові характеристики випадкової величини ξ $(M_\xi, D_\xi, \sigma_\xi)$;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий інтервал $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha<\xi<\beta)$, якщо $\alpha=0{,}5,$ $\beta=4.$

Розв'язання.

1) Скористаємося умовою нормування функції щільності, отримаємо: $\int\limits_0^2 cx(2-x)dx=1.$ Звідки $c=3/4$. Отже, функція щільності має вигляд:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{3x(2-x)}{4}, x\in(0;2], \\ 0, \qquad x\notin(0;2]. \end{cases}$$

2) Знайдемо функцію розподілу.

Нехай $x\le 0$,тоді $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$;

якщо $0 < x \le 2,\ mo\ F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{3t(2-t)}{4}dt = \frac{3}{4}\left(t^2 - t^3/3\right)\Big|_0^x = \frac{3x^2 - x^3}{4};$

якщо $x > 2$то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{2} \frac{3t(2-t)}{4}dt + \int\limits_{2}^{x} 0dt = 1.$

Отже, функція розподілу має вигляд $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{3x^2 - x^3}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

3) Математичне сподівання $M_\xi = \int\limits_a^b x \cdot f_\xi(x)\,dx = \int\limits_0^2 x \cdot \frac{3(2x - x^2)}{4}dx = 1.$

Дисперсію обчислимо за формулою

$$D_\xi = \int\limits_a^b x^2 f_\xi(x)\,dx - M_\xi{}^2 = \int\limits_0^2 x^2 \cdot \frac{3(2x - x^2)}{4}dx - 1^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,448$.

4) Імовірність потрапляння в інтервал (0,5; 4):

$$P(0,5 < x < 4) = \int\limits_\alpha^\beta f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{0,5}^{2} \frac{3x(2-x)}{4}dx + \int\limits_2^4 0 \cdot dx = \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4}\right)\Bigg|_{0,5}^{2} =$$

$$= 3 - 2 - \frac{3}{16} + \frac{1}{32} \approx 0,844.$$

Або $P(0,5 < x < 4) = F(\beta) - F(\alpha) = F(4) - F(0,5) = 1 - 0,156 \approx 0,844.$

Завдання для самостійного виконання

21. Дискретна випадкова величина ξ набуває трьох можливих значень $x_1 = 1$, x_2 та x_3, при цьому $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірності того, що ξ набуде значень x_1та x_2 дорівнює 0,3 і 0,2 відповідно. Знайти закон розподілу величини ξ, якщо математичне сподівання $M(\xi) = 2,2$, а дисперсія $D(\xi) = 0,76$.

22. Дискретна випадкова величина має два можливих значення x_1 та x_2: $x_1 < x_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ , якщо p_1 =0,4, $M(\xi)=$ 4,6, $D(\xi)$= 0,64.

23-26. Дано закони розподілу незалежних дискретних випадкових незалежних величин ξ та η.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	a	a	$5a$	a	$2a$

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4
q_j	0,4	0,3	0,1	0,2

Потрібно:

а) записати закони розподілу $2\xi,\ \xi+\eta,\ \xi\eta,\ \xi-\eta$;

б) знайти числові характеристики випадкових величин: $M(\xi),\ D(\xi),\ \sigma(\xi),\ M(\eta),\ D(\eta),\sigma(\eta)$.

№ завдання	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4
23	0	1	2	3	4	-8	-7	-6	-5
24	1	2	3	4	5	-7	-6	-5	-4
25	2	3	4	5	6	-6	-5	-4	-3
26	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2

У завданнях **27-30** випадкову величину ξ задано функцією щільності $f_\xi(x)$. Знайти c та обчислити числові характеристики випадкової величини ξ: $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$:

27. $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x+3}}, x\in(-3;1],\\ 0, \qquad x\notin(-3;1],\end{cases}$

28. $f_\xi(x)=\begin{cases}x-c, x\in(1;2],\\ 0, \qquad x\notin(1;2],\end{cases}$.

29. $f_\xi(x)=\begin{cases}c\cdot\cos 2x, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right],\\ 0, \qquad x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right],\end{cases}$

30. $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{c}, x\in(0;2],\\ 0, \quad x\notin(0;2]\end{cases}$.

ЛЕКЦІЯ №9

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНДАРТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

На прикладах стандартних випадкових величин покажемо, як можна знайти математичні сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

9.1. Знаходження числових характеристик стандартних дискретних розподілів

9.1.1. Рівномірний розподіл ДВВ

Рівномірно розподілена ДВВ ξ задається рядом розподілу:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Отже, $M_\xi = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + x_3 \cdot \frac{1}{n} + ... + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ – середнє арифметичне значення чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

9.1.2. Біноміальний розподіл

Біноміально розподілена ДВВ ξ набуває значень $0,1,...,n$ з імовірністями $p_k = P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Математичне сподівання ξ :

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} .$$

Безпосереднє обчислення такої суми має певні труднощі, тому запропонуємо наступний спосіб розв'язання.

Введемо додаткові ВВ: ξ_k – ВВ, які приймають значення 1, якщо подія А відбулась при k-тому випробуванні, 0 – якщо подія А не відбулась. Тобто ξ_k є характеристичними величинами події A при k-тому випробуванні:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & якщо\ A \\ 0, & якщо\ \overline{A} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} P(\xi_k = 1) = p \\ P(\xi_k = 0) = q = 1 - p \end{matrix}$$

Тоді $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію величин $\xi_k,\ k = 1,...,n$:

$M(\xi_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$;

$D(\xi_k) = M(\xi_k{}^2) - M_{\xi_k}^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$;

Тоді

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} p = n \cdot p.$$

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + .. + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + .. + D(\xi_n) = npq$$

Отже, для біноміально розподіленої випадкової величини $M_\xi = np,\ D_\xi = npq$.

9.1.3. Розподіл Пуассона

Випадкова величина ξ, що розподілена за законом Пуассона, набуває значень $0, 1, 2, ..., n, ...$, з ймовірностями $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, де λ-параметр розподілу, $\lambda > 0$. Знайдемо математичне сподівання такої випадкової величини.

$$M_\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot (1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} + ...) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Знайдемо дисперсію.

$$D_\xi = M(\xi^2) - M_\xi{}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \lambda \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (m - 1 + 1) \cdot \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} - \lambda^2 =$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}+e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda^2=$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}+e^{-\lambda}\lambda\cdot e^{\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\lambda^2\cdot e^{\lambda}+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Тобто, $M_\xi=\lambda,\ D_\xi=\lambda$ – для величини, розподіленої за законом Пуассона.

9.1.4. Геометричний розподіл

Якщо ДВВ ξ має геометричний розподіл, то вона набуває значень 1,2,3,… з імовірностями $p_k=P(\xi=k)=q^{k-1}\cdot p,\ (k=1,2,3,....)$ (див.6.4.4).

Математичне сподівання:

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}=p(1+2q+3q^2+...+kq^{k-1}+...).$$

Для знаходження суми цього ряду почленно продиференцюємо ряд $S(q)=1+q+q^2+....+q^n+...=\dfrac{1}{1-q}$ (при $0<q<1$) :

$$S'(q)=1+2q+....+nq^{n-1}+...=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Тоді $M(\xi)=p\cdot\dfrac{1}{(1-q)^2}=\dfrac{1}{p}.$

Знайдемо:

$$M(\xi^2)=1^2\cdot p+2^2\cdot q\cdot p+....+n^2\cdot q^{n-1}\cdot p+...=p\frac{(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2}.$$

Дисперсія: $D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=\dfrac{1+q}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}.$

Отже, для геометрично розподіленої випадкової величини $M_\xi=\dfrac{1}{p},\ D_\xi=\dfrac{q}{p^2}.$

9.2. Знаходження числових характеристик стандартних неперервних розподілів

9.2.1. Неперервний рівномірний розподіл

Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$ неперервна випадкова величина, функція щільності якої:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot f_\xi(x)dx + \int_{a}^{b} x \cdot f_\xi(x)dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx = \int_{a}^{b} x \cdot f_\xi(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{b+a}{2}$$

Отже, $M(\xi)$ – середнє арифметичне кінців відрізка $[a;b]$.

Знайдемо дисперсію:

$$D_\xi = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 =$$

$$= \int_{a}^{b} x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx + - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Отже, дисперсія $D_\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

9.2.2. Показниковий розподіл

Нехай ξ – показниково розподілена випадкова величина із щільністю

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$, де параметр $\lambda > 0$.

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot f_\xi(x)dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\cdot\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\lim_{b\to+\infty}\cdot\int_{0}^{b} x\cdot e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=e^{-\lambda x}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \\ \int udv=uv-\int vdu & \end{matrix}\right|=$$

$$=\lambda\lim_{b\to+\infty}(-x\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx)=\lambda\cdot\lim_{b\to+\infty}(-b\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda}\cdot(-\frac{1}{\lambda})\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b)=$$

$$=\lambda\lim_{b\to+\infty}(-e^{-\lambda b}\cdot\frac{b}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda^2})=\left|\lim_{b\to+\infty}(-e^{-\lambda b}\cdot\frac{b}{\lambda})=\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{\lambda\cdot e^{\lambda b}}=0\right|=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

Знайдемо дисперсію:

$$D_\xi=M(\xi^2)-M_\xi^{\,2}=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_\xi(x)dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2 & dv=e^{-\lambda x}dx \\ du=2xdx & v=\dfrac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\end{matrix}\right|=\lambda\cdot\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Маємо $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D_\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma_\xi=\dfrac{1}{\lambda}$, де λ – параметр розподілу.

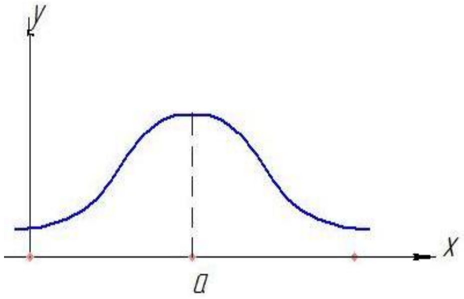
Приклад 9.1. Спостереження за часом безвідмовної роботи приладу показали, що його середнє значення дорівнює 5 год. Вказати функцію щільності випадкової величини ξ – час безвідмовної роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина ξ – час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл (див. пп. 7.2.2). Оскільки $t_{сер}=5\,год.\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{5}$, тоді функція щільності

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{5}\cdot e^{-\frac{x}{5}}, & x\ge 0\end{cases}.$$

9.2.3. Нормальний розподіл

Нехай $\xi = N(a,\sigma)$ – нормально розподілена ВВ, щільність якої $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$.



Знайдемо математичне сподівання:

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_{\xi}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} заміна\,\frac{x-a}{\sigma} = z & \Rightarrow x = \sigma z + a & dx = \sigma dz \\ x \Rightarrow +\infty & x \Rightarrow -\infty & \\ z \Rightarrow +\infty & z \Rightarrow -\infty & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma z + a\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma dz =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = a\,.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D_{\xi} = M((\xi - M_{\xi})^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - M_{\xi}\right)^2\cdot f_{\xi}(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left| \begin{array}{l} Заміна\quad \frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma} = z \\ dx = \sqrt{2}\sigma dz \\ x \to \infty \quad \Rightarrow \quad z \to \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}\sqrt{2}\sigma\, dz == \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\ e^{-z^2} d(-z^2) =$$

$$\left| \begin{matrix} u = z & dv = e^{-z^2} d(-z^2) \\ du = dz & v = e^{-z^2} \end{matrix} \right| = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot (-\sqrt{\pi}) = \sigma^2$$

$$D_\xi = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\xi = \sigma .$$

Отже, для нормально розподіленої ВВ $\xi = N(a,\sigma)$ параметри a, σ є, відповідно, її середнім значенням $M(\xi) = a$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma_\xi = \sigma$.

9.3. Інші числові характеристики випадкових величин

Початковим моментом порядку k ДВВ ξ називається величина

$$\alpha_k = M\left(\xi^k\right),\ (k = 1,2,...n).$$

Зокрема,

$k = 1; \alpha_1 = M(\xi) -$ *математичне сподівання* ξ;

$k = 2; \alpha_2 = M(\xi^2)$

$k = 3; \alpha_3 = M(\xi^3)$.

Центральним моментом порядку k ДВВ ξ називається величина

$$\beta_k = M\left((\xi - \mathrm{M}_\xi)^k\right),\ (k = 1,2,....,n).$$

Зокрема,

$k = 1;\ \beta_1 = M(\xi - M_\xi) = M(\xi) - M(M_\xi) = M(\xi) - M(\xi) = 0$

$k = 2;\ \beta_2 = M(\xi - M_\xi)^2 = D_\xi$

$k = 3;\ \beta_3 = M(\xi - M_\xi)^3$

Центральні моменти виражаються через початкові моменти: $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$; $\beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2$, тощо.

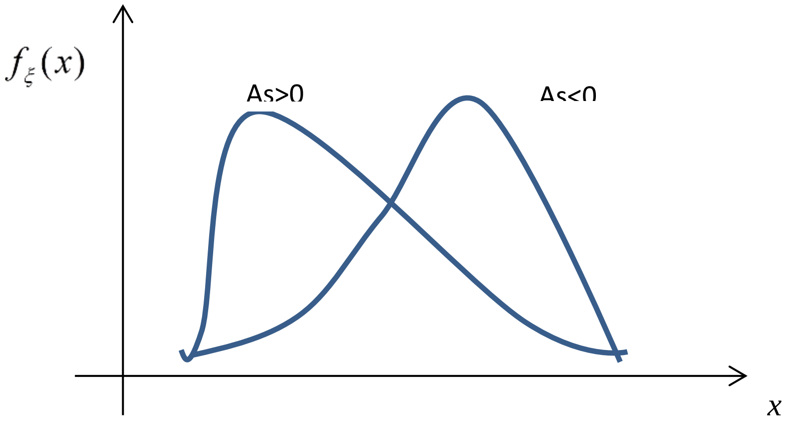
Асиметрія та ексцес

Третій центральний момент характеризує симетрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\beta_3 = 0$**,** то випадкова величина симетрично розподілена відносно свого середнього значення.

Оскільки β_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину – ***коефіцієнт асиметрії***:

$$As = \frac{\beta_3}{\sigma^3}.$$

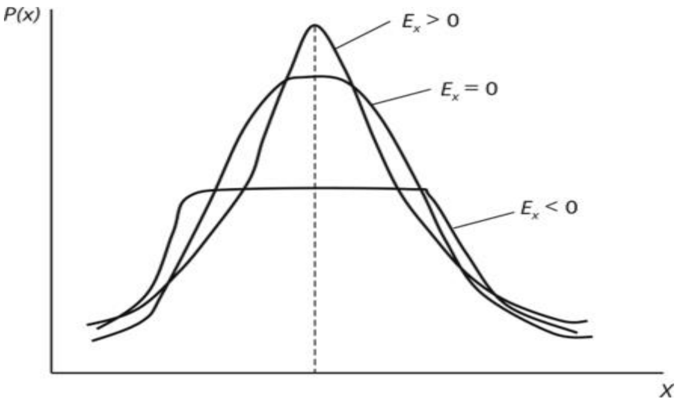
Для нормального розподілу коефіцієнт асиметрії дорівнює 0, що означає, що розподіл є симетричним відносно середнього значення $a = M_\xi$. Якщо $As > 0$, то графік щільності розподілу має лівосторонню симетрію, а коли $As < 0$ – правосторонню.



Центральний момент четвертого порядку використовують для визначення *ексцесу*. ***Ексцес*** обчислюється за формулою:

$$Ex = \frac{\beta_4}{\sigma^4} - 3.$$

Ексцес характеризує плосковершинність або гостровершинність щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$. Для нормального розподілу ексцес дорівнює 0.



Коефіцієнт асиметрії та ексцес використовуються в статистиці, за ними можна зрозуміти, наскільки розподіл є близьким до нормального.

Абсолютні моменти: $\overline{\alpha_k} = M|\xi|^k$ - абсолютний початковий момент.

$\overline{\beta_k} = M|\xi - M_\xi|^k$ - абсолютний центральний момент.

Значення *k* може бути і дробовим числом.

Модою M_o випадкової величини ξ називають її найбільш ймовірне значення (для якого ймовірність p_i або щільність ймовірності $f_\xi(x)$ досягає максимуму), тобто

$$M_0 = x_0 \to \begin{cases} f_\xi(x_0) = \max f_\xi(x) - \text{НВВ} \\ p(\xi = x_0) = \max - \text{ДВВ} \end{cases}$$

Для нормального розподілу $N(a, \sigma)$ мода $M_0 = a$.

Медіана розподілу M_e – це таке значення аргументу x^*, що ймовірність того, що величина ξ менша за x^* дорівнює $\frac{1}{2}$, також, ймовірність того, що величина ξ більша за x^* дорівнює $\frac{1}{2}$.

$M_e = x^*$, якщо $P(\xi < x^*) = P(\xi > x^*) = \frac{1}{2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Вкажіть числові характеристики рівномірного розподілу ДВВ?

2. Як знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, що має біноміальний розподіл?

3. Які числові характеристики випадкової величини, що розподілена за законом Пуассона?

4. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію неперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл.

5. Назвіть значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, що має показниковий розподіл.

6. Назвіть значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, що має нормальний розподіл.

7. Які властивості розподілу можна описати, застосовуючи моменти третього та четвертого порядків?

8. Що називається модою та медіаною розподілу.

Практичне заняття №9

Числові характеристики випадкових величин

Приклади розв'язування задач

Задача 9.1. Автобуси деякого маршруту курсують регулярно з інтервалом 10 хвилин. Пасажир підходить до зупинки у будь-який момент часу. Яка ймовірність того, що чекати пасажиру доведеться не більше чотирьох хвилин. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ – часу очікування автобуса.

Розв'язання. Випадкова величина ξ – час очікування автобуса на часовому проміжку $[0;10]$ (у хвилинах) має рівномірний розподіл $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & x\in(0;10],\\ 0, & x\notin(0;10].\end{cases}$

Тому ймовірність того, що пасажиру доведеться чекати не більше чотирьох хвилин, рівна $P(\xi\le 4)=\int_0^4 \frac{1}{10}dx=0,4;$ числові характеристики

$$M(\xi)=\frac{0+10}{2}=5(\textit{хвилин}),\;\; D(\xi)=\frac{(10-0)^2}{12}\approx 8,33,$$

$$\sigma(\xi)=\frac{10-0}{2\sqrt{3}}\approx 2,87(\textit{хвилини}).$$

Задача 9.2. На ринок надійшла велика партія свинини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підпорядковується нормальному закону розподілу з математичним сподіванням $a=250$ кг та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=100$ кг.

1) Знайти ймовірність того, що вага випадково відібраної туші:
а) виявиться більшою 300 кг;

б) виявиться меншою 200 кг;

в) буде знаходитись між 150 та 350 кг;

г) відхилятиметься від математичного сподівання менше ніж на 50 кг;

д) відхилятиметься від математичного сподівання більше ніж на 50 кг;

2) Знайти межі, в яких відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення.

3) З ймовірністю 0,899 визначити межі, в яких буде знаходитися вага випадково відібраної туші. Яка за цієї умови максимальна величина відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання?

Розв'язання. а) Ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться більшою 300 кг, можна розуміти як ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться в інтервалі від 300 кг до + ∞.

Отримаємо:

$$P(300 \le \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 250}{100}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 250}{100}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(0,5) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085.$$

б) Вага туші менша 200 кг, тобто в інтервалі (0;200) дорівнює:

$$P(0 < \xi < 200) = \Phi\left(\frac{200 - 250}{100}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 250}{100}\right) =$$

$$= \Phi(-0,5) - \Phi(-2,5) = -0,1415 + 0,4938 = 0,3023.$$

в) Знайдемо ймовірність того, що вага випадково відібраної туші знаходиться в інтервалі (150;350).

$$P(150 < \xi < 350) = \Phi\left(\frac{350 - 250}{100}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 250}{100}\right) = \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) \approx 0,6827.$$

г) Скористаємось формулою

$$P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \Rightarrow P\left(\left|\xi - 250\right| < 50\right) = 2\Phi\left(\frac{50}{100}\right) = 2\Phi(0,5) = 0,3829.$$

д) Скористаємося тим, що потрібно знайти ймовірність протилежної події, тобто:

$$P\left(\left|\xi-a\right|\geq\delta\right)=1-P\left(\left|\xi-a\right|<\delta\right)=P\left(\left|\xi-250\right|\geq 50\right)=$$

$$=1-P\left(\left|\xi-250\right|<50\right)=1-0,3829=0,6171$$

2) Знайдемо межі, в яких відхилення ваги від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення, тобто

$$a-3\sigma<\xi<a+3\sigma,\quad 250-3\cdot 100<\xi<250+3\cdot 100,\ -50<\xi<550.$$

Враховуючи, що вага відібраної туші – нормально розподілена випадкова величина, можна бути впевненому в тому, що вага випадково відібраної туші не вийде за межі -50 до 550 кг.

3) Знайдемо межі, в яких із ймовірністю 0,899 буде знаходитися вага випадково відібраної туші. Для цього формулу перепишемо так: $P\left(\left|\xi-a\right|<\delta\right)=P\left(a-\delta<\xi<a+\delta\right)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)=0,899.$

Звідки $P\left(250-\delta<\xi<250+\delta\right)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{100}\right)=0,899$, і

$$\Phi\left(\frac{\delta}{100}\right)=\frac{0,89}{2}=0,4495$$

За таблицею функції Лапласа знайдемо аргумент $\dfrac{\delta}{100}=1,64\Rightarrow\delta=164$.

Тоді межі інтервалу, який нас цікавить (250-164;250+164) або (86;414). З ймовірністю 0,899 можна стверджувати, що відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить 164 кг.

Задача 9.3. Час безвідмовної роботи має показниковий розподіл $F(t)=1-e^{-0,04t},(t>0)$. Знайти ймовірність того, що за час $t=60$ год.. а) система відмовить; б) система не відмовить.

Розв'язання. а) Оскільки функція розподілу $F(x)$ визначає ймовірність відмови системи за час t, то підставимо $t=60$ у функцію розподілу, та отримаємо ймовірність відмови системи:

$$F(60)=1-e^{-0,04\cdot 60}=1-e^{-2,4}\approx 0,91$$

б) Події «система відмовить» та «система не відмовить» є протилежними, тому ймовірність того що система не відмовить $p=1-0,91=0,09$.

Завдання для самостійного виконання

31. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі $(1;9)$. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ, функцію розподілу та ймовірність потрапляння в інтервал $(0;5)$.

32. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі $(4;b)$, причому щільність на цьому проміжку дорівнює $\frac{1}{10}$. Знайти значення b та числові характеристики випадкової величини ξ.

33. Зерносховище отримує зерно партіями по десять машин, чотири з яких – із гречкою. Навмання відібрано три машини. Записати закон розподілу кількості машин із гречкою та знайти числові характеристики.

34. Дискретна випадкова величина ξ приймає два можливих значення x_1, x_2, при цьому $x_1 < x_2$. Ймовірності того, що ξ набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу величини ξ, якщо математичне сподівання $M(\xi) = 2,6,$ а дисперсія $\sigma(\xi) = 0,8.$

35. Автомат виготовляє деталі, довжини яких є випадковою величиною ξ, що має нормальний розподіл із середнім 50мм. Проектна довжина деталей має бути в межах (30;70) мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде: а) більша 56 мм; б) менша 42 мм.

36. Щоденний прибуток фірми від реалізації продукції підпорядкований нормальному закону з математичним сподіванням $a = 20$ (тис. гр. од.) і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ (гр. од.).

В яких межах слід очікувати щоденний прибуток, щоб ймовірність не вийти за ці межі дорівнювала 0,8333 ?

37. Встановлено, що час ремонту телевізора є випадковою величиною ξ, розподіленою за показниковим законом. Знайти ймовірність того, що ремонт телевізора триватиме не менше 20 днів, якщо середній час ремонту телевізора становить 15 днів. Знайти щільність ймовірності, функцію розподілу та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

38. На ринок надійшла велика партія свинини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підпорядкована нормальному закону розподілу з невідомим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ кг. Відомо, що 37,07% туш мають вагу більшу ніж 350 кг. Знайти очікувану вагу випадково відібраної туші.

39. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 8$ та $\sigma = 2$. Порівняти ймовірності попадання випадкової величини в інтервали (3;8) і (-90;1).

40. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Знайти інтервал, у який потрапляє випадкова величина ξ з практичною достовірністю (з ймовірністю 0,9973).

ЛЕКЦІЯ №10

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМА ЧЕБИШОВА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Граничні теореми теорії ймовірностей встановлюють закономірності, які виникають у результаті дії великої кількості різних випадкових факторів , коли число випробувань є нескінченно великим. Результат кожного окремого випробування можна передбачити лише з певною долею ймовірності, але узагальнений результат великої кількості випробувань стає достовірною подією, перестає бути випадковим, виявляє статистичну стабільність.

10.1. Нерівність Чебишова

Лема. Нехай ξ є неперервною випадковою величиною. Розглянемо математичне сподівання квадрата цієї величини.

$$M\left\{\xi^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{|x|\le\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx + \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx \ge$$

$$\ge \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx \ge \int_{|x|\ge\varepsilon} \varepsilon^2 f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 \int_{|x|\ge\varepsilon} f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 P(|\xi| \ge \varepsilon).$$

Отже,

$$M\left\{\xi^2\right\} \ge \varepsilon^2 P(|\xi| \ge \varepsilon).$$

Звідки отримаємо нерівність:

$$P(|\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{M\left\{\xi^2\right\}}{\varepsilon^2} \qquad (10.1)$$

Доведення проведено для неперервної випадкової величини, але нерівність (10.1) справджується також і для дискретної випадкової величини.

Нерівність Чебишова. Якщо випадкова величина ξ має скінченне математичне сподівання M_ξ і скінченну дисперсію D_ξ, то ймовірність того, що значення ξ відхиляються від M_ξ більше ніж на ε, не перевищує $\dfrac{D_\xi}{\varepsilon^2}$:

$$P(\left|\xi - M_{\xi}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2} \tag{10.2}$$

Доведення. Застосуємо лему для випадкової величини $\xi - M_{\xi}$. Підставимо у нерівність (10.1) замість ξ величину $(\xi - M_{\xi})$:

$$P(\left|\xi - M_{\xi}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{M\{(\xi - M_{\xi})^2\}}{\varepsilon^2} \quad .$$

Враховуючи, що $M\left\{(\xi - M_{\xi})^2\right\} = D_{\xi}$, отримаємо нерівність (10.2), яка і носить назву нерівність Чебишова.

Якщо розглянемо подію, протилежну до події $(\left|\xi - M_{\xi}\right| \geq \varepsilon)$, то нерівність (10.2) можна переписати у наступній формі:

$$P(\left|\xi - M_{\xi}\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2} \tag{10.3}$$

Приклад 10.1. Нехай задано випадкову величину ξ, математичне сподівання та дисперсія якої дорівнюють M_{ξ}, D_{ξ} відповідно, середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}}$. Оцінити ймовірність того, що випадкова величина відхиляється від свого середнього значення менше, ніж на $3\sigma_{\xi}$.

Розв'язання. У нерівності (10.3) покладемо $\varepsilon = 3\sigma_{\xi}$, тоді:

$$P(\left|\xi - M_{\xi}\right| < 3\sigma_{\xi}) \geq 1 - \frac{\sigma^2_{\xi}}{9\sigma_{\xi}^{2}} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,889.$$

Отримана оцінка є достатньо грубою. Наприклад, для нормально розподіленої випадкової $\xi = N(a;\sigma)$ ця оцінка складає за відомим правилом "3σ": $P(\left|\xi - M_{\xi}\right| < 3\sigma) \approx 0,997$.

Нерівність Чебишова має переважно теоретичне значення та застосовується при доведенні законів великих чисел, наприклад, при доведенні теореми Чебишова.

10.2. Теорема Чебишова

Теорема. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - попарно незалежні випадкові величини, які мають скінченні математичні сподівання $m_1, m_2, ..., m_n$ та дисперсії $D_1, D_2, ..., D_n$, що обмежені у сукупності, тобто $D_i \le B, \quad i = \overline{1,n}, \ B = const,$ тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} - \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right\} = 0 \tag{10.4}$$

та

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} - \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{10.5}$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\xi = \frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}$. Її математичне сподівання:

$$M_\xi = M\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}\right\} = \frac{1}{n} M\left\{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n\right\} = \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}.$$

Дисперсію можна оцінити так:

$$D_\xi = D\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}\right\} = \frac{1}{n^2} D\left\{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n\right\} = \left|\begin{matrix}\xi_1,\xi_2,...,\xi_n - \\ \textit{попарно незалежні}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{D_1+D_2+...+D_n}{n^2} \le \frac{B+B+...+B}{n^2} = \frac{Bn}{n^2} = \frac{B}{n}.$$

Застосуємо нерівності (10.4) та (10.5) для випадкової величини $\xi = \frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}$.

З нерівності (10.4) випливає

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} - \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \le \frac{B}{n\varepsilon^2} \tag{10.6}$$

А з нерівності (10.5) :

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} - \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{B}{n\varepsilon^2} \tag{10.7}$$

У нерівностях (10.6), (10.7) перейдемо до границі при $n \to \infty$. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}=0.$$

Та

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1.$$ Теорему доведено.

Наслідок. (Частинний випадок теореми Чебишова)

Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини, $M\{\xi_i\}=a,\ D\{\xi_i\}=D,\ i=\overline{1,n}$.

Тоді:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0, \tag{10.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{10.9}$$

Тобто, при великих n випадкова величина, що є середнім арифметичним випадкових величин, майже не відрізняється від a : $\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}\approx a$. Її дисперсія стає практично нульовою: $D_\xi\le\frac{B}{n}\approx 0$.

Теореми Чебишова та інші граничні теореми, що описують закономірності щодо центру розподілу ознаки, носять назву ***закон великих чисел***.

Закони великих чисел стверджують, що при великих n середнє арифметичне випадкових величин поводить себе як невипадкова величина, набуває властивості статистичної стійкості. У практичному застосуванні середній результат достатньо великої кількості вимірювань будь-якої величини буде скільки завгодно близьким до величини, що вимірюється.

10.3. Збіжність за ймовірністю

Говорять, що послідовність ξ_n збігається до числа a за ймовірністю, позначається: $\xi_n\xrightarrow{P}a,\ n\to\infty$, якщо для довільного $\forall\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n-a|<\varepsilon\}=1.$

Таким чином, у теоремі Чебишова

$$\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}, n\to\infty.$$

10.4. Наслідки. Теореми Бернуллі та Пуассона

10.4.1.Теорема Бернуллі

Теорема. Якщо m – кількість появ події А у n незалежних випробуваннях, p – ймовірність появи події А у кожному з випробувань, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Доведення. Нехай відбувається серія n незалежних випробувань, в кожному з яких подія А може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю q, $q=1-p$.

Нехай m кількість появ події А: $0\le m\le n$. Випадкову величину m можна подати як суму $m=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$, де ξ_i - індикатор події А в i-тому випробуванні: $M(\xi_i)=1\cdot p+0\cdot q=p$, $D(\xi_i)=qp$.

Величина $\frac{m}{n}=\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}$ є частотою появи події А.

За формулою (10.9) (частинний випадок теореми Чебишова):

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$. Теорему доведено.

Теорема Бернуллі стверджує, що при великих n: $\frac{m}{n}\approx p$. Отже, при великих n частота події А стає невипадковою величиною. Теорема Бернуллі дає теоретичне обгрунтування заміни невідомої ймовірності події її частотою, або статистичною ймовірністю, отриманою в n повторних незалежних випробуваннях, що проводяться в однакових умовах.

Зауваження. В умовах теореми Бернуллі нерівність Чебишова набуває вигляду:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Безпосереднім узагальненням теореми Бернуллі є теорема Пуассона, коли ймовірності події у кожному випробування різні.

10.4.2. Теорема Пуассона

Теорема. Якщо m – число появ події А у серії n незалежних випробувань, у яких подія А може відбутися з ймовірностями $p_1, p_2, ... p_n$, тоді випадкова величина $\frac{m}{n}$, частота появи події А, є збіжною за ймовірністю:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n}.$$

10.5. Центральна гранична теорема

Теорема. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні випадкові величини, що мають математичні сподівання $m_1, m_2, ..., m_n$, та дисперсії $D_1, D_2, ..., D_n$.
Нехай існують центральні абсолютні моменти третього порядку, а саме: $\beta_i = M\left\{|\, \xi_i - m_i\,|^3\right\}$ такі, що при $n \to \infty$ $\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{(\sum_{i=1}^{n} D_i)^{\frac{3}{2}}} \to 0$.

Розглянемо величину $\eta^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$.

Помітимо, що ця величина є центрованою та нормованою: $M\left\{\eta^{(n)}\right\} = 0; \quad D\left\{\eta^{(n)}\right\} = 1.$

Функція розподілу цієї випадкової величини : $F_{\eta^{(n)}}(x) = P\left\{\eta^{(n)} < x\right\}$.

Тоді при $n \to \infty$

$$F_{\eta^{(n)}}(x) \to F_{\xi^0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Тобто, при великих n випадкова величина $\eta^{(n)}$ поводить себе як нормально розподілена: $\eta^{(n)} \approx N(0;1)$.

З центральної граничної теореми як наслідок можна отримати локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа.

10.6. Локальна теорема Муавра-Лапласа.

Теорема. Якщо у кожному з n незалежних випробувань подія А може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю q, $q=1-p$, то ймовірність

$P_n(m)$ того, що подія А відбудеться рівно m разів, наближено можна обчислити за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$ де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - табульована функція Гауса.

10.7. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Теорема. Якщо здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то ймовірність $P_n(m_1 \le m < m_2)$ того, що m - кількість появи події А належить інтервалу $\left[m_1, m_2\right)$, наближено дорівнює:

$$P(m_1 \le m < m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табульована функція Лапласа.

Приклад 10.1. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання відібрано 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. За умовою

$$p = 0,8, q = 0,2, n = 800, m_1 = 600, m_2 = 680.$$

$$n \cdot p = 800 \cdot 0,8 = 640, \sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0,8 \cdot 0,2} \approx 11,3.$$

$$P(600 \le m < 680) \approx \Phi(\frac{680-640}{11,3}) - \Phi(\frac{600-640}{11,3}) = 2\Phi(\frac{40}{11,3}) =$$

$$= 2\Phi(3,5) = 2 \cdot 0,49977 = 0,99954.$$

Запитання для самоконтролю

1. *Запишіть нерівність Чебишова. В яких формах ця нерівність використовується на практиці?*
2. *Сформулюйте теорему Чебишова.*
3. *Сформулюйте наслідки з теореми Чебишова.*
4. *Сформулюйте центральну граничну теорему.*
5. *Сформулюйте локальну та інтегральну теореми Муавра – Лапласа.*

Практичне заняття №10.

ТЕОРЕМА ЧЕБИШОВА та ЇЇ НАСЛІДКИ

Приклади розв'язування задач

Задача 10.1. Ймовірність появи події у кожному випробуванні однакова і дорівнює 0,3. Застосовуючи нерівність Чебишова, знайти число випробувань, необхідних для того, щоб ймовірність відхилення частоти події від її ймовірності була за абсолютною величиною не більше 0,01, більше 0,99.

Розв'язання. Згідно з нерівністю $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$, яка є наслідком нерівності Чебишова для біноміального розподілу, якщо при відомих значеннях p, q і ε, n буде випробувано таким, що різниця $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ виявиться не менше даної в умові ймовірності P, то отримаємо нерівність $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geq P$, яка і визначить шукане найменше число випробувань n.

Ця нерівність при $p=0,3,\ q=0,7, \varepsilon=0,01$ і $P=0,99$ дає

$$1-\frac{0,3\times 0,7}{n\times 0,01^2}\geq 0,99 \text{ або } 0,01\geq\frac{0,21}{n\times 0,01^2}\Rightarrow n\geq 210000.$$

Найменше число випробувань дорівнює 210 000.

Задача 10.2. Математичне сподівання швидкості вітру на даній висоті дорівнює 25 км/г, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 4,5 км/г. Які швидкості вітру можна очікувати з ймовірністю, не меншою 0,9?

Розв'язання. Із нерівності Чебишова випливає, що якщо при даній дисперсії D_ξ ε буде вибрано так, що $1-\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}=0,9$, то умова задачі виконуватиметься. Отримаємо рівність, з якої знайдемо ε:

$$1-\frac{4,5^2}{\varepsilon^2}=0,9\Rightarrow\varepsilon=14,2, \text{ або}$$

$$|\xi-25|\leq 14,2, \text{ тобто } 10,8\leq\xi\leq 39,2.$$

Задача 10.3. Дисперсія кожної із 3000 незалежних випадкових величин не перевищує 6. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величини від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить 0,3.

Розв'язання. Нерівність Чебишова для n незалежних випробувань має вигляд

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{B}{n\varepsilon^2},$$

де B – число, яким обмежена дисперсія.

Застосуємо цю нерівність при $\varepsilon=0{,}3$, $B=6$, $n=3000$, отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le 0{,}3\right)>1-\frac{6}{3\times 0{,}3^2}\approx 0{,}978.$$

Отже, ймовірність шуканої події більша 0,978.

Задача 10.4. Чи можна застосувати до послідовності випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, закон великих чисел, якщо випадкова величина ξ_n має розподіл:

x_i	*-100n*	0	*100n*
p_i	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови теореми Чебишова про обмеженість дисперсій даних випадкових величин. Оскільки

$M\left(\xi_n\right)=-100n\cdot\frac{1}{2n^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+100n\cdot\frac{1}{2n^2}=0$, то дисперсія

$$D\left(\xi_n\right)=M\left(\xi_n^2\right)=\frac{10000n^2}{2n^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{10000n^2}{2n^2}=10000.$$

Отже, $M\left(\xi_n\right)=0$ і дисперсії $D\left(\xi_n\right)=10000$, то до цієї послідовності можна застосувати закон великих чисел.

Завдання для самостійного виконання

41. Середня кількість студентської групи 28 осіб. Знайти ймовірність того, що у деякій групі не менше 32 студентів.

42. Середня кількість пасажирів, що проходять через станцію метрополітену становить 800 осіб. Оцінити ймовірність того, що за один день через цю станцію пройде не більше 1200 осіб.

43. Добова потреба електроенергії в даному населеному пункті є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 2000 квт./год., а дисперсія становить 20000. Оцінити ймовірність того, що в найближчий день витрати електроенергії у цьому населеному пункті будуть від 1500 до 2500 квт/год.

44. Нехай ймовірність того, що відремонтований годинник має хід у межах стандарту, дорівнює 0,97. Оцінити ймовірність того, що серед 1000 годинників частина тих, які мають хід у межах норми відхилятиметься (по абсолютній величині) від ймовірності 0,97 не більше як на 0,02.

45. При анонімному тестуванні виявилося, що 10% працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина ξ – кількість, людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Вказати межі в які попадає випадкова величина ξ з ймовірністю 0,9.

46. При виробництві дискет брак становить 1%. Скільки дискет потрібно відібрати для перевірки, що з імовірністю 0,95 можна було б стверджувати, що у вибірці дискет відсоток бракованих відрізнятиметься від 1% не більше ніж на 0,5%?

47. Середня швидкість вітру біля землі в даному населеному пункті дорівнює 16 км/год. Оцінити ймовірність того, що швидкість вітру не перевищуватиме 80 км/год.

48. В електричну мережу паралельно включено 20 лампочок. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність відхилення між кількістю включених ламп та їх середнім числом (математичним сподіванням) за час T буде: а) менше трьох; б) не менше трьох.

49. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

x_i	0,1	0,4	0,6
p_i	0,2	0,3	0,5

Оцінити ймовірність того, що $|\xi - M(\xi)| < \sqrt{0,4}$.

50. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, задано законом розподілу

x_i	a	$-a$
p_i	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Чи можна застосувати до заданої послідовності теорему Чебишова?

Відповіді

1.

x_i	0	1	2	3
Pi	0,729	0,243	0,027	0,001

P=0,729.

2.

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,716	0,249	0,033	0,002	0,00004

$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - 0,716 = 0,284.$

3. $P(\xi = k) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}, k = 1,2,3,....$

4.

x_i	1	2	3	…	k	…
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	…	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$	…

$k_0 = 1.$

5. $P(\xi = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k = 1,2,3,...., \; P(\xi > 4) = 0,012$

6. $P(\xi = k) = \frac{10^k}{k!} e^{-10}, k = 0,1,2,3,.... \quad P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) = 0,93.$

7. $P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}, k = 0,1,2,3,.... \quad P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi < 1) = 0,98.$

8.

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,063	0,250	0,375	0,250	0,063

11. $c = \frac{1}{3}; \; P(1 < \xi < 8) = 0,42.$ **12.** $c = 1; \; P(-1 < \xi < 2) = 1.$

13. $c = 1; \; P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{6}\right) \approx 0,87.$ **14.** . $c = \frac{1}{2}; \; P(-1 < \xi < 3) = 0,87.$

15. $c = \frac{1}{4}; \; P(-4 < \xi < 1) = 1.$**16.** $c = 2; \; P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,13.$

17. $c=-\dfrac{3}{4}P\left(3<\xi<4{,}5\right)=0{,}84.$ **18.** $c=-\dfrac{1}{40};P\left(-1<\xi<2\right)=0{,}55.$

19. а) 0; б) 0,0158; в) 0,9817. 20. $a)\quad P(11{,}96<\xi<12{,}06)\approx 0{,}28;$

б) $\mathrm{P}(0<\xi<12{,}06)\approx 0{,}67$. **21.** $p_3=0{,}5;x_2=2;x_3=3.$

22.

x_i	3,625	5,25
p_i	0,4	0,6

23. $M\left(\xi\right)=2{,}2;D(\xi)=1{,}36;\ \sigma(\xi)\approx 1{,}17;\ M(\eta)=-6{,}9;D(\eta)=1{,}29;\ \sigma(\eta)\approx 1{,}14.$

24. $M\left(\xi\right)=3{,}2;D(\xi)=1{,}36;\ \sigma(\xi)\approx 1{,}17;\ M(\eta)=-5{,}9;D(\eta)=1{,}29;\ \sigma(\eta)\approx 1{,}14.$

25. $M\left(\xi\right)=4{,}2;\ D(\xi)=1{,}36;\ \sigma(\xi)\approx 1{,}17;\ M(\eta)=-4{,}9;D(\eta)=1{,}29;\ \sigma(\eta)\approx 1{,}14.$

26. $M\xi=-7{,}8;D(\xi)=1{,}36;\ \sigma(\xi)\approx 1{,}17;\ M(\eta)=-3{,}9;D(\eta)=1{,}29;\ \sigma(\eta)\approx 1{,}14.$

27. $c=\dfrac{1}{4};M(\xi)=-\dfrac{5}{3},\ D(\xi)\approx 1{,}42,\sigma(\xi)\approx 1{,}19.$ **28.** $c=\dfrac{1}{2};M(\xi)\approx 1{,}58,$

$D(\xi)\approx 0{,}08,\sigma(\xi)\approx 0{,}29.$ **29**. $c=2;M(\xi)\approx 0{,}29;\ D(\xi)\approx 0{,}04;\sigma(\xi)\approx 0{,}19.$

30. $c=2;M(\xi)=\dfrac{4}{3},D(\xi)=\dfrac{2}{9},\sigma(\xi)\approx 0{,}47$.**31**. $M(\xi)=5;D(\xi)\approx 5{,}33;$

$$\sigma(\xi)\approx 2{,}31;\ F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{8}, & 1<x\le 9;\\ 1, & x>9.\end{cases}\quad P(0<\xi<5)=F(5)-F(0)=\frac{1}{2}.$$

32. b=14; $M(\xi)=9;D(\xi)\approx 8{,}33;\sigma(\xi)\approx 2{,}89.$

33.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

$M\left(\xi\right)=1{,}2;D(\xi)=0{,}72;\ \sigma(\xi)\approx 0{,}85.$

34. $p_2=0{,}8;x_1=1;x_2=3.$**35.** $\sigma=4;\ a)P(\xi>56)\approx 0{,}07;\ б)\,P(\xi<42)\approx 0{,}023.$

36. а) [0;158]; б) 158 000 гр.од. **37.** $P(\xi\ge 20)=0{,}264;\sigma(\xi)=M(\xi)=15$

$f_\xi(x)=\dfrac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x};F_\xi(x)=1-e^{-\frac{1}{15}x}\ (x\ge 0);$ **38.** $\sigma\approx 317$ кг.

39. $\mathrm{P}(3<\xi<8)\approx 0{,}49>\mathrm{P}(-90<\xi<1)\approx 0{,}00023;\ \mathrm{P}(\xi\in\left(2;14\right))=0{,}9973.$

40. (-3;3).**41.** $\le 0,875$.**42.** $\ge \frac{1}{3}$. **43.** $\ge 0,92$. **44.**$\ge 0,9985$ **(**практично достовірна подія)**.45. (**75;105). **46.** $n \ge 1522$.**47.** $\ge 0,65$.**48.** а) 0,64; б) 0,36. **49.** 0,909**.**
50. Так. $M\left(\xi_n\right) = \frac{-a}{2n+1}$**,** $D\left(\xi_n\right) = a^2$**.**

Підсумковий контроль

Варіанти контрольної роботи з теми “Випадкові величини”

КР-2 «Випадкові величини»
Варіант №1

1. Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу:

x_k	-1	0	2	3
p_k	0,3	0,1	0,2	p_4

Знайти: а) p_4 ;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) дисперсію $D(\xi)$.

2. Неперервна випадкова величина ξ задана за допомогою щільності розподілу:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;2]\\ ax+1, x\in[0;2]\end{cases}.$$

Знайти: а)значення параметра a ;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) функцію розподілу $F_\xi(x)$;
г) $P(-0,5<\xi<1)$;
д) побудувати графіки $F_\xi(x)$ та $f_\xi(x)$.

КР-2 «Випадкові величини»
Варіант №2

1. Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу:

x_k	-2	1	3	4
p_k	0,2	0,1	0,2	p_4

Знайти: а) p_4 ;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) функцію розподілу та її графік.

2.Неперервна випадкова величина ξ задана за допомогою функції розподілу:

$$\mathrm{F}_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ ax^2+x,\ x\in(0;\frac{1}{2}]\\ 1,\ x>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Знайти: а) щільність розподілу $f_\xi(x)$;
б) значення параметра a ;
в) побудувати графіки $F_\xi(x)$ та $f_\xi(x)$;
г)знайти $P(-0,25<\xi<0,25)$.

КР-2 «Випадкові величини»
Варіант №3

1.Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу:

x_k	-1	1	2	3
p_k	0,3	0,2	0,2	p_4

Знайти: а) p_4 ;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) дисперсію $D(\xi)$.

2.Неперервна випадкова величина ξ задана за допомогою функції розподілу:

$$\mathrm{F}_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ 1-\cos x,\ x\in(0;\frac{\pi}{2}]\\ 1,\ x>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Знайти: а) щільність розподілу $f_\xi(x)$;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) $P(\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{\pi}{3})$.

КР-2 «Випадкові величини»
Варіант №4

1. Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу:

x_k	-1	0	3	4
p_k	0,2	0,3	0,2	p_4

Знайти: а) p_4 ;
б) функцію розподілу та її графік;
в) $P(0\le\xi<1,5)$.

2.Неперервна випадкова величина ξ задана за допомогою щільності розподілу:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[1;2]\\ \frac{a}{x^2}, x\in[1;2]\end{cases}.$$

Знайти:
а)значення параметра a ;
б) матсподівання $M(\xi)$;
в) дисперсію $D(\xi)$.

Додатки

Додаток 1. Таблиця значень функції Гауса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3863	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4669
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2965	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,4986
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,4993
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,4996
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,4998
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,4999
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,4999
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,4999
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,4999
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3185	1,55	0,4994	2,14	0,4838		

ЛІТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, Вища школа, 1979
2. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1988
4. Дороговцев А. Я, Сільвестров Д. С., Скорохол А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач), Київ, Вища школа, 1977
5. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей, Киев, Высшая школа, 1990
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособ. для вузов – М.: Высш. шк., 2005. – 404 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособ. – 12-е изд. - М.: Высш. образование., 2007. – 479 с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, М., Мир, 1984
9. Жлуктенко, В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: у 2-х ч. – Ч.1 Теорія ймовірностей. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
10. Медведєв, М.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика : підруч. / М.Г. Медведєв, І.О. Пащенко – К.: «Ліра-К», 2008. – 536 с.
11. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008
12. Листопад В.В., Островська О.В. Практикум з теорії ймовірностей із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій [Електронний ресурс]:навчальний посібник – К.: НУХТ, 2016. – 103 с.
13. Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 1. Випадкові події: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник , уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська, – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с.