НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“КИЄВО–МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В.

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів-інформатиків)

Київ — 2007

Зміст

Передмова

Математика є теоретичним фундаментом комп'ютерних наук, і тому їй приділяється велика увага при підготовці фахівців у цій галузі. Дискретна математика займає тут центральне місце, оскільки саме з неї виростають три гілки програмної інженерії — алгоритми, програми, структури даних. Добре закладений математичний фундамент освіти студента-інформатика дає можливість в подальшому навчити його методам оцінки складності алгоритмів, підбору оптимальної структури даних і створенню ефективного та прозорого коду програми.

Цей посібник розрахований в першу чергу на тих, хто тільки починає свій шлях в комп'ютерних науках — на студентів першокурсників (фрешів). Деяким з них спочатку досить важко пояснити для чого взагалі їм потрібна математика і що інформатика — це не швидке клацання по клавіатурі комп'ютера. Матеріал, що викладається, спирається лише на шкільні курси математики та інформатики. При цьому нагадуються деякі, особливо важливі, поняття цих курсів. Всі основні теореми наведені з повним доведенням, оскільки саме вони і дають справжню глибину розуміння матеріалу. Підбір задач, наведений після кожного розділу, також має сприяти цьому розумінню.

Після курсу "Основи дискретної математики"студент має прослухати наступні математичні курси — лінійна алгебра та аналітична геометрія, алгебра і теорія чисел, теорія алгоритмів та математична логіка, теорія ймовірностей та математична статистика, а також курси з інформатики — основи комп'ютерних алгоритмів, принципи роботи комп'ютерних систем, основи програмування та алгоритмічні мови, організація баз даних і знань, системи кодування інформації, функціональне програмування, логічне програмування, які весь час звертаються до понять та теорем дискретної математики.

Саме тому передбачається, що цей посібник стане настільним довідником студента-інформатика протягом усього його навчання і в бакалавраті, і в магістеріумі.

Вступ

Найважливішим вмінням, яким повинен володіти фахівець з комп'ютерних наук, є вміння логічно мислити, яке, з одного боку, дається від природи, а з іншого потребує вдосконалення і шліфування. Саме з логіки і починається посібник. При опрацюванні цього розділу слід особливу увагу звертати на відокремленні синтаксису від семантики — правил написання логічних формул від їх інтерпретацій. Після викладення найпростішої моделі логічних міркувань — числення висловлювань, розглядається числення висловлювальних форм, що мають інтерпретуватися, як предикати. Цей перехід еквівалентний переходу від арифметики до алгебри в шкільному курсі математики, коли після роботи з конкретними числами, з'являються змінні $x, y, z, \ldots$, яким можна надавати довільних значень з деякої множини — області інтерпретації.

Другий розділ присвячений методу математичної індукції та рекурентним співвідношенням. Слід зазначити, що в школі мало або зовсім не приділяється уваги методу математичної індукції, який є потужним засобом доведення математичних теорем, і без грунтовного розуміння його природи важко зрозуміти не тільки доведення, а і зміст самих теорем. Цей метод подається як логічний наслідок числення предикатів на множині натуральних чисел, що є по суті багатократною ітерацією відомого логічного наслідку modus ponens. Рекурентні співвідношення дають простий і ефективний метод генерування послідовностей (масивів), відповідний технічний пристрій називають авторегресійним фільтром. В той же час для потреб якісного аналізу часом необхідні явні формули для обчислення її елементів по номеру в послідовності. Розв'язанню так званих лінійних рекурентностей присвячена друга частина цього розділу. Зокрема, тут можна знайти явні формули для чисел Фібоначчі.

Третій розділ присвячений теорії множин і починається з парадокса Рассела, який показує, що занадто широке і легковажне вживання слів "сукупність елементів довільної природи", як "означення"поняття множини може привести до отримання суперечностей в самому фундаменті математики. При вивченні цього матеріалу слід пам'ятати, що зображення множин за допомогою діаграм Ейлера-Вена є просто ілюстраціями, які можуть бути джерелом гіпотез та ідей, а не математичними доведеннями. Особливу увагу приділено декартовим добуткам множин та їх відображенням. Адже такі важливі поняття як n–арна операція, визначена на множині, або поняття автомата, як математичної моделі механічного обчислювального пристрою, зручно формулювати саме в термінах декартових добутків множин.

Жоден курс дискретної математики не обходиться без комбінаторики. Її можна розглядати як науку про підрахування кількостей елементів в скінченних множинах, що описані якимось, часом дуже складним способом. Присутність в цьому розділі класичної ймовірністі є природною, оскільки розв'язання відповідних задач все одно зводиться до комбінаторики, крім того, елементи саме такої теорії ймовірності входять зараз в шкільні програми.

Поняття про потужність множин, як узагальнення поняття кількості елементів скінченної множини, є дуже важливим і для інформатиків. Адже множина кодів програм, які пишуться в скінченному алфавіті, є зліченною, а множина всіх нескінченних двійкових послідовностей має більшу потужність — континуум. Це означає, що для "більшості"послідовностей не існує програм, які б їх генерували. Взагалі, для інформатиків більш природною моделлю континуума є саме множина всіх нескінченних двійкових послідовностей, ніж множина дійсних чисел.

Відношення, записи, поля є основними поняттями в базах даних та базах знань. При цьому відповідні характеристичні предикати є просто запитами, чи належить даний запис даному відношенню. Операції над відношеннями розглядаються в шостому розділі. Особливу увагу приділено спеціальним типам відношень — відношенню еквівалентності та відношенню часткового порядку. Щодо останнього, то з цим відношенням програмісти мають справу постійно, адже початкові дані для роботи програми та й ті дані, що поступають по ходу її роботи, потрібно весь час впорядковувати в структури так, щоб ці дані можна було швидко знаходити і використовувати для подальшої роботи.

Роль графів в комп'ютерних науках важко переоцінити. Файлові структури на носіях пам'яті комп'ютерів, коди комп'ютерних програм, гіпертексти, інформаційні системи та бази даних, всім їм відповідають певні графи. Робота з цими структурами зводиться до побудови ефективних алгоритмів пошуку на графах або встановлення їх ізоморфізму. В цей розділ включено тільки початкові відомості про графи — ейлерові та гамільтонові графи, дерева, планарні графи, деякі задачі розфарбування графів.

Зауважимо, що цей посібник присвячений в першу чергу математичним основам. Знайомству з алгоритмами розв'язання конкретних масових задач, таких як з'ясування до якого класу відноситься дана формула логіки, впорядкування масивів, побудова ейлерових та гамільтонивих циклів, пошуки на графах елементів з певними властивостями або знаходження оптимальних шляхів, зокрема найкоротших, присвячені наступні курси, зокрема, курс "Основи комп'ютерних алгоритмів".

Розділ 1

Елементи математичної логіки

Логіка, як аналіз методів побудови міркувань та логічних висновків, виникла в древній Греції і її становлення пов'язують в першу чергу з Аристотелем (384–322 до н.э.). Математична формалізація Аристотелевської логіки була здійснена англійським логіком Дж. Булем (1815-1864), якого вважають засновником математичної логіки. Числення висловлювань є найпростішою моделлю логічних міркувань людини.

1.1 Числення висловлювань

Наступні означення не є строгими і носять умовний характер.

Означення 1.1.1. *Висловлювання це твердження, якому за певних обставин можуть бути надані значення істина або хиба. Таке співставлення називаєтьcя* **інтерпретацією** *висловлювання.*

Просте висловлювання це висловлювання, яке не можна подати як сполучення певних більш коротких висловлювань.

Складені (непрості) висловлювання будуються з простих за допомогою різних сполучників "або", "та","отже"та інших.

Прості висловлювання будуть позначатись малими латинськими літерами $a, b, c, ...$, а непрості будемо позначати великими літерами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$. Надалі запис типу $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c)$ буде означати, що висловлювання $\mathcal{F}$ складається з простих висловлювань a, b, c.

Приклади

1. На Марсі існує життя.
2. Сьогодні сонячна погода.
3. Простих чисел скінчена кількість.
4. Та річка страшною мов відьма була.
5. Або дощик або сніг.

6. Якщо йде дощ, то на небі хмари.

7. Відомо, що якщо йде дощ, то на небі хмари і дорога мокра, а зараз дорога суха, отже, дощу і хмар немає.

Останні три висловлювання не є простими. Бо висловлювання 5 "складається"з простих: "буде дощ"та "буде сніг", а висловлювання 6 стверджує, що просте висловлювання "на небі хмари" є наслідком простого висловлювання "на небі дощ". Дійсно, хмари на небі є єдиною можливою причиною дощу, і тому, якщо він іде, то ми робимо висновок про їх наявність на небі. Останнє складене висловлювання є прикладом ще більш складного логічного наслідку.

Вивчення різних типів логічних наслідків з часи Аристотеля довгий час вважалося основною задачею логіки.

Не є висловлюваннями питальні та окличні речення: "Чи існує життя на Марсі?", "Героям слава!".

Означення 1.1.2. *Двохелементна множина* $T = \{$*істина, хиба*$\}$ *називається* **областю (множиною) істинності**. *Використовують також наступні позначення:*
$\mathrm{T} = \{true, false\}, \mathrm{T} = \{1, 0\}$.

Інтерпретацією простого висловлювання a *називається приписування йому значення істинності* $I(a) \in \mathrm{T}$.

Інтерпретація складеного висловлювання $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \dots)$ *проводиться в два кроки:*

1) простим висловлюванням $a, b, c, \dots$, *що входять у формулу* $\mathcal{F}$, *довільним чином приписуються значення істинності*

$$a \to I(a), b \to I(b), c \to I(c), \dots \qquad I(a), I(b), I(c), \dots \in \mathrm{T};$$

2) після цього значення істинності $I(\mathcal{F}) \in \mathrm{T}$ *однозначно вираховується виходячи з логічного сенсу сполучників висловлювання.*

1.1.1 Операції над висловлюваннями.

Операції над висловлюваннями це математична формалізація сполучників, за допомогою яких будуються складені висловлювання.

Визначити логічну операцію означає задати правило, яке за значеннями істинності висловлювань, що сполучаються, однозначно визначає значення істинності висловлювання, що отримано внаслідок такого сполучення (виконання логічної операції).

1. **Диз'юнкція.** Еквівалентні назви—"логічна сума", "або", "OR". Позначається $A \vee B$ Правило інтерпретації (інша назва–таблиця істинності)

$\frac{I(B)}{I(A)}$	0	1
0	0	1
1	1	1

2. **Кон'юнкція.** Еквівалентні назви — ”логічний добуток”, ”і”, ”AND”. Позначається $A \wedge B$ або $A\&B$.

Правило інтерпретації:

$\frac{I(B)}{I(A)}$	0	1
0	0	0
1	0	1

3. **Імплікація.** Еквівалентна назва — ”логічний наслідок”.

Позначається $A \to B$. Правило інтерпретації:

$\frac{I(B)}{I(A)}$	0	1
0	1	1
1	0	1

При цьому A називають умовою (достатньою для B) або **антецедентом** , а висловлювання B наслідком або **консеквентом**. Також говорять що умова B є необхідною для A.

4. **Еквівалентність.** Тоді і лише тоді, або необхідна і достатня умови:

$A \leftrightarrow B$. Правило інтерпретації:

$\frac{I(B)}{I(A)}$	0	1
0	1	0
1	0	1

Умова B є необхідною ($A \to B$) і достатньою ($B \to A$) для A. В математиці теореми такого характеру називають критеріями.

5. **Заперечення.** Частка "НЕ"позначається $\neg A$, з таблицею інтепретації:

$I(A)$	0	1
$I(\neg A)$	1	0

.

6. **Виключне або.** В українській мові зв'язка або може використовуватись як

для означення альтернативи ”або a або b”, так і для більш жорсткої форми — ”або тільки A або тільки B”, тобто підкреслюється неможливість одночасного виконання тверджень A і B. Таке значення зв'язки "або" моделює операція "виключеного або". Еквівалентна назва — "XOR". Позначається $\oplus$

Правило інтерпретації:

$\frac{I(B)}{I(A)}$	0	1
0	0	1
1	1	0

Ці операції моделюють відповідні сполучники мови. Але формально можна ввести і інші логічні операції.

Питання. Скільки існує бінарних операцій над висловлюваннями?

1.1.2 Синтаксис.

Правила написання речень називають синтаксисом. В численні висловлювань замість речень вводять поняття формули наступним чином:

1) $a, b, c...$ — (прості висловлювання) є формулами;

2) Якщо $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ -формули, то $\neg\mathcal{A}, \neg\mathcal{B}, (\mathcal{A}) * (\mathcal{B})$ також є формулами. (тут $*$ означає будь-яку з вищенаведених зв'язок) При цьому, $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ називаються підформулами формули $(\mathcal{A}) * (\mathcal{B})$.

Отже, тепер ми строго визначили, який вид може мати формула

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$$

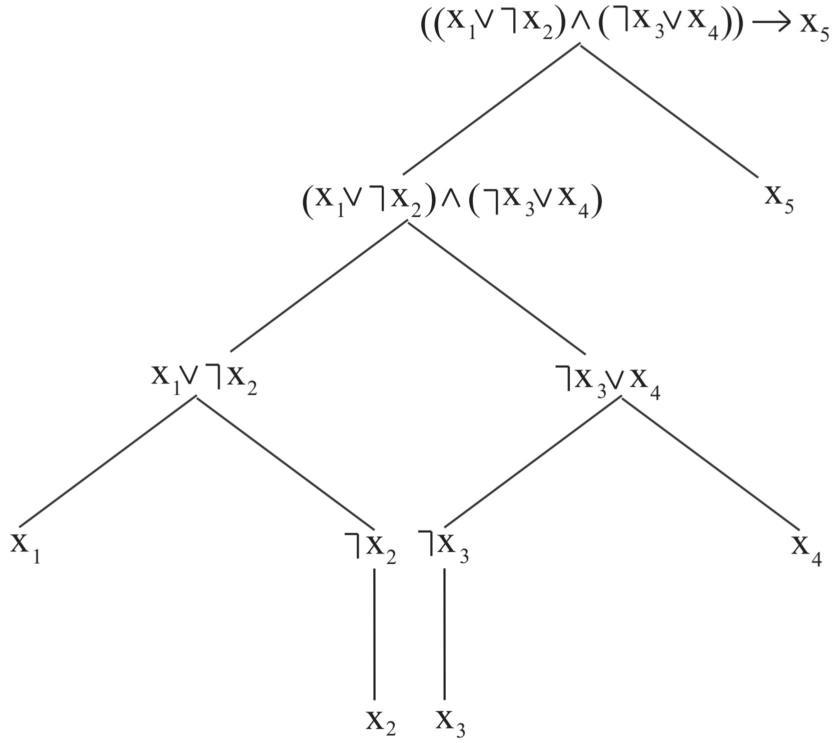
числення висловлювань.

Приклад 1.1.1. *Запишемо на мові числення висловлювань твердження "якщо на небі хмари, то іде дощ, але якщо віє вітер, то дощу немає". Розіб'ємо це складне речення на прості, літерою a позначимо просте висловлювання"на небі хмари", b — "буде дощ", c — "віє вітер". Тоді за допомогою логічних операцій кон'юнкції, імплікації і заперечення наше твердження можна записати у вигляді такої формули:*

$$(a \longrightarrow b) \wedge (c \longrightarrow \neg b).$$

Кожній формулі числення висловлювань можна поставити у відповідність її синтаксичне дерево. Воно будується наступним чином. Коренева вершина дерева відповідає заданій формулі. Якщо ця формула є простим висловлюванням, то дерево побудоване. Інакше, ця вершина з'єднується з двома новими вершинами, що відповідають підформулам, які з'єднані головною (останньою) зв'язкою $*$, яка вживалася при побудові початкової формули. Далі, кожну з цих двох вершин, якщо відповідні їм підформули не є простими висловлюваннями, знов з'єднуємо з двома новими вершинами, що відповідають підформулам, з'єднаним головними зв'язками відповідних підформул. І так далі, будуємо нові вершини дерева доти, доки не дійдемо до підформул, що є простими висловлюваннями.

Приклад 1.1.2. *Побудуємо синтаксичне дерево, що відповідає формулі* $(((x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_4)) \rightarrow x_5)$



Використовуючи правила інтерпретації логічних операцій (зв'язок) можна кожній формулі $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$ ставити у відповідність її **таблицю істинності**, яка має вигляд:

$I(a)$	$I(b)$	$I(c)$	...	$I(\mathcal{F})$
$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$
$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$

(1.1)

де $I(a), I(b), I(c), \ldots$ пробігають всі можливі значення істинності $* = 0, 1$, а $I(\mathcal{F})$ обчислюється по даному набору значень за правилом інтерпретації.

Приклад 1.1.3. *Побудуємо таблицю істинності формули*

$$F = (a \longrightarrow (a \longrightarrow b)) \vee b.$$

Для цього розіб'ємо на підформули, для яких побудуємо проміжні таблиці *істинності. Це полегшує побудову основної таблиці.*

a	b	$a \longrightarrow b$	$a \longrightarrow (a \longrightarrow b)$	F
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1

(1.2)

Означення 1: Формула $\mathcal{F}$ називається **тотожно-істиною (тавтологією)** , якщо $I(\mathcal{F}) = 1$ незалежно від способу інтерпретації простих висловлювань що входять в неї.

Зауважимо, що формула F з прикладу 1.1.3 не є тавтологією, оскільки існує інтерпретація ($a = 1$, $b = 0$), при якій формула F набуває значення 0.

Означення 2: Формула $\mathcal{F}$ називається **тотожно-хибною**, якщо $I(\mathcal{F}) = 0$ незалежно від способу інтерпретації простих висловлювань що входять в неї.

Означення 3: Інтерпретація простих висловлювань $I(a), I(b), I(c), \ldots$ називається **моделлю** формули $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$, якщо $I(\mathcal{F}) = 1$

Означення 4: Формула $\mathcal{F}$ називається **виконливою** , якщо вона має принаймні одну модель і не є тотожно-істинною.

Приклад 1.1.4. *Формула виду*

$$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A})$$

є тавтологією на якій базується метод доведення теорем "від супротивного".

Лема 1.1.1. *(Правило підстановки.)*

Якщо формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$ є тотожно-істинною (тотожно-хибною) і $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ – довільні формули числення висловлювань, то формула $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots)$ також є тотожно-істинною (тотожно-хибною).

Доведення очевидне.

Означення 1.1.3. *Формула $\mathcal{F}$ називається* **логічним наслідком** *формул $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \ldots, \mathcal{H}_n$, якщо для довільної інтерпретації I простих висловлювань, що входять в цю формулу з рівностей*

$$I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1 \quad \textit{випливає, що} \;\; I(\mathcal{F}) = 1.$$

Це будемо записувати наступним чином

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n \models \mathcal{F}.$$

Запис $\models \mathcal{F}$ означає, що $\mathcal{F}$ є тавтологією.

1.1.3 Основні типи логічних наслідків.

1. Правило **modus ponens**:

$$\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models \mathcal{B},$$

2. **modus tallens** :

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \models \neg\mathcal{A}$$

3. Правило силогізму:

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \models \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

4. Метод (правило) резолюцій:

$$\mathcal{X} \to \mathcal{F}, \neg\mathcal{X} \to \mathcal{G} \models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$$

або

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{F}, \neg\mathcal{X} \vee \mathcal{G} \models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$$

5. Правила введення диз'юнкції і кон'юнкці:

$$\mathcal{A} \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$$

6. Правила вилучення диз'юнкції і кон'юнкції:

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \models \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \models \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \models \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \models \mathcal{A}$$

7. Правила зняття подвійного заперечення і його введення:

$$\neg(\neg\mathcal{A}) \models \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \models \neg(\neg\mathcal{A}).$$

Теорема 1.1.1. *Наступні твердження є рівносильними*

1. $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n \models \mathcal{F}$;

2. Формула $(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{H}_k) \to \mathcal{F}$ *є тотожно-істиною;*

3. Формула $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \mathcal{H}_k \wedge \neg\mathcal{F}$ *є тотожно хибною;*

4. Формула $\neg\mathcal{H}_1 \vee \neg\mathcal{H}_2 \ldots \neg\mathcal{H}_n \vee \mathcal{F}$ *є тотожно-істиною.*

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що справедливим є такий ланцюг імплікацій 1. → 2. → 3. → 4. → 1.

1. → 2. Припустимо, що формула $\mathcal{F}$ є логічним наслідком формул $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$. Покажемо, що формула $(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{H}_k) \to \mathcal{F}$ є тотожно-істиною. Припустимо, що це не так. Це означає, що існує така інтерпретація I простих висловлювань, які входять в цю формулу, що $I((\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \wedge$

$\mathcal{H}_k) \to \mathcal{F}) = 0$. Звідки, використовуючи властивість імплікації і кон'юнкції, отримаємо $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$ і $I(\mathcal{F}) = 0$, що неможливо, оскільки формула $\mathcal{F}$ є логічним наслідком формул $\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$. Отримали суперечність, а отже формула $(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{H}_k) \to \mathcal{F}$ є тотожно-істиною.

2. $\to$ 3. Формула $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \mathcal{H}_k \wedge \neg\mathcal{F}$ може набувати значення істина для деякої інтерпретації I тоді і тільки тоді, коли $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$ і $I(\neg\mathcal{F}) = 1$, тобто $I(\mathcal{F}) = 0$. А це неможливо, оскільки формула $(\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{H}_k) \to \mathcal{F}$ є тавтологією. Отже формула $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \mathcal{H}_k \wedge \neg\mathcal{F}$ є тотожно хибною.

3. $\to$ 4. Якщо формула $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 \wedge \ldots \mathcal{H}_k \wedge \neg\mathcal{F}$ є тотожно хибною, то для будь-якої інтерпретації I, якщо $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$, то $I(\neg\mathcal{F}) = 0$. Припустимо, що для деякої інтерпретації I формула $(\neg\mathcal{H}_1 \vee \neg\mathcal{H}_2 \vee \ldots \vee \neg\mathcal{H}_n \vee \mathcal{F})$ набуває значення 0. Це можливо тоді і тільки тоді, коли $I(\neg\mathcal{H}_1) = I(\neg\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\neg\mathcal{H}_n) = I(\mathcal{F}) = 0$, звідки $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$ і $I(\mathcal{F}) = 0$, але оскільки виконується твердження 3., то для цієї інтерпретації I з того, що $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$ повинно випливати $I(\neg\mathcal{F}) = 0$. Отримали суперечність. Отже формула $\neg\mathcal{H}_1 \vee \neg\mathcal{H}_2 \ldots \neg\mathcal{H}_n \vee \mathcal{F}$ тотожно істина.

4. $\to$ 1. Те, що формула $\neg\mathcal{H}_1 \vee \neg\mathcal{H}_2 \vee \ldots \vee \neg\mathcal{H}_n \vee \mathcal{F}$ є тотожно істиною означає, що для довільної інтерпретації I з умови $I(\neg\mathcal{H}_1) = I(\neg\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\neg\mathcal{H}_n) = 0$ випливає $I(\mathcal{F}) = 1$. Тобто, для довільної інтерпретації I якщо $I(\mathcal{H}_1) = I(\mathcal{H}_2) = \ldots = I(\mathcal{H}_n) = 1$, то $I(\mathcal{F}) = 1$. А це, за визначенням логічного наслідку, означає, що формула $\mathcal{F}$ є логічним наслідком формул $\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$.

$\square$

Означення 1.1.4. *Дві формули $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ називаються* **еквівалентними**, *якщо для будь-якої інтерпретації I має місце $I(\mathcal{X}) = I(\mathcal{Y})$. Еквівалентність формул позначається таким чином $\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y}$.*

Зручно ввести в розгляд нульарні зв'язки - логічні константи - $\mathbf{0}, \mathbf{1}$, які за означенням завжди інтерпретуються як 0 та 1 відповідно. Тоді для формул $\mathcal{F}$, що є тотожно-істиними (тотожно-хибними формулами) будемо мати
$\mathcal{F} \simeq \mathbf{1}$ $(\mathcal{F} \simeq \mathbf{0})$.

Теорема 1.1.2. *Наступні твердження є рівносильними.*

А). $\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y}$;

Б). таблиці істинності формул $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ збігаються;

В). формула $\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}$ *є тавтологією.*

Наступні еквівалентності перевіряються безпосередньо за допомогою таблиць істинності:

1) ідемпотентність або закон поглинання:

$$(\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}) \simeq \mathcal{X} \simeq (\mathcal{X} \vee \mathcal{X});$$

2) комутативність:

$$(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \simeq (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X});$$
$$(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \simeq (\mathcal{Y} \vee \mathcal{X});$$

3) асоціативність:

$$((\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{Z}) \simeq (\mathcal{X} \wedge (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}));$$
$$((\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \vee \mathcal{Z}) \simeq (\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}));$$

4) дистрибутивність:

$$((\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{Z}) \simeq ((\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}) \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}));$$
$$((\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{Z}) \simeq ((\mathcal{X} \wedge \mathcal{Z}) \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}));$$

5) доповнювальність:

$$(\mathcal{X} \vee \neg\mathcal{X}) \simeq 1, \quad (\mathcal{X} \wedge \neg\mathcal{X}) \simeq 0, \quad \neg(\neg\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X};$$

6) виключення імплікації та еквівалентності:

$$\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y} \simeq (\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{Y} \to \mathcal{X});$$
$$(\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \simeq (\neg\mathcal{X} \vee \mathcal{Y});$$

7) закони де Моргана:

$$\neg(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \simeq (\neg\mathcal{X} \vee \neg\mathcal{Y});$$
$$\neg(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \simeq (\neg\mathcal{X} \wedge \neg\mathcal{Y}).$$

З наведених законів випливає
принцип двоїстості числення висловлювань:

якщо дві еквівалентні формули ($\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$) містять лише зв'язки $\neg, \vee, \wedge$, то заміною зв'язок $\vee$ на $\wedge$ і $\wedge$ на $\vee$ в обох формулах отримаємо еквівалентні формули $\widetilde{\mathcal{F}} \simeq \widetilde{\mathcal{G}}$.

Лема 1.1.2. *(Правило підстановки.) Якщо маємо еквівалентність формул*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots) \simeq \mathcal{G} = \mathcal{G}(a, b, c, \ldots)$$

і $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ *– довільні формули числення висловлювань, то маємо еквівалентність таких формул* $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots) \simeq \widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots)$.

Доведення очевидне.

1.1.4 Диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми. Введемо такі позначення для простих висловлювань

$$a^\epsilon = \begin{cases} a & \text{якщо} \ \ \epsilon = 1; \\ \neg a & \text{якщо} \ \ \epsilon = 0 \end{cases};$$

Означення 1.1.5. *1. Формула виду*

$$a_1^{\epsilon_1} \wedge a_2^{\epsilon_2} \wedge \ldots \wedge a_k^{\epsilon_k} \tag{1.3}$$

називаєтьcя **елементарною кон'юнкцією (кон'юктивним одночленом)**, *а формула виду*

$$a_1^{\epsilon_1} \vee a_2^{\epsilon_2} \vee \ldots \vee a_k^{\epsilon_k} \tag{1.4}$$

елементарною диз'юнкцією (диз'юнктивним одночленом). *При цьому допускається, що* $k = 1$, *тоді елементарна диз'юнкція (кон'юкція) не містить зв'язки* $\vee$, $(\wedge)$.

2. Формула, яка є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, тобто має вигляд

$$F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n,$$

де F_i- *формули виду* (1.3), *називаєтьcя* **диз'юнктивною нормальною формою ДНФ.**

Формула, яка є кон'юнкцією елементарних диз'юнкцій, тобто має вигляд

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n,$$

де F_i- *формули виду* (1.4), *називаєтьcя* **кон'юнктивною нормальною формою КНФ.**

Теорема 1.1.3. *Будь-яка формула числення висловлювань еквівалентна деякій ДНФ та КНФ.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що якщо формула $\mathcal{F}$ є елементарною диз'юнкцією (кон'юнкцією), то вона вже має вигляд ДНФ (КНФ), а еквівалентна їй формула $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \vee \mathcal{F})$ є відповідною КНФ (ДНФ).

В загальному випадкув для доведення теореми наведемо алгоритм зведення довільної формули $\mathcal{F}$ до ДНФ та КНФ.

Алгоритм:

1. За допомогою властивості 6) виключити зв'язки $\rightarrow, \leftrightarrow$ з формули $\mathcal{F}$;

2. Користуючись законами де Моргана та еквівалентністю $\neg(\neg\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$ внести зв'язку $\neg$ в дужки так, що після неї мають стояти тільки прості висловлювання;

3. Застосувавши закони дистрибутивності, зробити диз'юнкцію (кон'юнкцію) зовнішньою зв'язкою і отримати ДНФ (КНФ). Якщо ж зв'язки диз'юнкції або

кон'юнкції відсутні, то ми маємо елементарну кон'юнкцію або диз'юнкцію і слід скористатися зауваженням на початку доведення.

4. Використовуючи перші дві властивості з 5), а також еквівалентності

$$\mathcal{X} \vee 1 \simeq 1, \mathcal{X} \vee 0 \simeq \mathcal{X}, \mathcal{X} \wedge 1 \simeq \mathcal{X}, \mathcal{X} \wedge 0 \simeq 0,$$

$$\mathcal{X} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \simeq \mathcal{X}, \;\; \mathcal{X} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \simeq \mathcal{X}.$$

спростити отримані ДНФ, КНФ. □

Зведення формули до еквівалентної їй ДНФ чи КНФ є одним з методів перевірки, до якого класу вона відноситься.

Приклад 1.1.5. *Побудуємо ДНФ і КНФ формули*

$$F = (x \to y) \leftrightarrow (y \to x).$$

Спочатку за допомогою властивості 6 виключимо еквівалентність

$$((x \to y) \to (y \to x)) \wedge ((y \to x) \to (x \to y),$$

далі, за допомогою цієї ж властивості, замінимо імплікацію диз'юнкцією і запереченням

$$(\neg(\neg x \vee y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg(\neg y \vee x) \vee (\neg x \vee y)),$$

а потім використовуючи закони де Моргана внесемо $\neg$ *в дужки так, щоб знак заперечення стояв перед простими висловлюваннями*

$$((\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((\neg\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y)).$$

Враховуючи еквівалентність $\neg(\neg\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$ *і закони дистрибутивності, можемо написати такий ланцюг еквівалентностей*

$$\begin{aligned} &((x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y) \simeq \\ &\quad \simeq ((x \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg y \vee (\neg y \vee x)) \wedge (y \vee (\neg x \vee y)) \wedge (\neg x \vee (\neg x \vee y)) \simeq \\ &\qquad \simeq (\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee y). \end{aligned}$$

Використовуючи закони поглинання (див. еквівалентність 1), отримаємо

$$(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y).$$

Ми побудували КНФ початкової формули. Щоб отримати ДНФ, використаємо ще раз закони дистрибутивності і поглинання:

$$\begin{aligned} &(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \simeq (\neg y \wedge (\neg x \vee y)) \vee (x \wedge (\neg x \vee y)) \\ &\quad \simeq ((\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg y \wedge y)) \vee ((x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y)) \simeq ((\neg y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y)) \end{aligned}$$

Остання формула є ДНФ формули F.

1.1.5 Бульові функції.

Означення 1.1.6. **Бульовим вектором** *називається впорядкований набір нулів та одиниць:* $(*, *, \dots, *)$, $\ * = 0, 1$, *довжина набору називається розмірністю вектора;*

Бульовою функцією *(на честь англійського логіка Дж. Булля)* $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *від* n *змінних називається закон або правило яке ставить у відповідність кожному бульовому вектору або 0 або 1.*

Питання: Скільки існує бульових векторів розмірності n? Скільки існує бульових функцій від n змінних?

З шкільного курсу математики відомо, що найпростіший спосіб задання функції це табличний. Для бульових функцій таблиця буде мати вигляд

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	0	$\dots$	0	$*$
1	0	0	$\dots$	0	$*$
0	1	0	$\dots$	0	$*$
...	...	...	...	$\dots$	$*$
1	1	1	$\dots$	1	$*$

(1.5)

Бачимо, що таблиця бульової функції має такий же вид як і таблиця істинності формули числення висловлювань (1.1). Таким чином, кожній формулі числення висловлювання можна співставити бульову функцію, таблиця якої збігається з таблицею істинності формули. З іншого боку, можна вважати, що кожна бульова функція f від $n-$ змінних визначає операцію над висловлюваннями, яка набору висловлювань $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ ставить у відповідність висловлювання $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$, істинність якого однозначно вираховується по набору $I(\mathcal{A}_1), I(\mathcal{A}_2), \dots, I(\mathcal{A}_n)$ за таблицею (1.5).

Означення 1.1.7. *Набір логічних зв'язок називається* **повним**, *якщо для довільної бульової функції існує формула числення висловлювань, складена із застосуванням зв'язок* **тільки** *з цього набору, така, що її таблиця істинності збігається з таблицею значень даної бульової функції.*

Теорема 1.1.4.

1. Кожний з наборів логічних зв'язок: $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$ *є повним.*

3. Набір $\{\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$ *не є повним.*

Доведення. Для доведення повноти набору $\{\neg, \wedge, \vee\}$ запропонуємо наступний алгоритм побудови потрібної формули по таблиці (1.5) функції f. Якщо функція є тотожний 0, тобто $f \equiv 0$, то в якості такої формули можна взяти довільну тотожно-хибну формулу, наприклад $a \wedge \neg a$. Припустимо, що функція f приймає ненульові значення. Кожному рядку таблиці (1.5), в якому $* = 1$ співставимо елементарну кон'юнкцію (1.3) за правилом $\epsilon_i = 1$, якщо на $i-$ й позиції цього рядка стоїть 1 і $\epsilon_i = 0$ в протилежному випадку. З'єднавши отримані одночлени через диз'юнкції отримуємо потрібну формулу у вигляді ДНФ. Ця процедура побудована на тому, що елементарна кон'юнкція інтерпретується як 1 тоді і тільки тоді, коли кожен співмножник інтерпретується як 1.

Питання: Якою має бути ця процедура, щоб отримана формула була у вигляді КНФ?

Повнота системи зв'язок $\{\neg, \rightarrow\}$ випливає з еквівалентностей, які легко перевіряються,

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} \simeq \neg\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y};$$

$$\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \simeq \neg(\mathcal{X} \rightarrow \neg\mathcal{Y}),$$

а також властивості 6) на ст.11. Для решти наборів довести самостійно.

Для доведення неповноти системи зв'язок $\{\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$, зауважимо, що будь-яка формула записана тільки за їх допомогою, має таку властивість: якщо всі прості висловлювання, що входять в неї будуть проінтерпретовані як 1, то таким же буде значення інтерпретації і на всій формулі. Припустимо, що зв'язку $\neg$ можна виразити, через зв'язки вказаного набору. Тоді має місце еквівалентність

$$\neg x \simeq F(x, y, \ldots),$$

де формула F записана тільки за допомогою зв'язок із вказаного набору. Проінтерпретуємо всі прості висловлювання $x, y, \ldots$ як 1, тоді значення інтерпретатора на лівій формулі є 0, а на правій, як зазначалося є 1. Отримана суперечність доводить п. 2. $\square$

Означення 1.1.8. *ДНФ (КНФ) формули $\mathcal{F}$ називається* **досконалою** *ДДНФ (ДКНФ), якщо кожна її елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) містить по одному разу усі прості висловлювання, що входять у формулу $\mathcal{F}$.*

Легко бачити, що за алгоритм, запропонований при доведенні повноти набору $\{\neg, \wedge, \vee\}$, можна отримати формулу як у вигляді ДДНФ так і ДКНФ. Тим самим доведено

Наслідок 1.1.1. *Будь-яка формула, яка не є тотожно-хибною (тотожно-істинною), еквівалентна ДДНФ (ДКНФ).*

Приклад 1.1.6. *Побудуємо ДДНФ і ДКНФ формули*

$$F = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x).$$

Спочатку побудуємо таблицю істиності цієї формули

x	y	$I(x \longrightarrow y)$	$I(y \longrightarrow x)$	$I(\mathcal{F})$
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0

(1.6)

Для побудови ДДНФ випишемо рядки, для яких $I(\mathcal{F}) = 1$ *і відповідні їм елементарні кон'юнкції за правилом описаним в доведенні теореми (1.1.4). Рядку* $(0,0)$ *буде відповідати елементарна кон'юнкція* $(\neg x \wedge \neg y)$ *, а рядку* $(1,1)$ *—* $(x \vee y)$*. Отже ДДНФ формули буде*

$$(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y).$$

Для побудови ДКНФ випишемо рядки, для яких $I(\mathcal{F}) = 0$*, і для кожного такого рядка побудуємо елементарну диз'юнкцію за таким правилом:* $\epsilon_i = 1$*, якщо на* $i-$ *й позиції цього рядка стоїть 0 і* $\epsilon_i = 0$ *в протилежному випадку. Потім з'єднаємо отримані одночлени через кон'юнкції і отримаємо потрібну формулу у вигляді КНФ. Отже, формула* F *набуває значення 0 на векторах* $(1,0)$ *і* $(0,1)$*, відповідні елементарні диз'юнкції —* $(\neg x \vee y)$ *і* $(x \vee \neg y)$*. Таким чином ДКНФ формули* F *буде*

$$(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y).$$

Питання: Чи будуть повними системи зв'язок $\{\neg, \leftrightarrow\}, \{\neg, \oplus\}$?

Введемо в розгляд ще дві логічні операції:

$X|Y$ -штрих Шефера.- приймає значення "хиба"тільки коли X та Y істинні; стрілка Пірса (або стрілка Лукасевича), $X \uparrow Y$ яка приймає значення 1 тільки коли X та Y хибні.

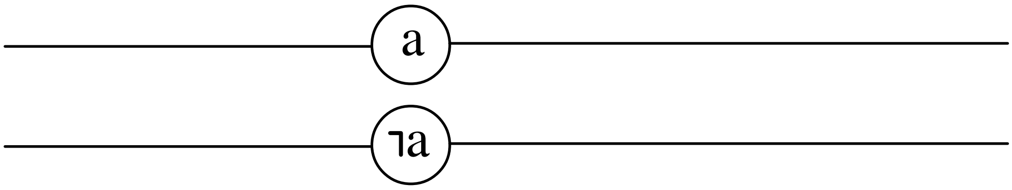
X	Y	$X\|Y$	$X \uparrow Y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Теорема 1.1.5. *Системи, що містять тільки одну зв'язку* $\{|\}$, $\{\uparrow\}$ *є повними.*

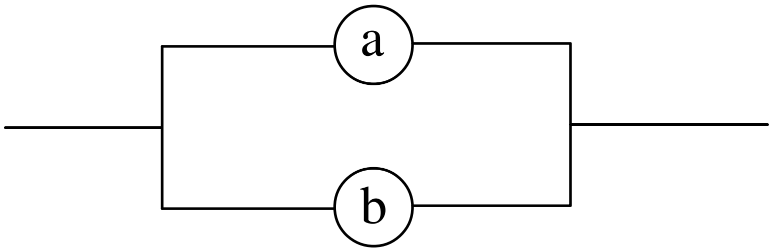
Довести теорему самостійно.

Релейно-контактні схеми.

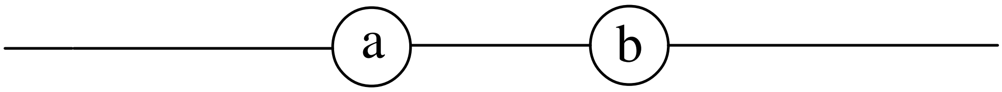
Релейно-контактні схеми складаються з включаючих та розмикаючих реле, які будуть зображуватися наступним чином:



Перше реле замикає ланцюг, якщо на нього подано сигнал 1 ($I(a) = 1$). Друге реле в цій ситуації ланцюг розриває. Сама схема утворюється шляхом композиції паралельних

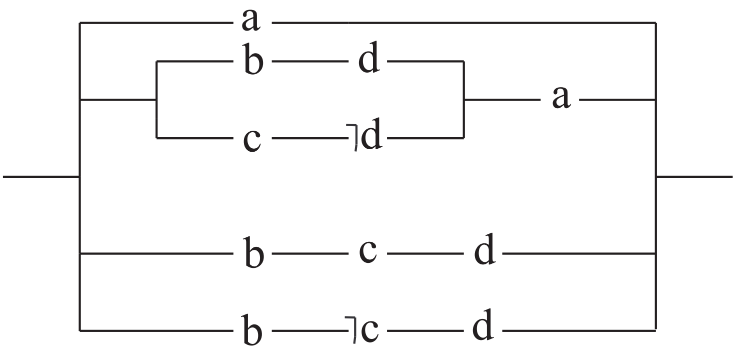


та послідовних



з'єднань. При цьому $I(a) = 1$ означає, що всі реле, позначені літерою a, замикають схему, а ті, що позначені $\neg a$ її розмикають. Таким чином кожній релейно-контактній схемі можна співставити бульову функцію, яку часто називають функцією провідності схеми, значенням якої, при даних станах вмикаючих та розмикаючих реле, є 1, якщо ток проходить через схему (лампочка горить), і 0 в протилежному випадку. Очевидно, що таблиця бульової функції провідності вищенаведеного паралельного з'єднання збігається з таблицею істинності формули $a \vee b$, а таблиця бульової функції провідності послідовного з'єднання збігається з таблицею істинності формули $a \wedge b$. Важливою інженерною задачею є побудова по таблиці значень бульової функції відповідної релейно-контактної схеми. В принципі цю задачу розв'язує запропонований вище алгоритм побудови ДДНФ (ДКНФ). Але отримані схеми можуть бути далекими від оптимальних. Задача мінімізації таких схем або бульових функцій є давньою складною задачею і в загальному випадку не має розв'язку. Тобто не існує загального алгоритму, який би за таблицею функції провідності будував схему з мінімальною кількістю реле.

Приклад 1.1.7. *Спростити схему*



Випишемо формулу F, що відповідає заданій схемі.

$$F = a \vee (((b \wedge c) \vee (c \wedge \neg d)) \wedge a) \vee (b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge \neg c \wedge d).$$

Використовуючи тотожність $\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$ можемо спростити першу частину формули:

$$a \vee (((b \wedge c) \vee (c \wedge \neg d)) \wedge a) \simeq a.$$

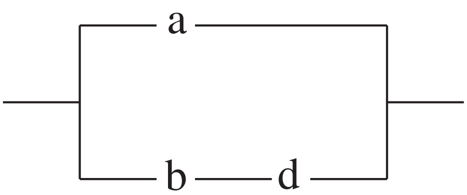
Використовуючи закони дистрибутивності і поглинання іншу частину формули F можна переписати у вигляді:

$$(b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge \neg c \wedge d) \simeq ((b \wedge d) \wedge (c \vee \neg c) \simeq (b \wedge d).$$

Отже формула F є еквівалентною формулі

$$a \vee (b \wedge d),$$

а спрощена схема, відповідно, буде мати вигляд



1.2 Висловлювальні форми і предикати.

Наведемо добре відомий силогізм Арістотеля.

Людина є смертною, Сократ — людина, **отже,** Сократ — смертний.

Введемо позначення для простих висловлювань: Людина смертна — a, Сократ — людина b, Сократ — смертний c. Тоді на мові числення висловлювань маємо такий логічний наслідок

$$a, b \models c,$$

який, очевидно, є неправильним ($I(a) = I(b) = 1, I(c) = 0$). Причиною цього є надзвичайно бідні виразні можливості числення висловлювань, як математичної моделі логічних міркувань людини. Більш складною моделлю логіки є числення висловлювальних форм або предикатів.

Означення 1.2.1. Висловлювальна форма - *це твердження, в якому пропущені певні слова; після заповнення порожніх місць назвами елементів з певної множини D висловлювальна форма стає висловлюванням.*

Приклад 1.2.1. *a) "____ є простим числом", тут D може бути множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$;*

b) "____ є людиною", $D-$ множина живих істот;

c) "____ є братом ____ ",$D-$ множина людей;

d) "число ____ більше за число ____ ", тут D може бути множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$;

e) "сумою чисел ____ та ____ є число ____ ", тут D може бути множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$;

f) "висловлювання ____ є логічним наслідком висловлювань ____,____,____,"тут D є множина формул числення висловлювань.

Зауважимо, що підстановка $6 \in D = \mathbb{N}$ у висловлювальну форму a) дає висловлювання "6 є простим числом", а підстановка імен людей "Микола"та "Оксана"у висловлювальну форму c) дає висловлювання "Микола є братом Оксани". Надалі ми будемо записувати висловлювальні форми у вигляді $A(x)$, $B(y)$, $F(x,y)$, $R(x,y,z)$, де змінним x, y, z можуть надаватись значення з множини D після чого отримуємо висловлювання

$$A(d_1), B(d_2), F(d_2, d_3), R(d_4, d_5, d_6), \quad d_i \in D, i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Означення 1.2.2. *Кількість змінних, від яких залежить висловлювальна форма, називається її* **арністю** .

Так, у наведених вище прикладах ми маємо висловлювальні форми арності 1 (унарні висловлювальні форми) у випадках $a), b)$, висловлювальні форми арності 2 (бінарні висловлювальні форми) у випадках $c), d)$, висловлювальні форми арності 3 (тернарні висловлювальні форми) у випадках $e), f)$. Зауважимо, що якщо надати певним змінним значень, то арність форми знижується. Наприклад, якщо $R(x,y,z)-$ тернарна висловлювальна форма і покласти $x := d_1 \in D$, то отримаємо бінарну форму $R(d,y,z)$, а якщо $x := d_1, z := d_3 \in D$, то маємо унарну форму $R(d_1, y, d_3)$. Природно вважати звичайні висловлювання (формули числення висловлювань) висловлювальними формами арності 0.

Означення 1.2.3. *Визначити дію інтерпретатора I_c на висловлювальній формі*

$\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *означає описати інтерпретацію всіх висловлювань, які вона задає. Тобто слід співставити кожному набору* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i \in D$, *елемент* $I(A)(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{0, 1\}$. *Отже, результатом дії інтерпретатора* I_c *на висловлювальну форму* A *є* **предикат** $I_c(\mathcal{A})$ *— функція, яка приймає значення в області істинності* $\{0, 1\}$.

Означення 1.2.4. *Функція, яка ставить у відповідність кожному набору* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i \in D$, *елемент з множини* $\{0, 1\}$ *називається n–місним (n–арним)* **предикатом** *визначеним на множині D.*

Найпростішою формою визначення предикату $I_c(\mathcal{A})(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ є табличний

$I(x_1)$	$I(x_2)$	$I(x_3)$	$\ldots$	$I(x_n)$	$I_c(\mathcal{A})(I(x_1), \ldots, I(x_n))$
d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\ldots$	d_{1n}	$*$
d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\ldots$	d_{2n}	$*$
d_{31}	d_{32}	d_{23}	$\ldots$	d_{3n}	$*$
...	...	...	...	$\ldots$	$*$
d_{k1}	d_{k2}	d_{k3}	$\ldots$	d_{kn}	$*$

. (1.7)

Тут $(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3} \ldots d_{in})$ пробігає всі можливі набори $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i \in D, k = |D|^n, * = 0, 1$.

Таким чином, щоб проінтерпретувати висловлювальну форму $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ як предикат, треба обрати область інтерпретації — множину D, і співставити цій формі предикат $I_c(\mathcal{A})$ відповідної арності, визначений на цій множині. Саме тому, надалі, замість числення висловлювальних форм будемо говорити про числення предикатів.

1.2.1 Операції над висловлювальними формами (предикатами)

Легко бачити, що всі введені раніше операції над висловлюваннями природним чином переносяться на висловлювальні форми. Враховуючи попереднє означення, зрозуміло що значить проінтерпретувати формули виду $A(x, y, z, \ldots) * B(x, y, u, v, \ldots)$, де $*$— одна з бінарних зв'язок числення висловлювань або формулу $\neg A(x, y, z, \ldots)$.

Крім цих операцій вводяться операції **квантування**.

Означення 1.2.5. *Якщо* $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*- висловлювальна форма арності n, то за означенням, висловлювальна форма* $\mathcal{F}(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \forall x_1 \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *арності $n - 1$ має інтерпретуватися наступним чином:*

1. *надати вільним змінним $x_2, x_3, \ldots, x_n$ формули $\mathcal{F}$ значень з множини D;*

2. *для обраних значень* $x_2 := d_2, x_3 := d_3, \ldots, x_n := d_n$ *проінтерпретувати всі висловлювання з множини* $\{\mathcal{A}(d, d_2, d_3, \ldots, d_n) | d \in D\}$;

3. *якщо принаймні для одного значення* $d \in D$ *результатом інтерпретації висловлювання* $\mathcal{A}(d, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *є* 0, *то висловлювання* $\mathcal{F}(d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *інтерпретується як 0, якщо ж для всіх значень* $d \in D$, *результатом інтерпретації висловлювання* $\mathcal{A}(d, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *є 1, то висловлювання* $\mathcal{F}(d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *інтерпретується як 1.*

Означення 1.2.6. *Якщо* $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*- висловлювальна форма арності* n, *то за означенням, висловлювальна форма* $\mathcal{F}(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \exists x_1 \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *арності* $n - 1$ *має інтерпретуватися наступним чином:*

1. *виконати пункти 1 та 2 з попереднього означення;*

2. *якщо принаймні для одного значення* $d \in D$ *результатом інтерпретації висловлювання* $\mathcal{A}(d, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *є* 1, *то висловлювання* $\mathcal{F}(d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *інтерпретується як 1, якщо ж для всіх значень* $d \in D$, *результатом інтерпретації висловлювання* $\mathcal{A}(d, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *є 0, то висловлювання* $\mathcal{F}(d_2, d_3, \ldots, d_n)$ *інтерпретується як 0.*

Зрозуміло що треба змінити в означеннях, щоб проінтерпретувати формули $\forall x_i \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\exists x_i \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

1.2.2 Синтаксис числення висловлювальних форм (предикатів).

В численні висловлювань найпростішими були формули, які не містили логічних зв'язок, які ми називали простими висловлюваннями. Аналогічним чином в численні предикатів визначаються атомарні формули, з яких за допомогою вищенаведених операцій будуються складені формули.

1. якщо $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)-$ висловлювальна форма, що не містить логічних зв'язок, і $t_1, t_2, ..., t_n$ певні функції від однієї або багатьох змінних, що визначені на множині D і приймають значення в множині D (їх називають термами), то формули виду $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ є формулами числення висловлювальних форм, які називають **атомарними**;

2. якщо $\mathcal{F}(x, y, \ldots)$, $\mathcal{G}(x, y, u, \ldots)$ є формулами числення висловлювальних форм, то і формули
$(\mathcal{F}(x, y, \ldots)) * (\mathcal{G}(x, y, u, \ldots))$, $\forall x \mathcal{F}(x, y, \ldots)$, $\exists y \mathcal{F}(x, y, \ldots)$, $\forall y \mathcal{G}(x, y, \ldots)$, $\exists x \mathcal{G}(x, y, \ldots)$ будуть також формулами числення висловлювальних форм. Тут $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

З означення синтаксису випливає, що формула $\mathcal{F}$ числення висловлювальних форм (предикатів) має такий вигляд

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}\left(A(t_1, t_2, \ldots), B(t_1, t_2, \ldots), C(t_1, t_2, \ldots), \ldots\right). \tag{1.8}$$

Тут $A, B, C, \ldots$ — атомарні формули (прості висловлювальні форми), $t_1, t_2, \ldots$ — функції від змінних $x_1, x_2, x_3 \ldots$, зокрема можливо $t_i = x_j$.

У випадку коли всі атомарні формули мають арність 0, тобто вони є простими висловлюваннями, маємо просто формулу числення висловлювань.

Змінна, що входить у формулу і не попадає під дію жодного квантора називається вільною, в протилежному випадку вона називається зв'язаною.

Приклад 1.2.2. *Формула $\forall y A(x, f(x, y)) \to B(x)$ є формулою числення предикатів, в якій $A(x, f(x, y))$ і $B(x)$ — атомарні формули, x, y — змінні (x – вільна, y — зв'язана), f — функціональна константа.*

Розглянемо виразні можливості цієї мови на прикладах і спробуємо записати на ній такі твердження:

Приклад 1.2.3. *1) "всі корови люблять сіно;"*

2) "не всі акули нападають на людей."

Ці твердження можна подати як висловлювальні форми, якщо ввести такі прості унарні висловлювальні форми:

$K(x) -$ "x" є коровою, $LC(x) -$ "x" любить сіно, $A(x) -$ "x" є акулою, $At(x) -$ "x" нападає на людей. А тепер спробуйте записати твердження 1), 2) на мові висловлювальних форм.

Наведемо тепер приклади з математики.

Приклад 1.2.4. *Послідовність дійсних чисел a_n є обмеженою.*

Послідовність дійсних чисел a_n є монотонна.

Послідовність дійсних чисел a_n є збіжною.

Введемо висловлювальну форму "$x < y$ число x менше за число y і функцію $f(x, y) = |x - y|$, визначені на множині всіх дійсних чисел. Тоді маємо такі висловлювальні форми

$$\exists c \forall n (a_n < c) \wedge (-c < a_n);$$

$$(\forall n \forall m ((n < m) \to (a_n < a_m))) \vee (\forall n \forall m ((n < m) \to (a_m < a_n)));$$

$$\exists A\ \forall \epsilon\ \exists n^*\ \forall n\ ((0 < \epsilon) \wedge (n^* < n)) \to (|a_n - A| < \epsilon).$$

1.2.3 Семантика числення висловлювальних форм (предикатів).

Означення 1.2.7. *Інтерпретація формули $\mathcal{F}$ здійснюється за такою схемою:*

1) Обирається множина $D-$ область інтерпретатора.

2) Визначаються інтерпретації всіх атомарних формул, що входять у формулу, шляхом співставлення їм довільних предикатів відповідної арності, визначених на множині D (див. означення 1.2.3).

3) Оскільки, замість змінних в предикат можна підставляти функції, які приймають значення в області D, то слід їх також визначити, наприклад табличками їх значень.

4) Користуючись правилами інтерпретації логічних зв'язок визначається дія інтерпретатора на самій формулі, тобто висловлювальна форма інтерпретується як відповідний предикат $I_c(\mathcal{F})$, будується таблиця вигляду (1.7).

5) Визначається інтерпретація I_v вільних змінних, яка вільним змінним формули $\mathcal{F}$ надає певних значень з області D, тобто обирається набір $(d_1, d_2, \ldots, d_n),\ d_i \in D:\quad I_v(x_i) = d_i$, після чого з таблиці (1.7) визначається значення $I(\mathcal{F}) \in \{0, 1\}$.

Приклад 1.2.5. *Побудуємо яку-небудь інтерпретацію формули*

$$\mathcal{F} = \forall y A(x, f(x, y)) \to B(x)$$

з попереднього прикладу.

1. Оберемо трьох-елементну область $D = \{a, b, c\}$

2. Визначимо бінарний предикат A на цій множині:

$\frac{y}{x}$	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0

Визначимо унарний предикат B

a	b	c
1	0	0

3. Співставимо функціональній константі f функцію $I_c(f) : D \times D \to D$, яку ми задамо таблицею:

$\frac{y}{x}$	a	b	c
a	b	c	c
b	a	a	b
c	b	b	b

4. Складемо таблицю предиката $I_c(\forall y A(x, f(x,y)) \to B(x))$

a	b	c
1	1	0

5. Якщо вільну змінну x як b ($I_v(x) = b$), то $I(\mathcal{F}) = 1$, а якщо покласти $I_v(x) = c$, то маємо $I(\mathcal{F}) = 1$.

Означення 1.2.8. *Означення тотожно-істинної, виконливої, тотожно-хибної, еквівалентних формул, а також логічного наслідку, дані раніше для числення висловлювань, дослівно переносяться на числення висловлювальних форм.*

Зауважимо тільки, що довільність тут полягає у виборі довільної множини D (п. 1 означення інтерпретації довільної формули), довільних предикатів для інтерпретації атомарних формул, п. 2, довільних функцій однієї або багатьох змінних, визначених на D, які приймають значення теж в цій множині п.4, виборі довільних значень для присвоєння вільним змінним п. 5.

Повернемося тепер до силогізму Аристотеля і спробуємо сформулювати цей логічний висновок через висловлювальні форми. Для цього введемо висловлювальні форми: Людина(x) x є людиною, Смертний(x) x є смертним, тоді силогізм запишеться наступним чином:

$$\forall x(\text{Людина}(x) \to \text{Смертний}(x)), \text{Людина}(\text{Сократ}) \models \text{Смертний}(\text{Сократ}).$$

Дійсно, якщо
$I(\ \forall x$ (Людина(x) $\to$ Смертний(x))) $= 1$, то
$I($ Людина(Сократ) $\to$ Смертний(Сократ)) $= 1$, тоді за modes ponens маємо

$$\text{Людина}(\text{Сократ}) \to \text{Смертний}(\text{Сократ}), \text{Людина}(\text{Сократ}) \models \text{Смертний}(\text{Сократ}).$$

Теорема 1.2.1. *Дві формули $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ числення предикатів еквівалентні тоді і тільки тоді, коли формула $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ є тотожно-істинна.*

Всі еквівалентності числення висловлювань мають місце і в численні предикатів.

Приклад 1.2.6. *Доведемо таку еквівалентність формул числення предикатів*

$$(\forall x \mathcal{A}(x)) \land (\forall x \mathcal{B}(x)) \simeq \forall x(\mathcal{A}(x) \land \mathcal{B}(x)).$$

Покладемо $\mathcal{F} = (\forall x \mathcal{A}(x)) \land (\forall x \mathcal{B}(x))$, $\mathcal{G} = \forall x(\mathcal{A}(x) \land \mathcal{B}(x))$. Припустимо, що для деякої інтерпретації I маємо $I(\mathcal{F}) = 1$. Тоді для цієї інтерпретації маємо $I(\forall x \mathcal{A}(x)) = I(\forall x \mathcal{B}(x)) = 1$, Звідки, для всіх $d \in D$ будемо мати $I(\mathcal{A}(d)) =$

1, $I(\mathcal{B}(d)) = 1$, *а отже* $I(\mathcal{A}(d) \wedge \mathcal{B}(d)) = 1$. *Таким чином отримуємо, що* $I(\mathcal{G}) = 1$.

Припустимо тепер, що для деякої інтерпретації I *маємо* $I(\mathcal{F}) = 0$. *Це означає, що або* $I(\forall x \mathcal{A}(x)) = 0$ *або* $I(\forall x \mathcal{B}(x)) = 0$. *Не втрачаючи загальності будемо вважати, що виконується перша рівність. З неї випливає, що існує елемент* $d^* \in D: \ I(\mathcal{A}(d^*)) = 0$. *Звідси отримуємо, що* $I(\mathcal{A}(d^*) \wedge \mathcal{B}(d^*)) = 0$, *а отже* $I(\mathcal{G}) = 0$. *Цим еквівалентність формул доведена.*

Наведемо також інші приклади еквівалентностей числення предикатів

$$\neg \forall x \mathcal{A}(x) \simeq \exists x \neg \mathcal{A}(x),$$
$$\neg \exists x \mathcal{A}(x) \simeq \forall x \neg \mathcal{A}(x),$$

Вправа 1.2.1. *Перевірити, що формули наведені вище є еквівалентностями.*

Вправа 1.2.2. *Перевірити, чи справді мають місце наступні еквівалентності:*

$$(\forall x \mathcal{A}(x)) \vee (\forall x \mathcal{B}(x)) \overset{?}{\simeq} \forall x (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)),$$

$$\forall x \forall y \mathcal{A}(x, y) \overset{?}{\simeq} \forall y \forall x \mathcal{A}(x, y),$$

$$\forall x \exists y \mathcal{A}(x, y) \overset{?}{\simeq} \exists y \forall x \mathcal{A}(x, y),$$

$$\exists x \forall y \mathcal{A}(x, y) \overset{?}{\simeq} \forall y \exists x \mathcal{A}(x, y)?$$

1.3 Задачі

1. Наступне складне речення розкласти на прості висловлювання і записати за допомогою логічних зв'язок:
   a) Ведмідь зможе поїсти меду тоді і тільки тоді, коли він полізе на дерево, і на цьому дереві будуть жити дикі бджоли.
   b) Якщо я піду в ліс і побачу там ведмедя, то сильно злякаюсь, а якщо я сильно злякаюсь, то забуду про зустріч з другом, отже, щоб не забути про зустріч з другом, я не піду до лісу.

2. Побудувавши таблиці істиності, перевірити, чи будуть такі формули тавтологіями:
   a) $(d \leftrightarrow c) \to (d \to c)$,
   b) $(c \to \neg d) \to (d \to \neg c)$,

c) $((c \to d) \to c) \to d$,
d) $(a \to b) \to ((a \vee c) \to b)$,
e) $(a \to (b \to c)) \leftrightarrow (b \to (a \to c))$.

3. Методом від супротивного пересвідчитися, чи будуть тавтологіями такі формули:
1) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_3))$,
2) $((\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \to (p_1 \to p_3))$,
3) $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$,
4) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_3 \to p_4)) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_4))$,
5) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_3 \to p_2) \wedge (p_4 \to p_2)) \longrightarrow ((p_1 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \to p_2)$,
6) $((p_1 \to p_2) \vee (p_1 \to p_3) \vee (p_1 \to p_4)) \longrightarrow ((p_1 \to (p_2 \vee p_3 \vee p_4))$.

4. Чи є логічними такі міркування: а) якщо Петров є членом нашої команди, то він обов'язково хоробрий і добре володіє технікою удару. Але він не належить до нашої команди. Отже, він або не хоробрий, або ж не володіє технікою удару; б) В спортивному клубі міста Кумертау є такі правила: той, хто не займається в шаховій секції, не може займатись в секції плавання. Кожен, хто відвідує заняття з шахів, повинен відвідувати також секцію плавання і спортивної гімнастики. Отже, кожен, хто займається в секції плавання в цьому клубі, повинен відвідувати заняття зі спортивної гімнастики.

5. Чи є логічними такі міркування: а) студент не складе екзамен, якщо погано до нього підготується. Якщо ж він не складе екзамен, то не буде отримувати стипендію. Отже, якщо студент погано підготується до екзамену, то він не матиме стипендії; б) якщо $x-2=\sqrt{x-2}$, то $x^2-4x+4=x-2$. Але остання рівність має місце лише тоді, коли $(x-2)(x-3)=0$, а це виконується лише в тому випадку, коли $x=2$ або $x=3$. Отже, $x=2$ і $x=3$ - корені початкового рівняння, тобто з $x=2$ випливає $\sqrt{x-2}=x-2$, а з $x=3$ випливає $x-2=\sqrt{x-2}$.

6. Чи є логічними такі міркування: а)намічена атака пройде вдало, якщо почнеться несподівано для суперника, або ж якщо його позиції будуть погано захищені. Захопити його зненацька можна лише тоді, коли він досить безпечний. Але якщо його позиції погано захищені, то він не буде безпечним. Отже, атака не вдасться; б) якщо $\sqrt{2}$ - раціональне число $\frac{m}{n}$ (нескоротний дріб), то $m^2 = 2n^2$. Найвищий степінь двійки, який є дільником m^2 — парний. Оскільки з рівності $m^2 = 2n^2$ випливає, що m^2 ділиться на 2, то цей степінь більше двох. Отже, m ділиться на 2. А тому n — непарне, тобто найвищий степінь двійки, на який ділиться $2n^2$, дорівнює 1 (<2). А це неможливо, бо $m^2 = 2n^2$. Таким чином, $\sqrt{2}$ ірраціональне число.

7. Чи буде повною така схема логічних зв'язок $\{\wedge, \leftrightarrow, 0\}$; ?

8. Використовуючи перетворення в алгебрі логіки, пересвідчитися, що формули
   $1)(\neg(x_1 \vee x_2) \to (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)) \vee \neg(x_1 \wedge x_3)$,
   $2)((x_1 \to x_2) \wedge (x_3 \to x_4) \wedge (x_5 \to x_6)) \to ((x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) \to (x_2 \wedge x_4 \wedge x_6))$,
   $3)((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \to (\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee ((x_3 \vee x_4) \wedge x_2)))$
   є тавтологіями.

9. Перетворити формули алгебри логіки
   $1)((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_1 \to x_3)) \vee \neg x_3$,
   $2)((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \to (x_1 \to (x_2 \vee x_3))$
   звівши кількість дій до однієї.

10. Чи правильно стоїть знак $\models$ у співвідношеннях
    а) $x \to y, y \to z, z \to u \models x \to u$;
    б) $x \wedge y \wedge \neg z, y \to z, y \to x \models y \to (x \vee z)$;
    в) $(x \wedge y) \to z, (x \vee y) \to \neg z \models x \wedge y \wedge z$;
    г) $x \to y, z \to u, \neg y \vee \neg u \models \neg x \vee \neg y$;
    д) $x \to y, x \to \neg y \models \neg x$;
    е) $\neg x \to \neg y, \neg x \to \neg(y \vee z), \neg z \models \neg x \vee \neg y$?

11. Набір формул $F_1, F_2, \ldots, F_s$ називається суперечливим, якщо логічними наслідками з формул $F_1, F_2, \ldots, F_s$ є тотожно фальшиві формули. Чи будуть суперечливими такі набори формул: а) $x \leftrightarrow \neg y, \neg x \to \neg z, x \vee z, z \to y$, б) $(x \vee y) \to z, \neg x \wedge y \wedge z$?

12. Дехто А тримає в руці (невідомо в правій чи в лівій) монету. Відомо, що А завжди або обманює, або говорить правду (але невідомо, що саме). Яке питання потрібно задати А, щоб взнати, в якій руці у нього монета?

13. Потрійним штрихом Шефера назвемо логічну дію $|_3$, яка визначається так: висловлювання $|_3(x_1, x_2, x_3)$ хибне тоді й тільки тоді, коли висловлювання x_1, x_2, x_3 - істинні. Чи буде система $\{|_3\}$ повною?

14. Перетворити формули алгебри логіки
    $a)(x_1 \vee (x_2 \to x_3)) \wedge ((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$;
    $b)\neg(x_1 \to x_3) \vee \neg(x_2 \to x_3) \vee x_3$,
    звівши кількість дій до двох.

15. Чи буде повною система логічних зв'язок $\{\oplus, 0, 1\}$?

16. Якщо формули $A \vee B$ і $\neg A \vee C$ є тавтологіями, то $B \vee C$ - також. Довести це.

17. Для яких n формула

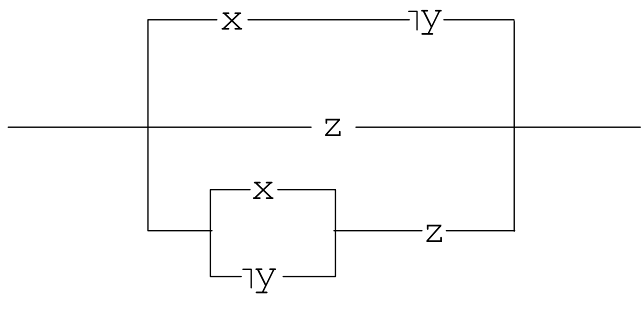
    a)$F_n(x) = (\ldots((((x \to \neg x) \to x) \to \neg x) \to x) \to \ldots)$;
    b)$F_n(x) = (\ldots((((x \to x) \to x) \to x) \to x) \to \ldots)$,
    що містить n знаків імплікації, є тавтологією?

18. За допомогою таблиць істинності побудувати ДДНФ та ДКНФ для формул алгебри логіки
    $a)((x \to y) \leftrightarrow (z \vee x)) \to x$,
    $b)((x \wedge y) \to \neg z) \vee (x \wedge (\neg y \to z)$,
    $c)(x \leftrightarrow ((z \wedge y) \to x)) \vee (y \wedge \neg z)$,
    $d)((x \leftrightarrow (y \vee z)) \to (y \wedge \neg x)) \to (y \vee \neg z)$.

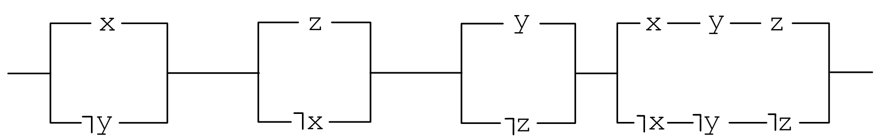
19. Застосовуючи алгоритм зведення до ДНФ та КНФ, побудувати ДНФ та КНФ, рівносильні формулам:
    $a)(x \wedge (y \vee \neg(z \to u))) \leftrightarrow (x \vee (\neg y \leftrightarrow z))$,
    $b)(x \wedge (y \vee \neg(z \to u))) \leftrightarrow (y \to (\neg u \leftrightarrow x))$,
    $c)(x \wedge \neg(z \leftrightarrow y))) \to (x \to (\neg y \vee x))$.

20. Спростити схему.

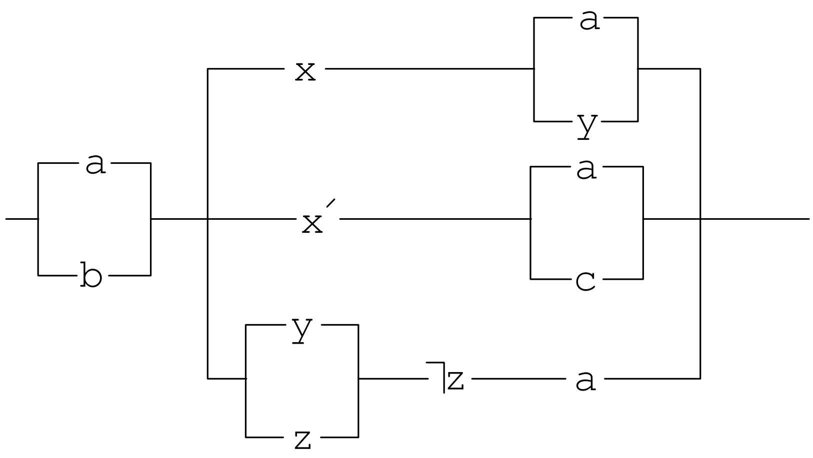
    a)



    b)



c)

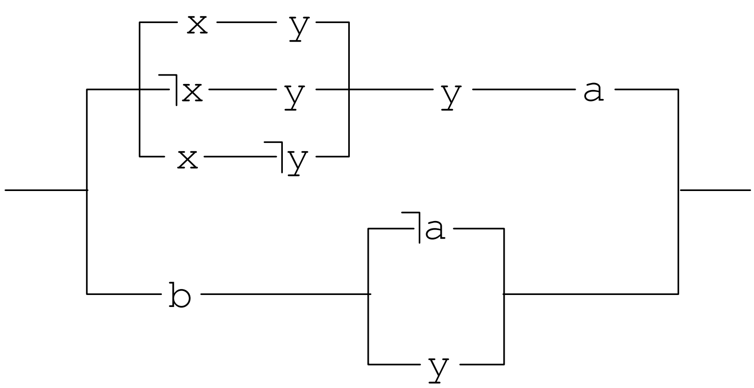


21. Побудувати мінімальну (таку, що містить найменш можливу кількість змінних) ДНФ, яка рівносильна формулі:
$a)((x \wedge y) \rightarrow z) \leftrightarrow x$,
$b)((x \vee z) \leftrightarrow y) \rightarrow \neg x)$.

22. Знаючи ДКНФ формул A, B, побудувати ДКНФ формули $A \vee B$.

23. Знаючи ДКНФ формул A, B, побудувати ДКНФ формули $A \wedge B$.

24. Спростити схему.



25. З n контактів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ скласти релейно-контактну схему, яка б спрацьовувала тоді й лише тоді, коли ввімкнено деякі, але не всі контакти.

26. З n контактів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ скласти релейно-контактну схему, яка б спрацьовувала тоді й тільки тоді, коли замкнено не більше k контактів.

27. Спростити схему.

а)

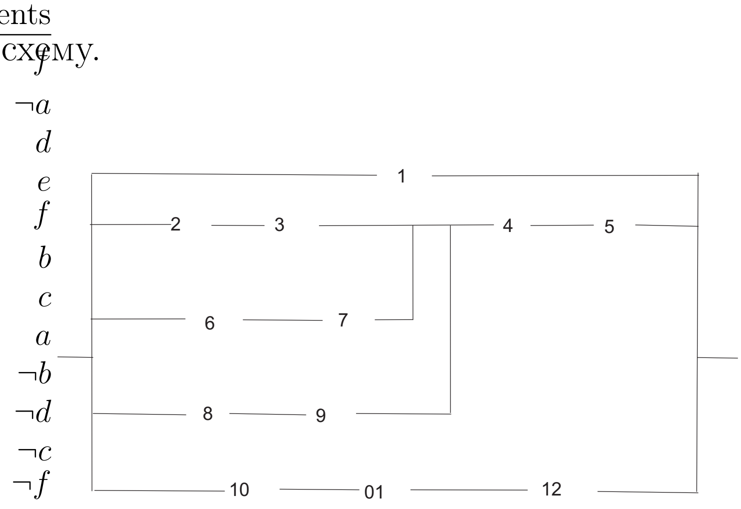


Рис. 1.1:

b)

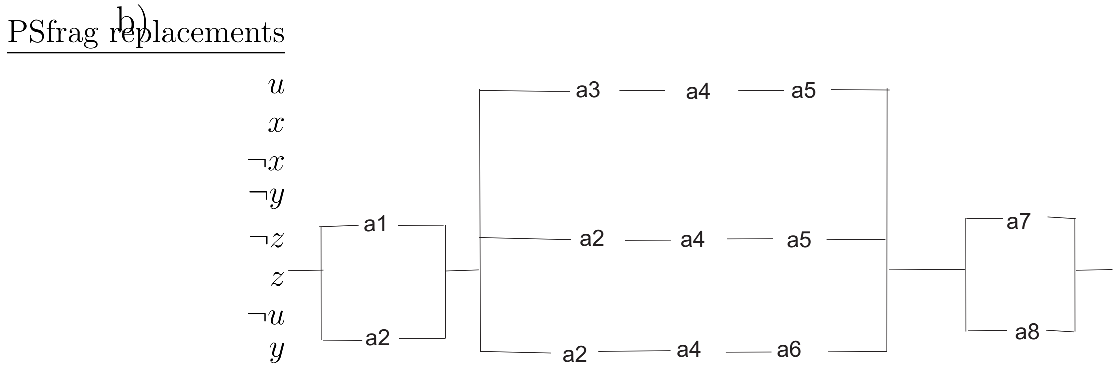


Рис. 1.2:

28. Скласти n-контактну схему з контактів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка б спрацьовувала тоді й тільки тоді, коли замкнено точно k контактів.

29. Між поверхами двоповерхового будинку є одна лампа. Побудувати схему так, щоб на кожному поверсі можна було вимикачем включати і виключати світло незалежно від положення іншого вимикача.

30. Потрібно, щоб в великому залі можна було включати і виключати світло за допомогою будь-якого з чотирьох вимикачів, що розташовані на чотирьох стінах залу. Скласти схему.

31. Комітет складається з п'яти осіб, рішення приймається більшістю голосів. Якщо голова голосує проти, рішення не приймається. Скласти таку схему, щоб голосування відбувалось натисканням на кнопку, і у випадку, коли рішення прийняте, включалась лампа.

32. Спростити схему.

a)

PSfrag replacements

a
$\neg a$
c
d
$\neg d$
$\neg e$
b
$\neg c$

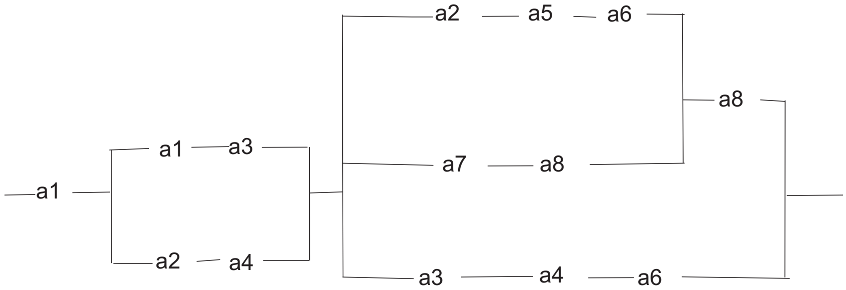


Рис. 1.3:

b)

PSfrag replacements

a
b
c
$\neg a$
$\neg b$
$\neg c$
d
$\neg d$

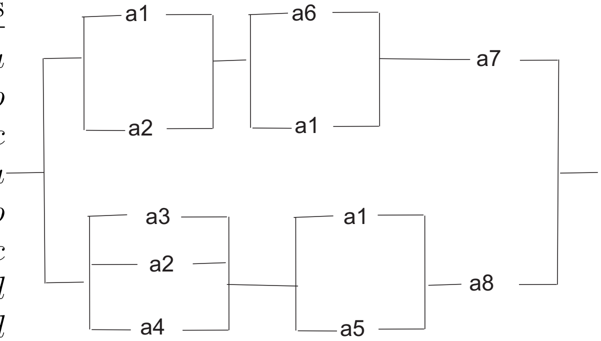


Рис. 1.4:

33. Записати на мові числення предикатів такі твердження

   1. Жодному лисому не потрібен гребінець.
   2. Не всі двійочники ледачі.
   3. Деякі митці не є неробами.
   4. Деякі нероби не є митцями.
   5. Той хто вміє приборкувати крокодилів заслуговує на повагу.
   6. Деякі свині не є орлами.
   7. Квадратні корені з деяких раціональних чисел - ірраціональні.
   8. Простих чисел більших за $10^{10^{10}}$ не існує.
   9. Деякі людожери - погані люди.

34. Нехай на множині людей задано предикати: Б (x, y) = "x батько y", М (x, y) = "x мати y", С (x, y) = "x син y", Д (x, y) = "x дочка y". Виразити

через них такі предикати: "x брат y", "x тітка y", "x сестра y", "x вуйко y", "x дід y з боку батька".

35. Нехай предикати $P_1(x)$ = "x - точка", $P_2(x)$ = "x - пряма", $P_3(x,y)$ = "x належить y"визначені на множині точок і прямих площини. Виразити через них предикати: "прямі x, y перетинаються", "точки x, y, z лежать на одній прямій","точки x, y лежать на прямій, що паралельна до прямої z", "прямі x і y - паралельні".

36. Записати формулою в сигнатурі P_1, P_2, P_3 твердження:
a)через кожну точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну до даної.
b) "дві прямі перетинаються не більше ніж в одній точці".
c) "через кожні дві точки можна провести тільки одну пряму".

37. Нехай $1(x), 0(x), S(x,y,z), P(x,y,z)$ такі предикати визначені на множині $\mathbb{N}^+$ натуральних чисел (з нулем): $1(x) = 1$ лише тоді, коли $x = 1$; $0(x) = 1$ лише тоді, коли $x = 0$; $S(x,y,z) = 1$ лише тоді, коли $x+y = z$ $P(x,y,z) = 1$ лише тоді, коли $xy = z$. Виразити через $1(x), 0(x), S(x,y,z), P(x,y,z)$ такі предикати:

a: числа x та y рівні $(x = y)$;

b: $x < y$;

c: $x \geq y$;

d: число x ділиться на число y ;

e: число x є часткою від ділення числа y на число z;

f: число x є остачею від ділення числа y на число z;

g: $Pr(x)$ = "x - просте число";

h: $Even(x)-$ "x — парне число";

i: $Mpr(x,)$ = "x, y — взаємно прості числа";

k: число x є добутком двох простих чисел;

l: Числа x, y, z утворюють піфагорову трійку;

m: З відрізків довжини яких дорівнюють x, y, z можна скласти трикутник;

n: $x = \max(y,z)$, $\quad x = \min(y,z)$.

o: $x = 10$

p: x дорівнює $2y + 3z$.

38. Чи будуть тотожноістиними такі формули:
   а) $\forall x A(x) \to A(y)$;
   б) $\neg(\forall x A(x)) \leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$;
   в) $\forall x(A(x) \to B(y)) \leftrightarrow (\exists x A(x) \to B(y))$?

39. Чи будуть виконливими формули: а) $(\forall x A(x,y) \vee \neg B(y)) \to A(x,x)$;
   б) $\forall x \forall y((\exists x A(x,y) \wedge \forall y A(x,y)) \leftrightarrow A(x,x))$?

40. Нехай предикати $P_1(x,y), P_2(x,y), T(x)$ задано на множині $\{a,b,c\}$ таблицями значень:

P_1	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	1
c	0	1	0

P_2	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	1
c	1	0	1

	T
a	1
b	1
c	0

   Побудувати таблиці значень предикатів:
   а) $\exists y(\forall x P_1(x,y) \to P_2(x,y)) \leftrightarrow T(x)$;
   б) $\exists x(T(x) \leftrightarrow \forall y P_1(x,y)) \wedge P_2(x,y)$;
   в)$\forall x \exists y(\forall x T(x) \to (\exists y P_1(x,y) \vee \forall x P_2(x,y)))$.

41. Чи будуть виконливими формули: а) $\exists x \forall y(A(x,y) \to \forall z B(x,y,z))$; б) $A(x) \to \forall y A(y)$?

42. Використовуючи поняття логічного наслідку для логіки предикатів, пересвідчитися, чи будуть правильними такі міркування: а) якщо функція диференційовна на даному проміжку, то вона неперервна на ньому. Функція $y = \sin x$ диференційовна на проміжку $[0,\pi]$. Отже, вона неперервна на ньому; б) якби хто-небудь міг розв'язати цю логічну задачу, то й студент Іванов розв'язав би її. Але він її не розв'язав. Отже, ця задача нерозв'язна; в) якщо кожен з двох людей є родичем третього, то вони також родичі. Іванов і Петров - родичі Сидорова. Отже, Іванов є родичем Петрова; г) якщо число розкладається на добуток s різних простих чисел, то воно має 2^s різних дільників. Дане число має точно 2^s різних дільників. Отже, воно розкладається на добуток s різних простих чисел.

Розділ 2

Метод математичної індукції. Рекурентні співвідношення

2.1 Метод математичної індукції

Нехай область інтерпретації D є множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$ і $A(x)$– деякий унарний предикат. Метод математичної індукції можна визначити, як такий логічний наслідок:

$$A(1), \forall n(A(n) \to A(n+1)) \models \forall n A(n). \tag{2.1}$$

Доведемо, що цей логічний наслідок правильний. Нагадаємо, що для цього треба довести що якщо для деякої інтерпретації I має місце

$$I(A(1)) = I(\forall n(A(n) \to A(n+1))) = 1,$$

то

$$I(\forall n A(n)) = 1.$$

Доведемо це методом від супротивного: припустимо, що для деякої інтерпретації I має місце $I(\forall n A(n)) = 0$. За означенням 1.2.5 маємо, що існують такі натуральні числа $m : I(A(m)) = 0$. Серед таких чисел завжди можна обрати найменше - m^* (це властивість множини натуральних чисел). Якщо $m^* = 1$, то маємо $I(A(1)) = 0$. Якщо ж $m^* > 1$, то $I(A(m^*-1)) = 1$, звідки $I(A(m^*-1) \to A(m^*)) = 0$. Згідно 1.2.5, це означає, що $I(\forall n(A(n) \to A(n+1))) = 0$. Отже, при зробленому припущенні рівності $I(A(1)) = I(\forall n(A(n) \to A(n+1))) = 1$ є неможливими. Цим твердження доведено.

Висловлювання $A(1)$ в наслідку (2.1) називається базою індукції, а формула $\forall n(A(n) \to A(n+1))$– індукційним кроком. Оскільки формула або твердження може залежати від декількох числових параметрів, що є натуральними числами, то слід обов'язково вказати по якому з них буде проводитись індукція.

Приклад 2.1.1. *Доведемо методом математичної індукції відому* **нерівність Бернулі:** *для довільного дійсного числа $x : x > -1$ і довільного на-*

турального n має місце:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Індукція буде вестись по n.

База індукції: $n=1$. При цьому значенні n будемо мати $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ і твердження справджується.

Індукційний крок: Припустимо, що виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$. Оскільки, за умовою, $x > -1$, то знак нерівності не зміниться, якщо її помножити на $(1+x)$. Тоді отримаємо:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

(тут відкинуто додатне число nx^2). Оскільки міркування проводилися для довільного значення n, то тим самим доведено індукційний крок:

$$\forall n \left(((1+x)^n \geq 1+nx) \to ((1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x)\right).$$

Отже, згідно (2.1), маємо

$$\forall n \ \ (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Приклад 2.1.2. Нерівність Коші.

Для будь-якого набору невід'ємних дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ має місце нерівність:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

причому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості чисел, тобто по n.

База індукції: $n=1$. В цьому випадку маємо $a_1 \leq a_1$ і нерівність тривіальна.

Індукційний крок. Покажемо, що якщо нерівність Коші має місце для сукупності з n чисел, то вона має місце і для сукупності з $n+1-$ го числа.

Покладемо $A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Тоді, припущення індукції можна записати наступним чином:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq (A_n)^n.$$

Оскільки числа a_i додатні і n>1, то $\frac{A_{n+1}}{A_n} > 0$ і $\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1 > -1$.

За нерівністю Бернулі маємо

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{n+1} = \left(1+\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}-1\right)\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}-1\right) =$$
$$= \frac{A_n+(n+1)A_{n+1}-(n+1)A_n}{A_n} = \frac{a_{n+1}}{A_n}.$$

Отже,

$$A_{n+1}^{n+1} \geq A_n^{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{A_n} = A_n^n \cdot a_{n+1}.$$

За припущенням індукції маємо,

$$A_n^n \cdot a_{n+1} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}.$$

Цим нерівність Коші доведено.

2.2 Рекурентні співвідношення.

Числовою послідовністю називається функція натурального аргументу $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Послідовність позначають $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$, або $a_n,\ n \geq 1$, де $a_n = f(n)$, $n \geq 1$. Визначити числову послідовність можна різними способами. Можна виписати явну формулу для обчислення n-го члена послідовності, наприклад $a_n = 2^n$, а можна записати формулу, яка вказує як наступний член послідовності може бути обчислений через попередні, наприклад $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$. При цьому звичайно треба визначити декілька початкових членів послідовності. Цей спосіб називають визначенням послідовності через рекурентні співвідношення.

Означення 2.2.1. *Рекурентним співвідношенням називається формула виду:*

$$a_{n+1} = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}),$$

де F деяка функція від k аргументів, яка дозволяє обчислювати наступні члени послідовності через значення k попередніх членів. Якщо вказати перші k члени послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то рекурентне співвідношення однозначно визначає послідовність a_m.

Якщо задано рекурентне співвідношення, то знаходження явних формул для послідовностей які задовольняють цьому співвідношенню називають розв'язанням рекурентного співвідношення.

Приклад 2.2.1. *Арифметична та геометрична прогресії визначаються такими рекурентними співвідношеннями*

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Приклад 2.2.2. *Рекурентне співвідношення*

$$a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)$$

визначає послідовність $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n - факторіал), якщо покласти $a_1 = 1$.

Приклад 2.2.3. *Розглянемо задачу про Ханойську вежу: є три кілочки, на одному з них знаходяться n дисків різного діаметра. І, для довільних двох сусідніх дисків, виконується таке правило: у нижнього диска завжди діаметр більше, ніж у верхнього. Тобто на одному з кілочків є "вежа", що складається з n дисків. Порахуємо, яку мінімальну кількість кроків потрібно зробити, щоб перекласти диски з одного кілочка на інший, якщо за один такий "переклад"можна перекласти тільки один диск, і диск більшого діаметра не можна класти на диск меншого діаметра. Позначимо мінімальну кількість таких кроків, яку потрібно зробити, щоб перекласти n дисків, через* T_n, $n \geq 1$. *Зрозуміло, що* $T_1 = 1$, $T_2 = 3$. *Для того, щоб перекласти n дисків з першого кілочка на другий, ми повинні перекласти спочатку перші* $n-1$ *дисків на третій кілочок (при цьому зробити* T_{n-1} *"перекладів"), потім n–ий диск перекласти на другий кілочок, а потім знову перекласти* $n-1$ *диск з третього кілочка на другий (при цьому знову зробивши* T_{n-1} *"перекладів"). Таким чином, якщо нам відома кількість кроків* T_{n-1}*, яку треба зробити, щоб перекласти* $n-1$ *диск, то кількість "перекладів"*T_n*, яку потрібно зробити, щоб перекласти n дисків можна обчислити за такою рекурентною формулою:*

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \;\; n \geq 1.$$

Лінійним рекурентним співвідношенням другого порядку називається співвідношення

$$a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{2.2}$$

Послідовності, що задовольняють цьому співвідношенню називаються лінійними рекурентними послідовностями другого порядку або послідовностями типу Фібоначчі.

Теорема 2.2.1. *Нехай задано співвідношення типу Фібоначчі (2.2) і задані початкові умови* a_1 *і* a_2. *Тоді, якщо* α *і* β *— різні корені рівняння*

$$x^2 - Ax - B = 0, \tag{2.3}$$

то розв'язок цього рекурентного співвідношення має вигляд

$$a_{n+1} = k_1\alpha^{n+1} + k_2\beta^{n+1}, \quad n \geq 2,$$

якщо рівняння (2.3) має єдиний корінь, тоді розв'язок цього рекурентного співвідношення має вигляд

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(k_1 + nk_2), \quad n \geq 2,$$

де k_1, k_2 *— деякі коефіцієнти, що залежать від початкових умов і коренів рівняння (2.3).*

Доведення. Припустимо спочатку, що рівняння (2.3) має різні корені. Тоді за теоремою Вієта $\alpha+\beta=A$ і $\alpha\cdot\beta=-B$. Використовуючи ці рівності співвідношення (2.2) можемо переписати у вигляді

$$a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n+\alpha\cdot\beta\cdot a_{n-1},\quad n\geq 2, \tag{2.4}$$

перенесемо αa_n в ліву частину рівності

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1}),\quad n\geq 2.$$

Остання рівність означає, що послідовність $a_{n+1}-\alpha a_n$ є геометричною прогресією зі знаменником β. Використовуючи формулу $n+1$–го члена геометричної прогресії можемо записати

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\quad n\geq 2.$$

Якщо ми тепер в рівності (2.4) перенесемо в ліву частину рівності βa_n, то отримаємо

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1}),\quad n\geq 2,$$

тобто геометричною послідовністю є також послідовність $a_{n+1}-\beta a_n$, а тому можемо записати

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1),\quad n\geq 2.$$

Отже ми отримали такі дві рівності

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\quad n\geq 2$$

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1),\quad n\geq 2$$

виключаючи з яких a_n і зробивши деякі перетворення можемо записати

$$a_{n+1}=\alpha^n\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}+\beta^n\frac{a_2-\alpha a_1}{\beta-\alpha},$$

Покладемо $k_1=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha(\alpha-\beta)}$ і $k_2=\frac{a_2-\alpha a_1}{\beta(\beta-\alpha)}$, таким чином остаточно отримаємо формулу

$$a_{n+1}=k_1\alpha^{n+1}+k_2\beta^{n+1},\quad n\geq 2.$$

Нехай тепер рівняння (2.3) має єдиний корінь α. Тоді рівність (2.4) можна переписати у вигляді

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\quad n\geq 2$$

або

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\quad n\geq 2.$$

Оскільки це співвідношення справедливе для будь-якого n, то можемо його записати і для a_n

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \alpha^{n-2}(a_2 - \alpha a_1), \quad n \geq 2.$$

Замінимо в попередній рівності a_n на отриманий вираз

$$a_{n+1} = \alpha(\alpha a_{n-1} + \alpha^{n-2}(a_2 - \alpha a_1)) + \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) = \alpha^2 a_{n-1} + 2\alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), \quad n \geq 2.$$

Тепер виразимо a_{n-1} через a_{n-2} і підставимо в формулу і т.д. Повторюючи аналогічну операцію декілька раз врешті отримаємо формулу

$$a_{n+1} = \alpha^n a_1 + n\alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), \quad n \geq 2.$$

Таким чином, ввівши позначення $k_1 = \frac{a_1}{\alpha}$ і $k_2 = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$, запишемо потрібну формулу

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(k_1 + nk_2), \quad n \geq 2.$$

□

Розв'язуючи лінійні рекурентні співвідношення другого порядку коефіцієнти k_1 і k_2 зручно обчислювати не за допомогою наведених вище формул (вони досить громіздкі), а використовуючи початкові умови.

Приклад 2.2.4. *Послідовність Фібоначчі задається рекурентним співвідношенням*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2$$

і початковими умовами $a_0 = 0$ і $a_1 = 1$. Випишемо відповідне квадратне рівняння $x^2 - x - 1 = 0$. Це рівняння має два корені $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ і $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, а тому розв'язок рекурентності будемо шукати у вигляді

$$a_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ця рівність повинна виконуватись для всіх n, а отже і для $n = 0$ і $n = 1$,а тому мають місце такі ланцюги рівностей

$$0 = a_0 = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = k_1 + k_2$$

$$1 = a_1 = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1.$$

Звідки знаходимо $k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $k_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. А отже отримаємо формулу

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2.3 Задачі

1. Довести тотожності:

   а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in N;$

   б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n \in N;$

   в) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1), \quad \forall n \in N.$

2. Довести, що число a ділиться на число b:

   а) $a = n^3 - 7n, \ b = 6, \ \forall n \in Z;$

   б) $a = 6^{2n-1} + 1, \ b = 7, \ \forall n \in N;$

   в) $a = 7^{n+1} + 8^{2n-1}, \ b = 19, \ \forall n \in N.$

3. Довести нерівності:

   а) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \ n \in N;$

   б) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}, \ n > 1;$

   в) $2^n > n^3, \ \forall n \geq 10;$

   г) $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n, \ a > 0, \ b > 0, \ \forall n \in N.$

4. На площині довільним чином проведено n прямих. Довести, що чорною і білою фарбами можна так замалювати площину, що будь-які дві частини, які мають спільну сторону, матимуть різний колір.

5. Довести, що функції:

   $$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

   $$S_n(x) = \sin((2n+1)\arcsin x)$$

   визначені на відрізку $[-1, 1]$ збігаються з деякими многочленами степенів n і $2n+1$ відповідно.

6. На скільки частин розбивають площину n прямих, з яких жодні дві не паралельні і жодні три не проходять через одну точку?

7. На скільки частин розбивають площину n гострих однакових кутів, причому жодні два промені не паралельні і жодні три не проходять через одну точку?

8. Довести тотожності:

   а) $\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}, \ \forall n \in N;$

   б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \ \forall n \in N;$

   в) $5 + 45 + \ldots + (4n+1)5^{n-1} = n5^n, \ \forall n \in N.$

9. Довести, що $\forall n \in N$ число a ділиться на число b:

   а) $a = 1 + 3^{3n+1} + 9^{3n+1},\ b = 13$;

   б) $a = 2n^3 + 3n^2 + 7n,\ b = 6$;

   в) $a = 5^n - 3^n + 2n,\ b = 4$.

10. Довести нерівності:

    а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24};\ n > 1$;

    б) $2^{n+4} > (n+4)^2,\ \forall n \in N$;

    в) $4^n \geq 3^n + n^2,\ \forall n \in N$;

    г) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},\ \forall n \in N$.

11. Послідовність Фібоначчі визначається такими умовами

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

    Довести, що

$$a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n.$$

12. Довести, що будь-яке число, яке більше ніж 7, можна розкласти у суму трійок і п’ятірок.

13. Довести, що для будь-якого $n \in N,\ n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7.

14. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються у двох точках і ніякі три не мають спільної точки. На скільки частин розіб’ється при цьому площина?

15. Розв’язати рекурентність:

    $a)$ $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$,

    $b)$ $a_0 = 1,\ a_1 = 5,\ a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$,

    $c)$ $a_0 = 1,\ a_1 = 4,\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$,

    $d)$ $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = -10a_{n-1} - 25a_{n-2}$.

Розділ 3

Елементи теорії множин.

Поняття множини відноситься до фундаментальних невизначених понять математики. Для подальшого нас цілком задовольнить наступне наївне "означення".

Означення 3.0.1. *Множина – однозначно визначена сукупність елементів довільної природи.*

Для позначення множини будемо вживати великі літери A, B, C, D, а для їх елементів — маленькі літери a, b, c, d. Запис $a \in A$ (еквівалентний $A \ni a$) означає, що a є елементом множини A. Зокрема запис $A = \{a, b, c, d\}$ означає, що множина A складається з елементів a, b, c, d . Наприклад, множина $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists l \in \mathbb{N} : k = 2l\}$ є множиною парних чисел.

На початку 20 сторіччя Бертран Рассел навів міркування, які показують небезпечність використання в наївному означенні слів: "сукупність елементів довільної природи".

3.1 Парадокс Рассела.

Розіб'ємо всі множини на два класи

1. Множини які не є елементами самих себе, тобто $X \notin X$.
2. Множини які є елементами самих себе, тобто $X \in X$.

До множин з класу 1 відноситься множина студентів в даній аудиторії, адже множина студентів не є студентом. Більшість множин, які вивчаються в математиці відносяться до цього класу. Але наївне означення дозволяє розглянути множину всіх множин або множину всіх нескінченних множин, які очевидно відносяться до множин другого класу. Зрозуміло, що будь-яка множина відноситься або до першого або до другого класу. Розглянемо множину M всіх множин з першого класу і поставимо питання: *до якого з двох класів належить M ?*

Припустимо, що до першого, тоді $M \notin M$, але ж за означенням елементами M є **всі** множини з першого класу, отже, M належить другому класу. Тоді $M \in M$, але множина M складається **тільки** з множин першого класу, отже, M належить першому класу.

На початку 20-го сторіччя цей парадокс викликав сумніви у самих основах математики. Причиною виникнення цього парадокса є те що наївне означення дозволяє оперувати з елементами довільної (невизначеної) природи.

Одним із шляхів подолання парадоксу є так звана теорія типів.

i) елементам (об'єктам) приписується тип 0;

ii) множинам елементами яких є елементи типу 0 приписується тип 1;

iii) множинам елементами яких є множини 1-го типу приписується тип 2;

iv) множинам, елементами яких є множини типу k приписується тип $k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Згідно цієї теорії слід розглядати лише множини, які мають певний тип.

Залишаючись в рамках наївної теорії множин, введемо деякі поняття і означення.

Означення 3.1.1. *Дві множини називають рівними* ($A = B$)*, якщо вони складаються з однакових елементів. Якщо всі елементи множини* B *є елементами множини* A*, то* B *називають підмножиною множини* $B \subseteq$ *або* $A \supseteq B$*, якщо при цьому існує елемент* a^**, який не є елементом* , $a^* \notin B$ *то називається власною підмножиною* $B \subset A$.

Очевидно, що $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$. Зауважимо, що запис $a \subset \{a, b, c, d\}$ не є правильним. Правильними будуть: $a \in \{a, b, c, d\}$ або $\{a\} \subset \{a, b, c, d\}$.

Доведення рівності $A = B$ двох множин можна провести в два кроки:

1. довести, що $A \subseteq B$, для чого слід довести, що виконується $\forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$;

2. довести, що $A \supseteq B$, , для чого слід довести, що має місце $\forall x \, (x \in B \Rightarrow x \in A)$;

У будь-якій задачі зручно вводити поняття універсальної множини Ω такої, що всі множини, які розглядаються в задачі, є її підмножинами, а також множини, що не містить жодного елемента $\emptyset$ (порожньої множини), яка скрізь позначається . Надалі Ω буде фіксованою множиною. Кількість елементів множини A будемо позначати $|A|$. Для множини з нескінченною кількістю елементів будемо писати $|A| = \infty$.

Поняття **функції** в математиці є не менш важливим. Нагадаємо означення пов'язані з цим поняттям.

Означення 3.1.2. **Функцією** *f визначеною на множині A, що приймає значення в множині B називається правило (закон), який ставить у відповідність кожному елементу $a \in A$ однозначно визначений елемент $f(a) \in B$; досить часто в цій ситуації говорять, що* **задано відображення** *з множини A в множину B і позначають це таким чином*

$$f : A \to B.$$

При цьому елемент $b = f(a)$ називається **образом** *елемента a, а сам елемент a називається* **прообразом** *елемента b.*

Для довільної підмножини $K \subseteq A$ образ множини K визначається наступним чином

$$f(K) = \{f(k) \in B | k \in K\} = \{b \in B | \text{існує } a \in K : \ f(a) = b\}.$$

Множина A називається **областю визначення** *функції f, а множина*

$$Imf = f(A)$$

областю значень *функції.*

Множина

$$f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$$

називається **повним прообразом** *елемента $b \in B$.*

Повним прообразом *множини $M \subseteq B$ називається множина*

$$f^{-1}(M) = \{a \in A | f(a) \in M\}.$$

Означення 3.1.3. *Функція (відображення) $f : A \to B$ називається відображенням* **в** *або* **ін'єкцією***, якщо кожен елемент множини B має не більше одного прообраза, тобто для довільного $b \in b$ або $f^{-1}(b) = \varnothing$ або $f^{-1}(b)$ є одноелементна множина.*

Можна сказати, що $f : A \to B$ називається **ін'єкцією***, якщо $\forall x_1, x_2 \in A$ таких, що $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$).*

Функція (відображення) $f : A \to B$ називається відображенням **на** *або* **сюр'єкцією***, якщо її область значень збігається з множиною B, тобто $Imf = B$.*

Іншими словами (відображення) $f : A \to B$ називається **сюр'єкцією** *якщо для довільного елемента $y \in B$ існує $x \in A$ такий, що $f(x) = y$.*

Функція (відображення) $f : A \to B$ називається **взаємно-однозначним** *відображенням або* **бієкцією***, якщо f є відображенням в та відображенням на одночасно, тобто є і ін'єкцією і сюр'єкцією.*

Одним з найпростішим способом визначення множини є визначення її характеристичної функції.

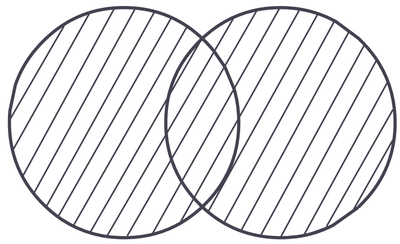
Означення 3.1.4. *Характеристичною або індикаторною функцією множини* $M: \ M \subseteq \Omega$ *називається функція, яка кожному елементу* $\omega \in \Omega$ *ставить у відповідність або* 0 *або* 1 *за правилом.*

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \textit{якщо} \quad x \in M \\ 0 & \textit{якщо} \quad x \notin M \end{cases}.$$

3.2 Операції над множинами.

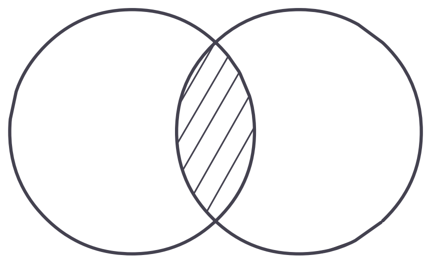
1. Об'єднання множин:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$$



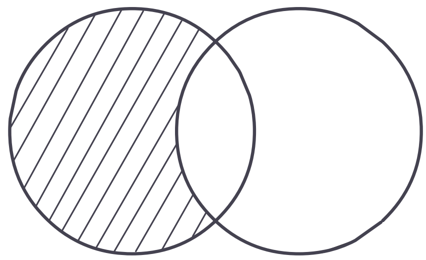
2. Перетин множин:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$



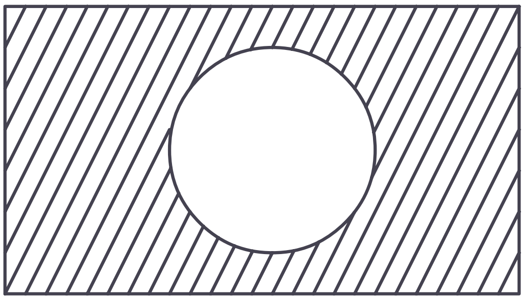
3. Різниця множин:

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$



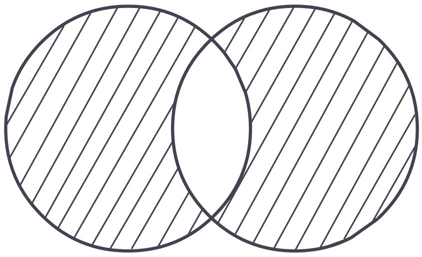
4. Доповнення множини:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$



5. Симетрична різниця множин:

$$A \triangle B = \{\omega \in \Omega \mid (\omega \in A \wedge \omega \notin B) \vee (\omega \in B \wedge \omega \notin A)\}.$$



Задача. Виразити індикаторні функції $\chi_{A*B}(x)$ через індикаторні функції $\chi_A(x), \chi_B(x)$, для кожної операції $*$ 1-5.

3.2.1 Властивості операцій над множинами.

1. Ідемпотентність:

$$A \cap A = A = A \cup A$$

2. Комутативність:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Асоціативність

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

4. Дистрибутивність

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

5. Доповнюваність

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

6. Правило де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Доведемо перший закон дистрибутивності за вище запропонованою схемою. Спочатку доведемо включення:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Для цього доведемо імплікацію:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Якщо $x \in A \cup (B \cap C)$, то можливі випадки:

1) $x \in A$;

2) $x \in B \cap C$.

У випадку 1) маємо:

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

У випадку 2) отримуємо:

$$x \in B \cap C \Rightarrow (x \in B) \wedge (x \in C) \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доведемо тепер протилежне включення:

$$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C).$$

Можливі випадки:

a) $x \in A$;

b) $(x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$.

У випадку a) отримуємо:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C).$$

У випадку b):

$$(x \in B) \wedge (x \in C) \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Цим доведено протилежне включення, а отже і рівність множин.

Як відомо, числа можна додавати і множити в довільній кількості. Якщо $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}- \quad n-$ елементна (скінченна) підмножина дійсних чисел, то завдяки властивостям комутативності та ассоціативності, однозначно визначені їх сума та добуток:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad P = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Оскільки ці закони мають місце і в теорій множин, то для довільної скінченної сукупності множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ можна визначити множини:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Якщо замість скінченної множини чисел ми маємо справу з нескінченною послідовністю: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, ...$, то вирази

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i, \quad \prod_{i=1}^{+\infty} a_i$$

називають числовим рядом та нескінченним добутком. Числове значення цих виразів, взагалі кажучи, не визначені і потребують поняття границі. Прикладом нескінченного ряду, для якого значення суми визначено, є сума спадної геометричної прогресії. На відміну від чисел, легко визначити об'єднання і перетин нескінченної послідовності множин:

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Взагалі визначеними є об'єднання і перетин довільної сукупності множин. Припустимо, що I довільна множина і $\{A_i | i \in I\}$ - довільна сукупність множин (можна сказати, що $i-$ "номер"множини), тоді

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega | \exists i \in I (\omega \in A_i)\} \tag{3.1}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega | \forall i \in I (\omega \in A_i)\}. \tag{3.2}$$

Означення 3.2.1. *Якщо множину можна A подати як об'єднання 3.1 підмножин, що попарно не перетинаються, тобто для довільних $i, j \in I$ таких, що $i \neq j$ має місце $A_i \cap A_j = \emptyset$, то будемо говорити що задано* **розбиття** *множини A.*

Узагальнені закони дистрибутивності

$$B \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i), \quad B \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \tag{3.3}$$

Узагальнені закони де Моргано

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \tag{3.4}$$

Доведення першого закону де Моргано.

$$\omega \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists j \in I (\omega \notin A_j) \Rightarrow \omega \in \overline{A_j} \Rightarrow \omega \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\omega \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \Rightarrow \exists k \in I (\omega \in \overline{A_k}) \Rightarrow \omega \notin A_k \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \omega \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

3.3 Декартів добуток множин.

Означення 3.3.1. *Декартовим добутком множин A та B називається множина впорядкованих пар (a, b), де $a \in A, b \in B$, тобто*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Впорядкованість тут означає, що в парі (a, b) визначено, що першим елементом є a, а другим є b. Отже, рівність $(a, b) = (b, a)$ можлива лише за умови $a = b$. Зауважимо також, що операція декартового добутку, взагалі кажучи не є комутативною, тобто $A \times B \neq B \times A$. Справді, якщо множина A є множиною цілих чисел, а B множиною літер, то запис (b, a) для елементів типу даних $A \times B$ приведе до змішування типів даних і відповідного повідомлення компілятора.

Означення 3.3.2. *Нехай $f : A \to B$ — функція визначена на множині A, яка приймає значення в множині B. Графіком функції f називається підмножина декартового добутку $A \times B$, яка визначається наступним чином*

$$\Gamma_f = \{(a, b) | b = f(a), a \in A\} \subset A \times B.$$

Якщо $A, B-$ множини чисел, тобто $A, B \subseteq \mathbb{R}$, то точки площини, з декартовими координатами $(a, f(a))$ називають також графіком функції.

Для трьох множин можна визначити такі добутки $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$ та

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Всі три множини є різними (різними типами даних), тобто операція декартового добутку не є асоціативною, але безумовно між вказаними множинами легко встановити взаємно-однозначну відповідність.

Дамо тепер саме загальне означення декартового добутку множин.

Означення 3.3.3. *Нехай $A_i, i \in I$, довільна сукупність множин ($I-$ довільна множина). Тоді множина функцій*

$$\alpha : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, \ \textit{таких, що} \ \ \forall i \ \ \alpha(i) \in A_i,$$

називаєтьcя декартовим добутком сукупності множин $\{A_i | i \in I\}$ і позначаєтьcя

$$\times_{i \in I} A_i.$$

Зокрема, для декартових добутків двох та трьох множин будемо мати такі множини номерів $I = \{1, 2\}$, $I = \{1, 2, 3\}$ відповідно. Для $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ відповідний декартів добуток можна записати у вигляді

$$\times_{i=1}^{n} A_i.$$

Якщо $I = \mathbb{N}$ і $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \ldots = \mathbb{R}$, то

$$\times_{i \in \mathbb{N}} A_i = \times_{i=1}^{+\infty} A_i$$

є множиною числових послідовностей.

Якщо $\alpha \in \times_{i \in I} A_i$, то $\alpha(i)$ називається проекцією α на множину A_i (позначається $Pr_i(\alpha)$) або $i-$ ю координатою елемента α.

Для довільної підмножини $\Lambda \subset \times_{i \in \mathbb{N}} A_i$ проекція на A_i визначається наступним чином:

$$Pr_i(\Lambda) = \{Pr_i(\lambda) | \lambda \in \Lambda\}.$$

Для довільного набору індексів $\{i_i, i_2, \ldots, i_k\}$ можна визначити проекцію

$$Pr_{i_1 i_2 \ldots i_k}\{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) | \text{існує} \ \ \alpha \in \times_{i \in I} A_i : \ Pr_{i_j}(\alpha) = a_{i_j}, \ j = 1, 2, \ldots k\}.$$

3.3.1 Відображення декартових добутків.

Означення 3.3.4. *Нехай $A_i = A,\ i = 1, 2, \dots, n$. Будь-яке відображення:*

$$f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} \mapsto A \tag{3.5}$$

називаєтьcя $n-$ арною операцією визначеною на множині A.

Приклад 3.3.1. *Нехай $A = \mathbb{N}$, відображення $Next : \mathbb{N} \ni x \mapsto x + 1 \in \mathbb{N}$, є прикладом 1- арної (унарної) операції на множині натуральних чисел, а відображення*

$$Sum : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{N},$$

$$Prod : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{N},$$

є прикладами операцій арності 2 (бінарних) на множині натуральних чисел. Відображення

$$(x, y, z) \mapsto \text{НСД}(x, y, z), \quad (x, y, z) \mapsto \text{НСК}(x, y, z)$$

є прикладами операцій арності 3 (тернарних операцій).

Для бінарних операцій замість запису $f(x, y)$ вживають запис $x * y$, де $*-$ символ операції.

Автомати

З точки зору інформатики автомат є математичною моделлю певного механічно-обчислювального процесу, тобто роботи комп'ютера при розв'язанні конкретної задачі.

Означення 3.3.5. Автоматом Мілі *називається довільна трійка множин A, X, Y разом з визначеним відображенням декартових добутків*

$$\phi : \quad A \times X \mapsto A \times Y;$$

множина A називається множиною станів, множини X, Y називаються вхідним та вихідним алфавітами відповідно:

відображення f однозначно визначається парою функцій - **функцією переходів** $f : A \times X \mapsto A$, *та* **функцією виходів** $g : A \times X \mapsto Y$, *які є проекціями функції ϕ на першу та другу координати, тобто $\phi(a, x) = (f(a, x), g(a, x))$. Ці функції можна задавати таблицями, які називають таблицями переходів та виходів автоматів.*

Автомат називається **скінченним**, *якщо всі три множини A, X, Y є скінченними.*

Якщо на вхід автомату подавати слова записані в алфавіті X, то в результаті послідовної роботи над літерами слова з зліва направо або навпаки, автомат буде їх переробляти в слова записані в алфавіті Y.

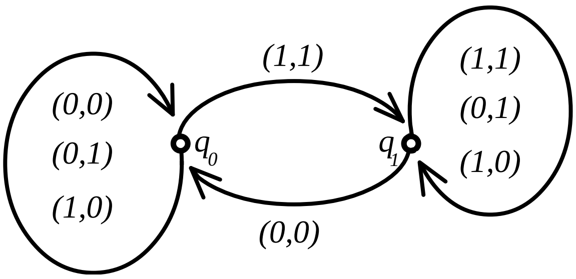
Приклад 3.3.2. *Побудуємо автомат, який приймаючи на вхід послідовно пари цифр двох натуральних чисел записаних в двійковій системі числення, буде повертати цифри суми цих чисел. Нехай* $X = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}-$ *вхідний алфавіт, а* $Y = \{0,1\}-$ *вихідний. Множина станів складається з двох елементів* $Q = \{q_0, q_1\}$; q_0 *це стан в якому знаходиться автомат, якщо на попередньому такті його роботи не було перенесення розряду і в цьому стані автомат знаходиться на початку роботи, а в стані* q_1 *автомат знаходиться, якщо таке перенесення було. Побудуємо відповідні таблиці переходів та виходів:*

f	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1	q_1	q_1

g	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
q_0	0	1	1	0
q_1	1	0	0	1

Такий автомат послідовно отримуючи на вхід пари відповідних цифр першого і другого числа (в порядку зростання розряду), видасть цифри суми цих чисел в двійковій системі числення. Звичайно, що запропонована схема потребує доробки, адже відсутня умова зупинки роботи автомата. Пропонуємо це зробити самостійно, додавши стан $q_2 = stop$.

Зручним способом візуалізації роботи автомата є задання його графами переходів та виходів. Наведемо граф переходів побудованого автомата.



Якщо в стані q_0 автомат приймає одну з пар $(0,0),(0,1),(1,0)$, то він залишається в цьому стані, що і показує орієнтована петля, а якщо в цьому стані він приймає пару $(1,1)$, то він переходить в стан q_1, що показує стрілка направлена з стану q_0 до q_1. Стрілки, що виходять з стану q_1 показують можливі переходи з цього стану.

3.3.2 Множини функцій та підмножин

Для довільних множин $A, B \subset \Omega$ визначимо множину

$$B^A = \{f : A \to B\},$$

яка складається з усіх функцій, що визначені на множині A і приймають значення в B.

У випадку $B = \{0, 1\}$ маємо множину унарних предикатів визначених на множині A.

Лема 3.3.1. *Існує взаємно-однозначна відповідність між множиною всіх підмножин множини A і множиною $\{0, 1\}^A$.*

Доведення. Ця відповідність встановлюється просто:

$$\text{підмножина} \leftrightarrow \text{характеристична функція підмножини.}$$

□

Означення 3.3.6. *Булеаном множини A називається множина, елементами якої є всі підмножини множини A.*

Враховуючи попередню лему, булеан множини позначається як 2^A, а іноді вживають запис $\mathbf{B}(A)$.

3.4 Задачі

1. Для заданих множин A і B обчислити $(a)A \cup B$; (b)$A \cap B$; (c)$(A \cup C) \cap B$; (d) $A \cap B \cap C$; (e)$A \setminus B$; (f)$A \triangle B$; (g)$(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$; (h)$(A \setminus C) \cap (A \setminus B)$, якщо
   1)$A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$;
   2)$A = \{x \in \mathbb{R} | \quad x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{Q} | \quad y^2 + y - 2 = 0\}$,
   $C = \{x \in \mathbb{R} | \quad x^2 > 0\}$.

2. Нехай $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}, B = \{1, 2, 4, 7\}$ і $C = \{2, 4, 6, 7\}$. Перевірити, що $(a)A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); (b)A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap C); (c)(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C); (d)A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. Про групу студентів в 30 осіб відомо, що 19 студентів вивчають математику, 17 — музику, 11 — історію, 12 — математику і музику, 7 — історію та математику, 5 — музику та історію, 2 — математику, історію та музику. Скільки студентів вивчає історію, але не вивчає математику?

4. Відомо, що кожен учень школи вивчає принаймні одну іноземну мову. 28 учнів вивчають англійську, 23 учні вивчають французьку. 23 — німецьку, 12 — англійську та французьку, 11 — англійську та німецьку, 8 — французьку та німецьку, 5 — всі три мови. Скільки учнів вчаться в школі?

5. В жорстокому бою не менше 70% піратів втратили одне око, не менше 75% — одне вухо, не менше 80% — одну руку та не менше 85% — одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, що втратили одночасно і око, і ногу, і вухо, і руку?

6. Завербований Москвою американський дипломат повідомив: "У вищих колах армії США деградація та розклад. З 75 чотиризіркових генералів 30 алкоголіків, 28 наркоманів і аж 35 розпусників. Шестеро є і алкоголіками і наркоманами одночасно, одинадцятеро — наркомани та розпусники, восьмеро — алкоголіки та розпусники. Немає жодного генерала без якоїсь з цих хиб!". Доведіть, що це дезинформація.

7. В трансконтинентальному літаку знаходяться: 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього осіб було в літаку?

8. Одного разу під час розмови за кавою в клубі міжгалактичних мандрівників знаменитий член цього клубу, Мюнхгаузен космічної ери, Йон Тихий, мандрівки якого описані Station Станіславом Лемом в "Зоряних щоденниках Йона Тихого"розповідав: *"Висадка на планету Гесиод була дуже важкою. Та коли я опинився на поверхні, то пожалкував, що вирішив тут приземлитись: на ній жили чудовиська ще більш страшні ніж ті, що змальовані в грецьких міфах. Назустріч мені вийшла делегація з 1000 жителів планети. У 811 з них було одне око, як у велетня Полифема, у 752 - замість волосся були змії, як у Медузи Горгони, а 418 мали риб'ячий хвіст. При цьому 570 створінь були одноокі з зміїним волоссям, 356 — одноокі та з риб'ячим хвостом, 348 — з зміїним волоссям та з риб'ячим хвостом, а 297 — одноокі, з зміїним волоссям та з риб'ячим хвостом. Старший з них звернувся до мене і сказав ... ".* В цей момент професор Тарантота миттєво провів якісь обчислення і вигукнув: *"Любий Йон! Я готовий повірити, що на цій планеті жили істоти з одним оком, зі зміями замість волоссяі та з з риб'ячими хвостами. Тобі доводилось зустрічати і більш дивних потвор — згадай про курдлів. Та я сподіваюся, що закони математики, ще не перетворились на міфи ".* Що мав на увазі професор Тарантота ?

9. Довести рівність множин

   a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

   b) $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

   c)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

   d)$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

   e)$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

   f)$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;

   g)$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.

h)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

i)$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$;

j)$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

10. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності довести наведені рівності шляхом рівносильних перетворень

a) $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = E$;

b)$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$;

c) $A \cap ((\overline{A \cup \overline{B}}) \cup (\overline{\overline{A} \cup B})) \cup (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = A$;

d) $(\bar{B} \setminus A) \cup (A \setminus C) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap C) = \Omega$;

e) $(\overline{(\overline{A \cap B}) \setminus A}) \cup ((A \triangle B) \setminus \overline{B}) = A \cup B$.

11. Довести, що

a) $(A \cup B) \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \quad i \quad B \subseteq C$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$;

c)$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$;

d)$A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;

e)$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

f)$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

12. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення:

a) $C \neq \emptyset,\ A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap C \neq \emptyset,\ (A \cap B) \setminus C = \emptyset$;

b) $A \neq \emptyset,\ A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap C \neq \emptyset,\ A \setminus (B \cap C) = \emptyset$;

c)$A \subseteq B,\ A \cap C \neq \emptyset, (B \setminus C) \cap A = \emptyset$?

Розділ 4

Комбінаторика

Комбінаторикою називається розділ математики, що вивчає спосіб підрахунку кількості варіантів, якими можна зробити певну дію. З точки зору теорії множин, комбінаторика дає можливість підрахувати кількість елементів в скінченній множині, яка описана тим чи іншим (часом досить складним) способом.

4.1 Основні правила комбінаторики.

1. **Правило суми (розбиття).** Якщо маємо n різних елементів, то один з них може бути обрано n способами. Іноді для отримання числа способів легше розбити елементи на два типи і рахувати окремо для кожного. Якщо маємо k елементів першого типу, то елемент першого типу можна обрати k способами, якщо маємо l елементів другого типу, то елемент другого типу можна обрати l способами. Тоді елемент 1-го або другого типів може бути обраний $k + l$ способами. Мовою теорії множин це правило можна виразити наступним чином: для множин A, B, що не перетинаються $A \cap B = \varnothing$, має місце

$$|A \cup B| = |A| + |B| \tag{4.1}$$

Питання. Якою буде формула для $|A \cup B|$, якщо множини перетинаються?

2. **Правило добутку.** Якщо елемент типу I можна вилучити n способами, а елемент типу II, після вилучення елементу типу I, можна вилучити m способами (незалежно від того, який саме елемент I-го типу був перед цим вилучений), то послідовне вилучення елементів I-го типу, а потім елементів II-го типу можна зробити $n \cdot m$ способами. Мовою теорії множин це правило можна записати таким чином:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \tag{4.2}$$

Узагальнене правило суми (розбиття). Якщо маємо скінченну сукупність множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що попарно не перетинаються $\forall i, j (i < j)\ A_i \cap$

$A_j = \varnothing$, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{p=1}^{n} |A_i| \tag{4.3}$$

Узагальнене правило добутку. Для довільної скінченної сукупності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, маємо

$$|\times_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \tag{4.4}$$

В якості прикладу застосуємо правило добутку для підрахунку кількості функцій, які задані на $n-$ елементній множині A і приймають значення в $m-$ елементній множині B. Як відомо, кожній з таких функцій однозначно можна співставити таблицю значень

x	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
$f(x)$	$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$

,

де кожна $*$ може набувати довільного значення з множини B. Тоді ми маємо m способів для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_1)$. Незалежно від того, який елемент з B ми обрали, для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_2)$, ми маємо m способів також. Незалежно від значень $f(a_1), f(a_2)$ для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_3)$, ми знову маємо m способів. Продовжуючи ці міркування, приходимо до висновку, що і останню клітину, яка відповідає $f(a_n)$ ми можемо заповнити m способами. Для підрахунку кількості способів заповнення всього рядка застосуємо узагальнене правило добутку 4.4, згідно якого це число дорівнює $m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$. Тим самим ми довели формулу:

$$|B^A| = |B|^{|A|} \tag{4.5}$$

Окремим важливим випадком є випадок коли $B = \{0, 1\}$

Задача. *Скількома способами можна розсадити n різних осіб по m різним залізничним вагонам?*

Тут допускається, що всі особи можуть опинитися в одному вагоні. Звернемо увагу на те, що в умові задачі два рази вжито слово різні. Це дуже важливо в задачах комбінаторики відразу домовитись, які способи відрізняються, а які ні. Як ми побачимо далі розв'язок задачі може радикально змінитися при зміні цих умов. Якщо в першому вагоні двоє пасажирів - Оксана та Петро, то це інший спосіб розміщення пасажирів ніж той при якому в першому вагоні теж двоє пасажирів, але з Оксаною замість Петра їде Василь. Якщо всіх пасажирів посадили в перший вагон, то цей спосіб ми вважаємо відмінним від того, коли вони всі сіли в другий.

Насправді, коли ми в той чи інший спосіб розміщуємо пасажирів по вагонам, ми задаємо функцію на множині пасажирів, значенням якої є номер вагона.

$$\{\text{Тетяна, Оксана, Петро, Василь, Степан, Микола, ... }\} \to \{1, 2, 3, \ldots, m\}$$

Кількість функцій ми навчилися рахувати в попередні задачі і це число дорівнює m^n.

4.2 Розміщення та перестановки.

Означення 4.2.1. *Нехай $\Omega-$ скінченна $n-$ елементна множина. $k-$ елементним* **розміщенням** *визначеним на множині Ω називається ін'єкція (відображення в)*

$$\{1, 2, \ldots, k\} \to \Omega, \quad (k \leq n).$$

Означення 4.2.2. *$n-$ елементне розміщення визначене на множині Ω називається* **перестановкою***.*

Довільне $k-$ елементне розміщення можна отримати в два етапи:

1. обрати довільну k елементну підмножину Ω.

2. Занумерувати обрані елементи, тобто присвоїти кожному з них його номер. При цьому ми отримаємо вектор $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$, $\omega_i \in \Omega$, причому $\forall i, j (i < j)\ \omega_i \neq \omega_j$.

Число $k-$ елементних розміщень, визначених на $n-$ елементній множині позначається A_n^k. Підрахуємо скільки існує векторів виду $\underbrace{(*, *, \ldots, *)}_{k}, * \in \Omega$, у яких всі координати різні. Якщо $|\Omega| = n$, то для заповнення першої координати маємо n можливостей. Множина $\Omega \backslash \{\omega\}$ елементами якої ми можемо заповнити другу клітину залежить від елемента ω, який був обраний в якості першої координати вектора. Але кількість елементів в цій множині від цього не залежить і дорівнює $n-1$. Продовжуючи ці міркування отримаємо $n-2$ можливості для заповнення третьої координати, $n-3$ можливості для заповнення четвертої координати і т.д. $n-k+1$ можливостей для заповнення останньої $k-$ ї координати (питання: чому $+1$?). Застосуванням узагальненого правила добутку 4.4 отримуємо

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

З використанням факторіалів ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$), формулу можна подати у вигляді

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{4.6}$$

Для кількості перестановок або впорядкувань на множині Ω отримуємо

$$A_n^n = n!. \tag{4.7}$$

Нагадаємо, що за домовленістю вважається, що $0! = 1$.

4.3 Комбінації.

Означення 4.3.1. *Нехай Ω — скінченна n–елементна множина. Будь-яка k–елементна підмножина множини Ω називається k–елементною* **комбінацією** *визначеною на множині Ω. Число таких комбінацій позначається C_n^k.*

Як уже зазначалося, довільне k–елементне розміщення можна отримати обравши k–елементну комбінацію, а потім впорядкувавши її елементи. Першу дію можна виконати C_n^k способами, другу (впорядкування), незалежно від обраної комбінації, згідно (4.7) можна виконати $k!$ способами. За правилом добутку маємо

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

звідки,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Враховуючи (4.6), маємо формулу для числа комбінацій:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{4.8}$$

Приклад 1. Скільки існує розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n \tag{4.9}$$

на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел?

Розглянемо запис

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n.$$

В лівій частині маємо $n-1$ проміжків між одиницями. Оберемо які-небудь $k-1$ з них і поставимо туди риски. Наприклад для $n = 9, k = 4$:

$$1 + 1| + 1 + 1 + 1 + 1 + |1 + 1| + 1 = 9$$

Групуючи доданки між рисками отримаємо розв'язок наведеного рівняння (в наведеному рівнянні це буде $(2, 4, 2, 1)$.

Навпаки, кожному розв'язку рівняння можна співставити відповідне розташування рисок. Маючи множину з $n-1$ проміжків ми маємо обрати $k-1$

проміжків, в які будуть поставлені риски. Очевидно, що це можна зробити C_{n-1}^{k-1} способами.

Приклад 2. Скільки існує розв'язків рівняння (4.9) на множині цілих невід'ємних чисел $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$?

Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вказаного рівняння можна співставити вектор $(x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_k + 1)$, який буде розв'язком рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots x_k = n + k,$$

на множині натуральних чисел. Навпаки, кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ цього рівняння на множині $\mathbb{N}$ відповідає розв'язок $(x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1)$ рівняння (4.9) на множині $\overline{\mathbb{N}}$. Побудована бієкція зводить задачу до попередньої і ми отримуємо, що шукане число дорівнює C_{n+k-1}^{k-1}.

Приклад 3. Згадаємо задачу про розміщення n пасажирів по m залізничним вагонам і припустимо тепер, що ми не розрізняємо пасажирів. Адже залізничникам важливо знати тільки наповнюваність вагонів, а не хто конкретно в них їде. Тоді з кожним способом розміщення пасажирів, ми можемо зв'язати розв'язок рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n,$$

на множині $\overline{\mathbb{N}}$, де x_i- кількість пасажирів в $i-$ му вагоні. Тепер, відповідь отримуємо з попередньої задачі — C_{n+m-1}^{m-1}.

Задача. Скількома способами можна розмістити n пасажирів, яких ми не розрізняємо, по m залізничним вагонам так, що порожніх вагонів не буде?

Задача. В продажу є k сортів тістечок, причому кожного сорту є не менше ніж n штук. Скількома способами можна обрати n тістечок, якщо тістечка одного сорту не розрізняються?

Якщо через x_i позначити кількість обраних тістечок $i-$ го сорту, то задача зводиться до підрахунку кількості розв'язків рівняння (4.9) на множині натуральних чисел з нулем. Тобто маємо C_{n+k-1}^{k-1} способів.

Наведемо інший спосіб розв'язання. Закодуємо нулями та одиницями наш вибір тістечок. Записуємо підряд стільки одиничок, скільки було куплено тістечок першого сорту, якщо таких не було куплено взагалі, то нічого не пишемо, після чого записуємо 0. Далі записуємо стільки одиничок скільки було куплено тістечок другого сорту, які закриваємо нулем і так далі. Після запису одиничок, що відповідають тістечкам останнього $k-$ го сорту нуля не ставимо.

Наприклад для $k = 3, n = 5$ якщо ми купили 1 тістечко першого сорту, і по два другого та третього сортів, то це має бути закодовано такою стрічкою 1011011. А якщо ми вирішили купити всі п'ять тістечок третього сорту, то цьому вибору буде відповідати стрічка: 0011111.

Навпаки, будь-якій двійковій послідовності у якої $k - 1$ нулів і n одиничок відповідає певний вибір тістечок. Підрахуємо кількість таких послідовностей. Маємо стрічку $\underbrace{*, *, *, \ldots, *}_{n+k-1}$. В цій стрічці слід обрати n позицій куди слід поставити 1, це можна зробити C_{n+k-1}^{n} способами, а решту позицій заповнити нулями. Або обрати $k-1$ позицій для нулів, що можна зробити C_{n+k-1}^{k-1} способами, а решту позицій заповнити одиницями.

Зауважимо, що двійкове кодування є досить поширеним прийомом розв'язування комбінаторних задач.

Властивості чисел C_n^k

1^0

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

2^0 Має місце рекурентне співвідношення, яке називають трикутником Паскаля.

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k; \tag{4.10}$$

3^0

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{4.11}$$

Доведення. Доведення всіх трьох властивостей можна провести аналітично, що радимо зробити самостійно. Наведемо комбінаторні доведення тверджень.

Перше твердження є очевидним, адже вибираючи довільну $k-$елементну підмножину, ми одночасно обираємо і $n-k-$ елементну підмножину, яка є доповненням першої. В такий спосіб встановлюється бієкція між множинами $k-$ елементних та $n-k-$ елементних підмножин.

Для доведення другого твердження оберемо певний елемент $\omega^* \in \Omega$ ($|\Omega| = n+1$) та зафіксуємо його. Всі $k-$ елементні підмножини Ω розіб'ємо на два класи:

1) підмножини такі, що містять ω^*,

2) підмножини такі, що не містять ω^*.

Підмножину першого типу можна отримати наступним чином: з множини $\Omega \setminus \{\omega^*\}$ обрати $k-1-$ елементну підмножину (це можна зробити C_n^{k-1} способами) і приєднати до неї елемент ω^*. Отже, кількість $k-$ елементних підмножин першого класу дорівнює C_n^{k-1}.

Кількість підмножин, що належать до 2-го класу дорівнює кількості $k-$ елементних підмножин множини $\Omega \setminus \{\omega^*\}$, яка дорівнює C_n^k.

Залишилося застосувати правило розбиття, яке в даній ситуації стверджує, що кількість $k-$ елементних підмножин $n+1-$ елементної множини дорівнює сумі кількостей підмножин першого та другого класів, тобто $C_n^{k-1} + C_n^k$

Для доведення 3-ї властивості зауважимо, що в лівій частині рівності стоїть кількість всіх підмножин множини з n елементів. Згадаємо, що існує взаємно-однозначна відповідність між підмножинами Ω, $(|\Omega| = n)$ та функціями $\Omega \to \{0,1\}$. Ця відповідність має таку форму $\Omega \supset A \leftrightarrow \chi_A(x)$. Кількість функцій між множинами ми навчилися рахувати раніше і воно дорівнює $2^{|\Omega|} = 2^n$.

Попередній прийом з фіксацією елемента ω^* можна використати також для іншого доведення цієї властивості за методом математичної індукції по кількості елементів у множині Ω.

База індукції — $\Omega = \{\omega\}, \quad |\Omega| = 1$. Очевидно, що одноелементна множина має лише дві підмножини — це порожня $\varnothing$ і сама Ω. Отже, базу індукції доведено.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження доведено для $n-$ елементних множин і доведемо його для множин, Ω, що містять $n+1$ елемент. Проведемо розбиття всіх (а не тільки $k-$елементних) підмножин на два класи вказані вище. Легко бачити, що маємо взаємно-однозначну відповідність між множинами класів: $\omega^* \ni M \leftrightarrow \overline{M} \not\ni \omega^*$. Отже, кількості множин в обох класах рівні.

Для підрахунку кількості підмножин з 2-го класу слід порахувати кількість підмножин множини $\Omega \backslash \{\omega^*\}$, яка містить n елементів. За припущенням індукції ця кількість дорівнює 2^n. Оскільки кількість множин з другого класу така ж сама, то за правилом суми маємо: кількість підмножин Ω дорівнює $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

4.3.1 Біном Ньютона

Формула біному Ньютона має вид

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}. \tag{4.12}$$

Доведення. Розглянемо добуток

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n}.$$

Якщо розкривати за законами дистрибутивності цей добуток, то ми отримаємо суму доданків виду $a^k \cdot b^{n-k}$. Кожен такий доданок отримується таким чином: з множини усіх співмножників (а їх n) обирається k–елементна підмножина — тих співмножників, з яких буде братися елемент a, з решти співмножників (яких $n-k$) буде обиратися елемент b. Такий вибір можна здійснити C_n^k способами. Отже, будемо мати таку кількість подібних доданків $a^k \cdot b^{n-k}$ в сумі. Таким чином, після приведення подібних ми маємо отримати формулу (4.12). □

Як наслідки з формули (4.12) легко отримати багато властивостей біноміальних коефіцієнтів.

Покладемо $a = b = 1$ отримаємо вже доведену властивість (4.11). При $a = -1$, $b = 1$ отримаємо іншу тотожність

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0.$$

4.4 Поліноміальні коефіцієнти

Задача. Скількома способами можна розмістити n пасажирів по m вагонах так, що у першому вагоні буде n_1 пасажирів, у другому - n_2 і т.д. у $m-$ му n_m, причому $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m, n_i > 0$.

З умови задачі зрозуміло, що пасажири тут розрізняються. Отже, є $C_n^{n_1}$ способів обрання пасажирів для 1-го вагону. Для другого вагону це число дорівнює $C_{n-n_1}^{n_2}$, для третього $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$, ..., для $n-1-$ го - $C_{n_{m-1}+n_m}^{n_{m-1}}$, для $n-$ го дорівнює $C_{n_m}^{n_m} = 1$. Після застосування правила добутку і проведення відповідних скорочень отримуємо, що загальна кількість способів розміщення пасажирів дорівнює:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n_{m-1}+n_m}^{n_{m-1}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_m!}. \tag{4.13}$$

Нехай маємо розбиття множини $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $(\forall i, j : 1 \le i < j \le k \quad A_i \cap A_j = \varnothing)$, причому $|A_i| = n_i$ $(\sum_{i=1}^{k} n_i = |A| = n)$. Множину $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ будемо називати множиною типів (кольорів), а функцію $i : A \to I$ таку,що $\forall a \in A_i i(a) = i-$ типізацією. Так у вищерозглянутій задачі такою функцією є : пасажир $\to$ номер вагона.

Означення 4.4.1. *Перестановкою з повтореннями* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *називається функція* $\sigma : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to I = 1, 2, 3, \ldots, k$, *така, що* $|\sigma^{-1}(i)| = n_i, i = 1, 2, \ldots k$. *Число таких перестановок з повтореннями будемо позначати* $P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$.

Зауважимо, що якщо $1 = n_1 = n_2 = \ldots = n_n$, то маємо звичайну перестановку, тобто $P(1, 1, 1, \ldots, 1) = n!$.

Кожну звичайну перестановку можна отримати в два кроки:

1^0 обрати перестановку з повторенням $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, в якій елементи однакового типу (кольору) не розрізняються;

2^0 почати розрізняти елементи одного типу (наприклад ввівши їх нумерацію) і зробивши k перестановок елементів однакового типу.

Кількість способів, якою можна зробити перший крок (за означенням) дорівнює $P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$. Елементи 1-го типу можна переставити $n_1!$ способами, 2-го типу - $n_2!$ способами і т.д., k-го типу - $n_k!$ способами. Отже, за правилом добутку, другий крок можна виконати $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!$ способами. Оскільки загальна кількість звичайних перестановок дорівнює $n!$, то за тим же правилом добутку отримуємо $n! = P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!$, звідки, отримуємо

$$P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!}. \tag{4.14}$$

При $k = 2$ отримуємо $P(n_1, n_2) = C_n^{n_1} = C_n^{n_2}$– звичайні біноміальні коефіцієнти. Узагальненням формули біному Ньютона (4.12) є **поліноміальна формула**.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k) : \sum_{j=1}^{k} n_i = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}. \tag{4.15}$$

Звернемо увагу, що сумування ведеться по всім наборам цілих невід'ємних чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, які в сумі дають n.

Питання: як порахувати кількість доданків у цій сумі?

Доведення. Доведення цієї формули проведемо аналогічно доведенню формули (4.12).

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}_{n}.$$

За законами дистрибутивності, обираючи з кожних дужок по одному доданку, ми отримаємо суму доданків виду:

$$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}.$$

При цьому кожній дужці можна співставити її тип — номер змінної, яка обирається з цієї дужки. Очевидно, що всі перестановки з повторенням $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, у яких кількість елементів першого типу є n_1, другого — n_2, і т.д. k–го є $n - k$, будуть давати один і той же доданок $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, а отже у формулі (4.15) цей доданок буде з коефіцієнтом $P(n_1, n_2, \ldots n_k)$. Цим рівність доведена. □

Завдання: Методом математичної індукції по n і окремо по k отримати ще два доведення цієї формули.

4.5 Формула включень і виключень

Ми вже знаємо формулу для підрахунку кількості елементів в об'єднанні двох множин

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Її узагальненням є наступна формула

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \quad (4.16)$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості множин.

База індукції — $n = 1$ є очевидною.

Індукційний крок. Припустимо, що формула (4.16) доведена для довільної сукупності з n множин і отримаємо відповідну формулу для $\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right|$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right|.$$

За узагальненим законом дистрибутивності, маємо рівність множин:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}),$$

звідки,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right|.$$

Перший і третій доданки у правій частині є кількостями елементів в об'єднаннях множин, кількість яких дорівнює n і до них можна застосувати припущення індукції:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ...$$
$$... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| + |A_{n+1}| -$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1<i<j<n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1<i<j<k<n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \dots\right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|\right)$$

Приєднавши до першої суми доданок $|A_{n+1}|$ отримаємо $\sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$. У наступній сумі відсутні попарні перетини з множиною A_{n+1}, але відповідні доданки є у дужках, те саме стосується потрійних перетинів. Таким чином, об'єднавши відповідні суми остаточно отримуємо:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+2} \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|,$$

що і треба було довести. □

Кількість елементів у доповненні $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ дорівнює $|\Omega| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$. За узагальненим законом де Моргано маємо

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

І ми отримуємо формулу включень та виключень у другій формі:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |\Omega| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{4.17}$$

Питання: скільки доданків містять суми у формулі включень та виключень?

Приклад 4.5.1. *Розглянемо впорядкований набір чисел $(1, 2, \dots, n)$. Будемо переставляти елементи цього набору. Всього є $n!$ таких перестановок. Якщо для деякої перестановки жодне число не буде знаходитись на своєму місці (тобто на місці, номер якого дорівнює цьому числу), то таку перестановку будемо називати повним безпорядком. Знайдемо кількість всіх повних безпорядків.*

Спочатку порахуємо кількість всіх перестановок, що не є беспорядками. Нехай A_i — множина всіх перестановок, що залишають i–ий елемент на своєму місті, $1 \le i \le n$. Тоді об'єднання $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ буде множиною всіх перестановок, що залишають хоча б одне число на своєму місті. Обчислимо кількість таких перестановок, тобто обчислимо $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$. Кількість перестановок, що залишають i–ий елемент на своєму місті, дорівнює $|A_i| = (n-1)!$. Кількість перестановок, що залишають як i-ий, так і j-ий елементи на своїх місцях, рівна $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, причому всього таких подвійних перетинів буде C_n^2. Аналогічно, для довільного $1 < k < n$ $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. При цьому кількість всіх таких перетинів дорівнює C_n^k. Також існує єдина перестановка, що залишає всі числа на своєму місті. Використовуючи формулу *включень та виключень, отримаємо*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| +$$
$$+ ... + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n| =$$
$$= n\cdot(n-1)! - (n-2)!C_n^2 + \ldots + (-1)^{k+1}(n-k)!C_n^k + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot 1 =$$
$$= n! - \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^{n+1}. \quad (4.18)$$

Таким чином, оскільки всього є $n!$ *перестановок, то кількість повних безпорядків дорівнює*

$$n! - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^{n+1}\right) =$$
$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

4.6 Класична ймовірність

Нехай Ω деяка скінченна множина елементарних (найпростіших) подій. Будь-яку підмножину $A\subseteq\Omega$ будемо називати подією.

Означення 4.6.1. *Класичною ймовірністю події* A *називається число*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (4.19)$$

Зокрема, ймовірності всіх елементарних подій є однаковими:

$$\forall\omega\in\Omega \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

Ця умова рівності ймовірностей елементарних подій і є головною для використання класичної ймовірності. Ця схема використовується, коли ми не можемо надати переваги в появі жодній з елементарних подій. Наприклад випадання якоїсь сторони монети або якої небудь грані грального кубика.

4.6.1 Властивості класичної ймовірності Наступні властивості легко отримати безпосередньо з означення.

1. $0\le P(A)\le 1$, причому $P(A)=0 \Leftrightarrow A=\varnothing$, $\quad P(A)=1\Leftrightarrow A=\Omega$.
2. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
3. $P(\bar{A}) = 1-P(A)$.

Розв'язання задач на підрахунок ймовірностей складається з таких етапів:

1. Побудова множини Ω.

2. Визначення в ній потрібної підмножини (події) A.

3. Підрахунок кількостей елементів в цих множинах методами комбінаторики та обчислення ймовірності (4.19).

Розглянемо декілька прикладів.

Задачі кавалера де Мере.

Перша задача. Гральний кубик підкидається чотири рази, якщо принаймні раз випала шістка, то виграв кавалер, а якщо жодного, то він програв. Яка ймовірність виграшу кавалера ?

Оскільки ми вважаємо гральний кубик правильним (fair cone), то є всі підстави для застосування класичної схеми. Множина елементарних подій Ω складається з наборів $(*, *, *, *)$, $* = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, отже, $|\Omega| = 6^4$. Набори $(*, *, *, *)$, в яких немає шістки відповідають ситуаціям, коли кавалер програє. Множину таких наборів позначимо через A, очевидно,$|A| = 5^6$. Тоді за формулою (4.19), ймовірність програшу кавалера дорівнює

$$P(A) = \frac{5^4}{6^4} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.48.$$

Тоді, за властивістю 3, ймовірність виграшу кавалера дорівнює

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \approx 0.52.$$

Припустимо, що переможець гри отримує від переможеного в грі один луїдор. Тоді отримана ймовірність допускає таку інтерпретацію: якщо ігри будуть відбуватися серіями по 100 ігор, то в середньому в кожній серії кавалер буде вигравати 4 (чотири) луїдора.

З часом партнери кавалера де Мере, всі вони не знали математики, просто помітили, що ця гра їм невигідна і стали відмовлятися грати. Кавалер вирішив змінити правила гри на більш складні.

Друга задача. Пара гральних кубиків підкидається двадцять чотири рази, якщо принаймні один раз випала пара $(6, 6)$, то виграв кавалер, а якщо жодного, то він програв. Яка ймовірність виграшу кавалера?

Ймовірність випадання шістки на одному кубику $\frac{1}{6}$ в шість разів більша ніж випадання пари шісток на парі кубиків, яка дорівнює $\frac{1}{36}$. Тому, щоб зробити гру для себе вигідною кавалер вирішив збільшити кількість підкидань теж в шість разів довівши їх кількість до $6 \cdot 4 = 24$. Кавалер щиро вважав, що це буде просто шестикратне повторення першої гри, яка, як він знав, була йому вигідна. Яким же було його здивування, коли після численних ігор він став помічати, що програє. За роз'ясненнями він звернувся до одного з найвідоміших вчених того часу Б. Паскаля, який не тільки розв'язав ці задачі, а і започаткував численння ймовірностей.

Розв'яжемо другу задачу і ми. Множина елементарних подій для другої задачі складається з наборів пар $\Omega = \{(\underbrace{(*,*),(*,*),\ldots,(*,*)}_{24})\}$, отже, $|\Omega| = 36^{24}$. Набору, які не містять пар $(6,6)$ відповідають результатам ігор, в яких кавалер програв і їх кількість очевидно дорівнює 35^{24}. Отже, ймовірність програшу кавалера дорівнює

$$P(A) = \frac{35^{24}}{36^{24}} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.51,$$

а ймовірність його виграшу дорівнює

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \approx 0.49.$$

Таким чином в середньому в кожній серії зі ста ігор кавалер буде програвати 2 (два) луїдора.

Розглянемо більш складну задачу. В кошику знаходяться n куль, серед яких k білих, а решта чорних. З кошика випадковим чином вилучаються m куль. Яка ймовірність того, серед них рівно l білих куль $(0 \le l \le k)$.

Вважаємо, що кулі не розрізняються на дотик, а отже при вилученні є всі рівноможливими і застосуємо класичну схему.

Множина Ω складається з усіх $m-$ елементних підмножин множини усіх куль, яка містить n елементів. Ті $m-$ елементні підмножини, що містять рівно l білих куль утворюють множину (подію) A. Кількість $m-$ елементних підмножин множини з n елементів, як ми знаємо, дорівнює $|\Omega| = C_n^m$.

Підрахуємо кількість елементів в множині A. Для формування такої множини нам слід обрати l білих куль і добрати до них $m-l$ чорних. Перший вибір ми можемо зробити C_k^l способами, а другий, незалежно від того, які білі кулі ми обрали, можна зробити C_{n-k}^{m-l} способами. Застосуванням правила добутку отримуємо $|A| = C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}$ і за означенням (4.19) отримуємо

$$P(A) = \frac{C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}.$$

Якщо, при фіксованих n, k, m, обчислювати значення ймовірності при $l = 0, 1, 2, \ldots, k$, то отримана послідовність ймовірностей називається **гіпергеометричним розподілом**.

Отриману формулу можна використати для оцінки ймовірності виграшу в Спортлото. Якщо серед 49 куль рівно 6 з виграшними номерами і з барабана вилучаються випадково теж шість куль, то маємо $n = 49, k = m = 6$. Якщо виграш надається за умови що число вгаданих номерів не менше ніж три, то для підрахунку отримання хоч якогось виграшу, слід порахувати значення гіпергеометричного розподілу при $l = 3, 4, 5, 6$ і додати ці числа. Остаточні підрахунки пропонуємо зробити самостійно.

Більшість задач комбінаторики можуть бути переформульовані як задачі на обчислення класичної ймовірності.

Приклад 4.6.1. *Коли в залі театру згасло світло залишалося n вільних місць, які мали зайняти глядачі, що спізнилися. В темряві ці глядачі почали займати вільні місця випадковим чином. Яка ймовірність того, що принаймні один з тих що запізнилися виявиться на своєму місці?*

Тут множина Ω складається з усіх перестановок вільних місць, тобто $|\Omega| = n!$. Для підрахунку кількості перестановок в яких принаймні один з глядачів, що запізнилися займе своє місце скористаємося отриманою раніше формулою (4.18) *із задачі про кількість повних безпорядків. Тоді за формулою класичної ймовірності* (4.19) *отримуємо:*

$$P_n = \frac{|\bigcup_{i=1}^n A_i|}{n!} = 1 - 2! + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} + \ldots + (-1)^{n+1}.$$

Цю формулу можна подати в такому вигляді

$$P_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

З курсу математичного аналізу відомо про збіжність ряду

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}.$$

Звідси отримуємо граничне значення ймовірності

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 1 - \frac{1}{e}.$$

Отже, для великих значень n можна користуватися наближеною формулою

$$P_n \approx 1 - \frac{1}{e}.$$

4.7 Задачі

1. Скільки є п‘ятизначних чисел, які діляться ні 5?

2. Учні вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

3. Скільки є чисел у системи числення за основою n, для запису яких потрібно використати точно k знаків?
4. Скільки є п‘ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша попередньої?
5. Скільки існує п’ятизначних чисел які діляться на 3?
6. З точки проведено n променів. Скільки кутів вони утворюють?
7. На залізничній станції n семафорів, кожен з яких може знаходитись в одному з 3 положень. Скільки можна дати різних сигналів одночасно?
8. Скільки є натуральних чисел, менших 100, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?
9. Скільки дільників має число $6^5 \cdot 10^4$? Скільки дільників має число $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$, де $p_i (i = 1, 2, ...r)-$ різні прості числа?
10. Скільки існує камінців в грі доміно? Скількома способами можна обрати два камінці, які можна прикласти один до іншого?
11. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну ?
12. Скількома способами n людей можуть стати в коло?
13. Скільки є способів складання намиста із k різних предметів?
14. Скількома способами можна поставити дві тури на шахову дошку так, щоб одна не била іншу?
15. Скількома способами можна поставити два ферзі на шахову дошку так, щоб один не бив іншого?
16. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?
17. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?
18. На площині дано n точок, причому m точок лежать на одній прямій. Скільки існує невироджених трикутників зі стороною, що лежить на цій прямій?
19. В чемпіонаті по футболу беруть участь 16 команд. Будемо говорити, що результати двох чемпіонатів по футболу тотожні, якщо в результаті цих чемпіонатів однакові команди отримують золоту, срібну, бронзову медалі, і покидають вищу лігу(4 команди). Скільки є різних, не тотожних чемпіонатів?

20. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками на протилежній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими прямими?

21. Скільки можна зробити перестановок із n елементів у яких дані 2 елементи стоять поруч?

22. Скількома способами можна розставити 10 книг на полиці, щоб певні 3 книги не стояли поруч?

23. З колоди 52 карти вибрали 10 карт.

    а) У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз?

    б) У скількох випадках серед цих карт був рівно один туз і дві карти бубнової масті?

    в) У скількох випадках — не менше двох тузів?

    г) У скількох випадках серед цих карт є рівно два тузи і рівно 3 хрестові карти?

24. Скільки існує відображень з множини $M \quad (|M| = m)$ в множину $N \quad |N| = n$? Скільки серед них ін'єкцій, сюр'єкцій, бієкцій?

25. Скількома способами можна обрати 5 свідків з 12 осіб, що сиділи в одному ряду так, щоб свідки не сиділи поруч?

26. Від міста A до B 999 км. Уздовж дороги стоять стовпи, на яких указано відстані до A і до B:

$$\overline{\underline{|0|999|}} \quad \overline{\underline{|1|998|}} \quad \overline{\underline{|2|997|}} \ldots \overline{\underline{|999|0|}}$$

    Скільки серед них таких, на яких є тільки дві різних цифри?

27. На площині є n різних точок. Кожні дві точки сполучаються відрізком. Скільки відрізків утвориться при цьому?

28. Скільки існує цілочисельних трикутників, довжина максимальної сторони яких дорівнює n?

29. Скільки існує цілочисельних трикутників, периметр яких дорівнює n?

30. 6 ящиків занумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль так, щоб ні один ящик не виявився порожнім?

31. 6 ящиків занумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль (деякі ящики можуть бути порожніми)?

32. 12 п'ятаків розклали по 5 різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не виявився порожнім. Яка ймовірність того, що в першому гаманці буде 7 монет?

33. Палітурник повинен переплести 12 однакових книг в червону, зелену чи синю палітурки. Яка ймовірність того, що всі книги будуть одного кольору?

34. Скількома способами можна розрізати намисто , що складається з 30 різних бусинок, на 8 частин ?

35. В поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому

    а) 12 листівок;

    б) 8 листівок;

    в) 8 різних листівок?

36. В гаманці лежить 20 монет вартістю 10, 25 і 50 копійок. Яка ймовірність того, що серед вибраних 20 монет з цих 60, 10 монет вартістю 50 копійок?

37. Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 4 чорні, 4 білі і 4 сині кулі?

38. В 9 різних лузах розташували 7 білих і 2 чорні кулі (деякі лузи можуть бути порожніми). Яка ймовірність того, що обидві чорні кулі опиняться в одній лузі?

39. Виклали в ряд 5 червоних, 5 синіх і 5 зелених куль. Яка ймовірність того, що ніякі дві сині кулі не лежать поряд?

40. У квітковому магазині під кінець робочого дня залишилось 7 троянд білого кольору, 8 червоного і по 9 рожевого і жовтого. Скількома способами можна скласти букет з 5 квітів, якщо троянди одного кольору не відрізняються?

41. Колоду з 52 карт перетасували і витягли навмання 6 карт. Яка ймовірність того, що присутні всі масті?

42. В задачі з прикладу 4.6.1, порахувати ймовірність того, що принаймні два глядачі, що запізнилися попадуть на свої місця.

43. 6 людей вибрали з 6 пар рукавиць по лівій і правій кожен.

    а) Яка ймовірність того, що жоден не отримав пари?

    б) Розв'язати цю задачу у випадку 9 пар і 6 людей.

44. За круглим столом сидять 3 англійців, 3 французів і 3 німців. Яка ймовірність того, що ніякі співвітчизники не сидять поруч?

45. В класі 28 учнів, 16 дівчаток і 12 хлопчиків, які сидять за 15 партами.

   а) Скількома способами можна розсадити дітей за партами?

   б) Скількома способами можна розсадити так, щоб кожен хлопчик сидів з дівчинкою?

   в) Скількома способами можна розсадити дітей так, щоб жоден хлопчик не сидів з дівчинкою?

46. Є кубики червоного, помаранчевого, білого і синього кольорів. Скількома способами дитина може скласти башту з 6 кубиків?

47. Скільки різних слів можна утворити з слів

   a)"математика",   b) "комбінаторика",   c) "додавання"?

48. У мами є 2 однакових яблука і 3 однакових груші. Кожен день протягом 5 днів мама видає сину по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

49. У Петра 6 друзів і кожен день, протягом декількох днів він запрошує до себе в гості трьох з них так, що компанія жодного разу не повторюється. Скільки днів Петро може так запрошувати до себе гостей, і скількома способами це можна зробити?

50. По пустелі іде караван верблюдів. Після перепочинку верблюдів переставили так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший верблюд, ніж раніше. Скількома способами можна це зробити?

51. Є n конвертів з адресами і n листів. Листи навмання кладуть у конверти. Яка ймовірність того, що хоча б одна людина отримає свій лист?

52. Гравець в "Спортлото"з 49 видів спорту повинен вибрати 6. Яка ймовірність повного виграшу (відгадано всі 6 видів) Яка ймовірність виграшу (виграш отримує той, хто правильно вказав хоча б 3 види)?

53. Розкрити дужки:

   a) $(2x+y)^6$;   b) $(x+y+z)^4$.

54. В розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} однакові. Знайти n.

55. Скільки раціональних членів містить розклад

$$(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{100}?$$

56. Чому дорівнює коефіцієнт в розкладі $(x + y^2 + z)^{15}$

a) при $x^6y^{10}z^4$; b) при $x^6y^8z^6$?

57. Нехай $(1 + x^2 + x^5)^{20} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{100}x^{100}$. Скільки коефіцієнтів a_i, $1 \le i \le 100$ дорівнюють 0?

58. Обчислити суми:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + \ldots + C_n^n$;

b) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + C_n^9 + C_n^{11} + \ldots$;

c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + C_n^8 + C_n^{10} + \ldots$;

d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n$;

e) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + 6C_n^6 + \ldots + nC_n^n$;

f) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (n+1)C_n^n$;

e) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + 5C_n^5 - 6C_n^6 + \ldots + (-1)^n nC_n^n$.

59. Довести рівність:

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + C_p^2 C_{n-p}^{m-2} + \ldots + C_p^k C_{n-p}^{m-k} + \ldots C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m.$$

60. Сім монет кинули на стіл. Скільки є можливих варіантів їх падіння, якщо
a) всі монети різної вартості;
b) всі монети однакові?

61. Скільки є чисел, більших 1 і менших 10000, які не діляться хоча б на одне з чисел 2, 5, 3?

62. Скільки шестизначних чисел можна скласти з цифр числа 1233145254 так, щоб дві однакові цифри не йшли одна за одною?

63. Скільки є десятизначних чисел, у яких сума цифр дорівнює трьом?

64. Скільки різних десятизначних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, причому цифра 3 вживається рівно двічі?

65. Скількома нулями закінчується число 100! ?

66. На конференції повинні виступити доповідачі A, B, C, D і E, причому A не може виступати раніше, ніж B. Скількома способами можна це здійснити?

67. Екскурсанти замовили на пароплаві 8 4-місних кают. Всі місця і всі каюти рівноцінні. Скількома способами 32 туриста можуть розміститись в каютах?

68. На площині проведено m паралельних прямих та n прямих, які перетинають дані і одна одну. Жодні три прямі не перетинаються в одній точці. На скільки частин розбито площину цими $n + m$ прямими?

69. Скільки різних намист можна зробити з 3 чорних і 2 білих намистинок?

Розділ 5

Потужність множин, кардинальні числа.

5.1 Порівняння множин.

В цьому розділі ми розглянемо питання про порівняння між собою різних множин; які слід вважати більшими, а які меншими. Скінченні множини ми можемо порівнювати між собою по кількості елементів в них. Запис $|A| < |B|$ означає, що множина A містить менше елементів ніж B. Якщо ж кількість елементів у множинах є однаковою, $|A| = |B|$, то ці множини є однаковими по кількості елементів і між цими множинами можна встановити бієкцію (взаємно-однозначну відповідність). З цих міркувань начебто випливає, що множина завжди містить "більше"елементів ніж будь-яка її власна підмножина. Для скінченних множин це очевидно. А для нескінченних ?

Найпростішою нескінченною числовою множиною є множина натуральних чисел $\mathbb{N}$. Розглянемо множину $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ і її власну підмножину $\mathbb{N}$. Відображення $n \to n+1$, очевидно є бієкцією $\overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. Отже, виходячи з попередніх міркувань, слід вважати, що кількості елементів у цих множинах збігаються. Це перший дещо несподіваний ефект, який ми отримали для нескінченних множин. Множини, кількість елементів яких "збігається"(у цьому сенсі) з кількістю елементів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, будемо називати зліченними.

Означення 5.1.1. *Будемо говорити, що потужність множини A не перевищує потужність множини B і записувати $|A| \leq |B|$, якщо існує ін'єкція (занурення) $\phi : A \to B$.*

Означення 5.1.2. *Дві множини A і B називають рівнопотужними (еквівалентними), якщо між ними можна встановити бієкцію (взаємно-однозначну відповідність) $\phi : A \leftrightarrow B$. Саме в цьому сенсі буде вживатися запис $|A| = |B|$.*

Як показує попередній приклад, існування ін'єкції $\phi : A \to B$, для якої $ImA \neq B$ зовсім не означає, що множина A має "меншу"кількість елементів ніж B.

Означення 5.1.3. *Будемо говорити, що потужність множини A менша за потужність множини B і писати $|A| < |B|$, якщо $|A| \leq |B|$ і ці множини не є рівнопотужними.*

Якщо ці означення мають сенс, то повинна мати місце імплікація:

$$|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|.$$

Вона справді має місце, але це не очевидно.

Теорема 5.1.1. *(Кантора-Бернштейна.)*

$$|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|.$$

Доведення. Нехай маємо ін'єкції $f: \ A \to B$ і $g: \ B \to A$. Для довільного елемента $a \in A$ введемо в розгляд множини M_a та N_a, які визначаються наступним чином:

$$M_a^+ = \{m \in A | \exists k \in \overline{\mathbb{N}} : m = \underbrace{g(f \ldots (g(f(g(f}_{k}(a)))) \ldots)\},$$

$$M_a^- = \{m \in A | \exists k \in \overline{\mathbb{N}} : \underbrace{g(f \ldots (g(f(g(f}_{k}(m)))) \ldots) = a\},$$

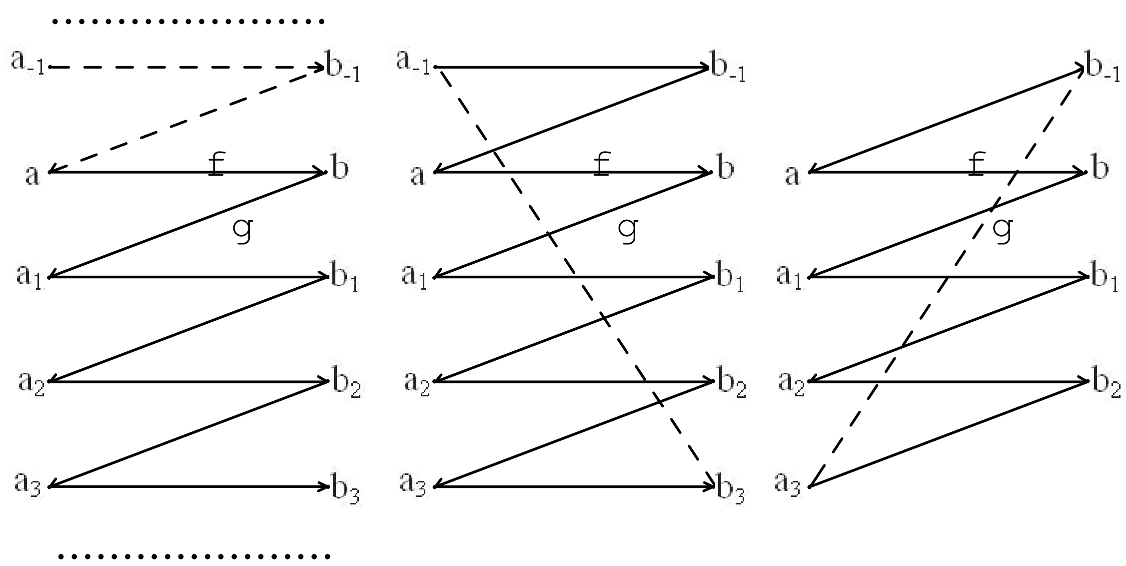
$$M_a = M_a^- \cup M_a^+ \quad N_a = \{n \in B | g(n) \in M_a\} \subseteq B.$$

Оскільки, $f, g-$ін'єкції, то кожен елемент з множини A (множини B) має не більше одного прообразу відносно відображення $f(g)$, і цим вказані множини визначені однозначно, причому множини M_{a_1}, M_{a_2} або не перетинаються або збігаються, а відповідні множини N_{a_1}, N_{a_2} мають таку ж властивість. Тому для побудови бієкції $A \leftrightarrow B$ досить побудувати бієкції $\phi_a: \ M_a \leftrightarrow N_a$ для всіх a.

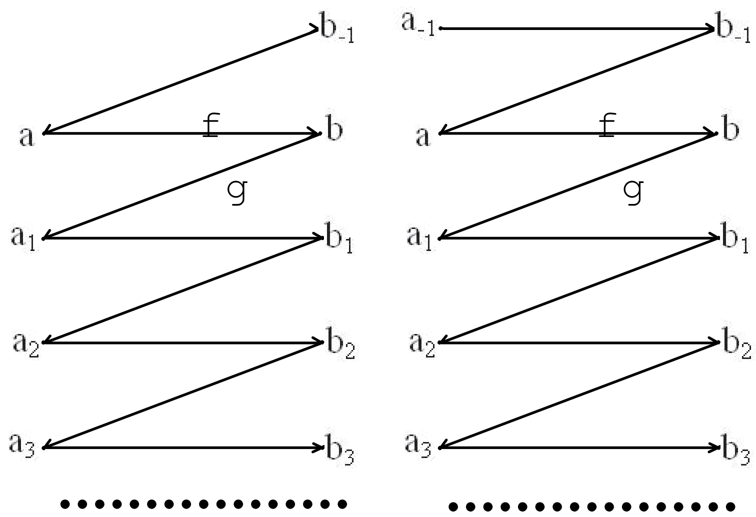
Розглянемо випадок 1., коли кожен елемент з M_a і кожен елемент з N_a має прообраз. Цей випадок розбивається на три підвипадки: 1.1 — в ланцюгу

$$\ldots \to g(b_{-1}) = a \to f(a) = b \to g(b) = a_1 \to \ldots$$

всі елементи різні та підвипадки 1.2 та 1.3, коли вказаний ланцюг є насправді скінченним циклом : 1.2 для деякого $b' \in N_b$ елемент $g(b')$ раніше зустрічався в ланцюгу; 1.3 для деякого $a' \in M_a$ елемент $f(a')$ раніше зустрічався в ланцюгу.



Якщо існує елемент $a \in M_a$, який не має прообразу при відображенні g або існує елемент $b \in N_a$, який не має прообразу при відображенні f, то отримуємо ще два випадки 2,3:



Якщо для множин M_a та N_a має місце випадок 1, то звуження відображень f та g^{-1} на M_a дають нам дві бієкції $\phi_a = f|_{M_a} : M_a \leftrightarrow N_a$, $\phi_a = g^{-1}|_{M_a} : M_a \leftrightarrow N_a$. У випадку 2 такою бієкцією буде очевидно $\phi_a = g^{-1}|_{M_a} : M_a \leftrightarrow N_a$, а у випадку 3 - $\phi_a = f|_{M_a} : M_a \leftrightarrow N_a$. Побудова бієкцій $\phi_a :\ M_a \leftrightarrow N_a$ описана для всіх a і вони визначають бієкцію $A \leftrightarrow B : \phi(a) = \phi_a(a)$. $\square$

5.2 Зліченні множини

Означення 5.2.1. *Множину A називають зліченною, якщо існує бієкція цієї множини на множину натуральних чисел:*

$$A \leftrightarrow \mathbb{N}.$$

Якщо $A \ni a \leftrightarrow n_a \in \mathbb{N}$, то говорять, що n_a є номером елемента a.

Запис $|A| = |\mathbb{N}|$ буде означати, що множина A є зліченною.

Задача. Побудовою бієкцій в явному вигляді довести зліченність множин: $\mathbb{Z}$ — цілих чисел, $2\mathbb{Z}$ — парних чисел, $x\mathbb{N}, x\mathbb{Z}$ — натуральних та цілих чисел кратних деякому числу x.

Властивості зліченних множин.

Теорема 5.2.1. *Об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.*

Доведення. Нехай скінченна множина містить k елементів і визначена нумерація елементів зліченної множини: $n \leftrightarrow a_n$. Елементам скінченної множини присвоємо номери з 1 по k, а елементи зліченної множини нумеруємо за допомогою зсуву на $k: \quad n + k \leftrightarrow a_n$. Очевидно, що цим побудована нумерація об'єднання множин. □

Теорема 5.2.2. *Будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або зліченна.*

Доведення. Нехай $A-$ зліченна множина, і $B-$ є її підмножина. Оскільки $A-$ зліченна, то кожному її елементу відповідає номер - натуральне число. Серед елементів B оберемо елемент з найменшим номером і присвоємо йому номер 1, далі з решти елементів виберемо елемент з найменшим номером і присвоємо йому номер 2. Продовжуючи цей процес, ми отримуємо строго зростаючу послідовність номерів: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Якщо через скінченну кількість кроків ми виберемо всі елементи множини B, то вона скінченна. Якщо ж $B-$ нескінченна множина, то ми отримуємо її бієкцію на множину натуральних чисел, яка визначається наступним чином: $n_k \to k, k \in N$. □

Теорема 5.2.3. *Декартів добуток зліченних множин є зліченною множиною.*

Нехай A та B зліченні множини, тоді існують бієкції:

$$A \leftrightarrow \mathbb{N} \leftrightarrow B,$$
$$A \ni a_n \leftrightarrow n \leftrightarrow b_n \in B,$$

де $\mathbb{N} \ni n-$ номер елементів a_n, b_n.

Елементи декартового добутку $A \times B$ можна подати у вигляді такої таблиці:

$$\begin{array}{cccccc}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \ldots & (a_1, b_n) & \ldots \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \ldots & (a_2, b_n) & \ldots \\
(a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \ldots & (a_3, b_n) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(a_n, b_1) & (a_n, b_2) & (a_n, b_3) & \ldots & (a_n, b_n) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Необхідно вказати спосіб побудови нумерації елементів цієї таблиці. Один з можливих способів можна зобразити таким чином:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 6 & 7 & 15 & \ldots \\
3 & 5 & 8 & 14 & \ldots & \ldots \\
4 & 9 & 13 & \ldots & \ldots & \ldots \\
10 & 12 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
11 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Цю нумерацію можна задати аналітично за допомогою формул.

Завдання 1. Вказати інші способи нумерації пар.

Завдання 2. Вивести формули для різних способів нумерації пар:

$$(a_i, b_j) \leftrightarrow n = n(a_i, b_j) - \text{номер пари}$$

$$\mathbb{N} \ni n \leftrightarrow (a = a(n), b = b(n)) \in A \times B.$$

Наслідок 5.2.1. *Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n-$ скінченна сукупність зліченних множин, тоді їх декартів добуток $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ є зліченною множиною.*

Теорема 5.2.4. *Нехай множина I скінченна або зліченна і $A_i, i \in I, -$ сукупність скінченних або зліченних множин, тоді множина*

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

буде або скінченною або зліченною.

Доведення. Якщо множина I зліченна (скінченна), то існує її бієкція на множину натуральних чисел (на множину $\{1, 2, \ldots, |I|\}$). Отже, існує множина з номером 1, яку ми позначимо A_1, друга , яку ми позначимо A_2, і т.д. $A_n, n \in \mathbb{N}$. Введемо в розгляд множини:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right), \ldots .$$

Неважко переконатися, що

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ і } \forall i, j : 1 \leq i < j \quad B_i \cap B_j = \varnothing.$$

За попередньою теоремою множини B_i є або скінченними або зліченними, отже можна вважати, що $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ik}, \ldots\}$. Тоді з елементів множини

$\bigcup_{i\in I} B_i$ можна скласти таблицю

$$\begin{array}{cccccc}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} & \dots \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & \dots \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots,
\end{array}$$

в якій кожен елемент зустрічається один раз. Побудуємо занурення

$$\bigcup_{i\in I} B_i \quad \ni b_{i,j} \mapsto (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

Якщо всі множини B_i є зліченними, то множина $\bigcup_{i\in I} B_i$ рівнопотужна множині $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, яка є зліченною за попередньою теоремою, якщо ж деякі B_i є скінченними, то об'єднання множин рівнопотужне підмножині $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, а отже є зліченною або скінченною множиною. □

Приклад 5.2.1. *Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є зліченною.*

Дійсно, за означенням, число q називається раціональним, якщо його можна подати у вигляді дробу $q=\frac{m}{n}$, де $m-$ ціле, $n-$ натуральне. Позначимо через Q_n підмножину раціональних чисел, які можна подати у вигляді звичайного дробу із знаменником рівним $n:\quad q=\frac{m}{n}$, тоді з раціональних чисел можна скласти таку таблицю:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
Q_1 & \dots & -\frac{k+1}{1} & -\frac{k}{1} & \dots & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \dots & \frac{k}{1} & \frac{k+1}{1} & \dots \\
Q_2 & \dots & -\frac{k+1}{2} & -\frac{k}{2} & \dots & -\frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{1} & \dots & \frac{k}{2} & \frac{k+1}{2} & \dots \\
Q_3 & \dots & -\frac{k+1}{3} & -\frac{k}{3} & \dots & -\frac{1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{k}{3} & \frac{k+1}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
Q_n & \dots & -\frac{k+1}{n} & -\frac{k}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & \frac{0}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{k}{n} & \frac{k+1}{n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}.$$

Зрозуміло, що в цій таблиці кожне раціональне число зустрічається нескінченну кількість разів і

$$\mathbb{Q}=\bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i.$$

Оскільки, Q_i- зліченні множини ($|Q_i|=|\mathbb{Z}|$), то за попередньою теоремою маємо зліченність $\mathbb{Q}$.

Приклад 5.2.2. *Множина $\mathbb{Q}[x]$ поліномів від однієї змінної x з раціональними коефіцієнтами є зліченною.*

Позначимо через $\mathbb{Q}^m[x] \subset \mathbb{Q}[x]$ підмножину поліномів, степінь яких не перевищує m. Поставивши у відповідність кожному поліному набір його коефіцієнтів, отримаємо бієкцію $\mathbb{Q}^m[x] \leftrightarrow \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{m+1}$. Тоді за наслідком 5.2.1, для кожного m множина $\mathbb{Q}^m[x]$ є зліченною, а за теоремою 5.2.4 і множина

$$\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \mathbb{Q}^m[x]$$

є зліченною.

Означення 5.2.2. *Дійсне число $r \in \mathbb{R}$ називається алгебраїчним, якщо існує поліном $f(x) \in \mathbb{Q}[x]: \ f(r) = 0$.*

Будь-яке раціональне число q є алгебраїчним, бо воно є коренем полінома $x-q$ Ірраціональне число $\sqrt{2}$ є також алгебраїчним, бо воно є коренем полінома $x^2 - 2$.

Приклад 5.2.3. *Множина $\mathbb{A}$ всіх алгебраїчних чисел є зліченною.*

Для довільного $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ позначимо через Z_f скінченну множину його нулів, $Z_f = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = 0\}$. Тоді, очевидно,

$$\mathbb{A} = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}[x]} Z_f$$

і за теоремою 5.2.4 множина алгебраїчних чисел є зліченною.

Приклад 5.2.4. *Нехай $\mathcal{A}$ — скінченна або зліченна множина (алфавіт) і $\mathcal{A}^*$ — множина слів в цьому алфавіті, тобто множина скінченних послідовностей $a_1a_2a_3 \ldots a_k, \quad a_i \in \mathcal{A}$. Множина $\mathcal{A}^*$ є зліченною.*

Позначимо через $\mathcal{A}^*_k$ підмножину слів, що складаються з k літер, тоді, зрозуміло, маємо бієкцію

$$\mathcal{A}^*_k \leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{k}.$$

Якщо $\mathcal{A}$ є зліченною, то за наслідком 5.2.1 множини $\mathcal{A}^*_k$ є також зліченними. Отже, множини $\mathcal{A}^*_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$ є або зліченними або скінченними. Тоді, за теоремою 5.2.4, множина

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}^*_k$$

є зліченною

5.3 Незліченні множини

Нескінченні множини, не рівнопотужні множині натуральних чисел, будемо називати незліченними множинами. Найпростішим прикладом незліченної множини є множина $2^{\mathbb{N}}$ — нескінченних двійкових послідовностей, або булеан множини натуральних чисел.

Теорема 5.3.1.

$$|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|.$$

Доведення. Ін'єкція $\mathbb{N} \to |2^{\mathbb{N}}|$ будується таким чином $n \to \{n\}$; кожному натуральному числу n ставиться у відповідність одноелементна множина $\{n\}$. Отже, маємо $|\mathbb{N}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$. Покажемо, тепер що $|\mathbb{N}| \neq |2^{\mathbb{N}}|$. Доведення проведемо від супротивного, застосуванням діагонального методу Кантора. Припустимо, що існує бієкція $\mathbb{N} \leftrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ і побудуємо послідовність, що не отримала номера. Вказана бієкція визначає нумерацію послідовностей:

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} & \dots \\
2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & \dots \\
3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
n & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots,
\end{array},$$

$b_{i,j} \in \{0,1\}$. Визначимо послідовність $a_k = b_{kk} \oplus 1$. Ця послідовність повинна мати номер k^*, для якого $a_1 = b_{k^*1}, a_2 = b_{k^*2}, \dots, a_{k^*-1} = b_{k^*k^*-1}, a_{k^*} = b_{k^*k^*}, \dots$. Отримуємо суперечність $a_{k^*} = b_{k^*k^*} = b_{k^*k^*} \oplus 1$. Отже, так побудована послідовність не має номера, а це означає, що бієкції не існує. □

Очевидними властивостями незліченних множин є наступні:

- якщо деяка підмножина множини є незліченною, то і сама множина є такою;

- об'єднання незліченної множини з довільною іншою є незліченною множиною;

- декартів добуток незліченної множини з довільною іншою множиною є незліченною множиною.

Доведення цих властивостей методом від супротивного пропонуємо провести самостійно.

Наступна теорема є узагальненням теореми 5.3.1 на довільні множини.

Теорема 5.3.2. *Для довільної множини A має місце*

$$|A| < |2^A|. \tag{5.1}$$

Доведення. Як і в теоремі 5.3.1 будуємо ін'єкцію $A \mapsto 2^A, \quad a \mapsto \{a\}$.

Те що A і 2^A не є рівнопотужними доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує бієкція $\phi : A \leftrightarrow 2^A$, яка ставить у відповідність кожному елементу $a \in A$, підмножину $M_a \subseteq A$, тобто $a \leftrightarrow M_a$. Назвемо елемент a **хорошим**, якщо $a \in \phi(a) = M_a$ і назвемо елемент a **поганим**, якщо $a \notin \phi(a) = M_a$. Розглянемо підмножину $Bad \subseteq A$ всіх поганих елементів. Оскільки $\phi-$ бієкція, то існує елемент $x = \phi^{-1}(Bad) \in A$, тобто для якого $x \leftrightarrow Bad$.

Питання. Елемент x є хорошим чи поганим? Якщо він хороший, то $x \in Bad$, а отже він поганий. Якщо ж він поганий, то $x \notin Bad$, тобто $x \in \overline{Bad}$, але ж в множині Bad зібрано всі погані елементи, а отже $x-$ хороший. Отримана суперечність доводить теорему. $\square$

Ця теорема дозволяє будувати нескінченні ланцюги множин, де кожна множина занурюється в наступну, яка має більшу потужність, зокрема маємо

$$\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}} \to 2^{2^{\mathbb{N}}} \to 2^{2^{2^{\mathbb{N}}}} \to \dots .$$

Природне бажання вважати потужність числом приводить до поняття **кардинальних** чисел. Кількість елементів в зліченній множині позначається кардинальним "числом"$\aleph_0$ ($\aleph$ — давньогрецька літера, читається алеф), тобто за означенням $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Потужність булеана $2^{\mathbb{N}}$ називається **континуумом** і позначається $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. $i+1$-ше кардинальне число визначається через попереднє, як потужність булеана множини, що має потужність $\aleph_i$, що записують таким чином:

$$\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i},$$

Отже, маємо ланцюг потужностей

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_i < \aleph_{i+1} < \dots .$$

Виникає природне питання, чи існують незліченні множини, потужність яких була б менша континуума. Твердження про те, що множин такої потужності не існує називають **континуум гіпотезою** і в рамках наївної теорії множин, вона не може бути ні доведена ні спростована.

Більш загальним є питання про існування проміжних потужностей:

$$\aleph_i < \ ? \ < \aleph_{i+1}$$

Твердження про відсутність таких множин, що $\aleph_i < |A| < \aleph_{i+1}$ називають **узагальненою континуум гіпотезою** .

5.4 Задачі

1. На колі помічено 1000 білих і одну чорну точки. Яких фігур більше, трикутників, у яких всі вершини білі, чи чотирикутників, у яких одна вершина, чорна а решта білі?

2. Довести,що
   a) якщо $A \subseteq B$, то $\mid A \mid\leq\mid B \mid$;
   b) якщо $\mid A \mid\leq\mid B \mid$ і $\mid B \mid\leq\mid C \mid$, то $\mid A \mid\leq\mid C \mid$;
   c) якщо $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

3. Довести, що якщо $|A_1| = |B_1|$ і $|A_2| = |B_2|$, то $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.

4. Довести, що будь-які два інтервали (a, b) і (c, d) рівнопотужні.

5. Довести, що множина всіх цілих чисел є зліченною.

6. Довести, що множина всіх раціональних чисел є зліченною.

7. Довести, що множина всіх простих чисел є зліченною.

8. а) Довести, що множина всіх двоелементних підмножин зліченної множини є зліченною.

   б) Для довільного числа k довести, що множина всіх $k-$ елементних підмножин є зліченною.

   в) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини є зліченною.

9. Довести, що будь-яка множина відкритих інтервалів на дійсній прямій, що попарно не перетинаються є скінченною або зліченною.

10. Довести, що множина точок розриву монотонної функції дійсної змінної є або скінченною або зліченною.

11. Якою є потужність множин:
    a) $\{x \in \mathbb{N} | \quad x^2 < 7\}$;
    b) $\{x \in \mathbb{R} | \quad x^2 = 2\}$;
    c) $\{x \in \mathbb{N} | \quad x^2 < 0\}$;
    d) $\{x \in \mathbb{R} | \quad x^2 < 3\}$;
    e) $\{x \in \mathbb{N} | \quad x^2 > 3\}$?

12. Довести, що якщо A нескінченна множина і B — скінченна або зліченна, то $|A \cup B| = |A|$.

13. Якою є потужність множини всіх многочленів від n змінних з раціональними коефіцієнтами?

14. Якою є потужність множини всіх ірраціональних чисел?

15. Якою є множина всіх трансцендентних (неалгебраїчних) чисел?

16. Довести, що якщо $A \subseteq B \subseteq C$ і $|A| = |C|$, то $|B| = |A|$ і $|B| = |C|$.

17. Довести, що $|(0,1)| = |[0,1)| = |(0,1]| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$.

18. Якою є потужність множин:

    a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x = y = z\}$;

    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 + y^2 = 1\}$;

    c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 | \quad x + y = z\}$;

    d) множина всіх періодичних дробів;

    e) множина всіх прямих на площині?

19. Чи будуть рівнопотужними такі множини:

    a) множина всіх скінченних підмножин множини дійсних чисел і множина всіх нескінченних підмножин множини дійсних чисел;

    b) множина всіх скінченних підмножин множини раціональних чисел і множина всіх нескінченних підмножин множини раціональних чисел;

    c) множина всіх прямих на площині і множина всіх точок на площині;

    d) множина всіх булевих функцій і всіх функцій $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

    e) множина всіх функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ і всіх функцій $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

20. Довести, що множина всіх ірраціональних чисел з $(0, 1)$ є незліченною.

21. Довести, що якщо A незліченна множина, а B — зліченна або скінченна множина, то $|A \setminus B| = |A|$.

Розділ 6

Відношення і предикати.

Означення 6.0.1. Відношенням *(відповідністю) між множинами* $D_1, D_2, ..., D_n$ *називаеться довільна підмножина* R *декартового добутку:*

$$R \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n.$$

Характеристична функція відношення χ_R *називаеться її характеристичним* **предикатом**. *Тобто, предикат – це функція, визначена на декартовому добутку* $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$*, яка приймає значення з множини* $\{0, 1\}$.

Отже, поняття відношення і предикату є такими ж близькими, як множина та її характеристична функція.

Важливим прикладом бінарного відношення між множинами A, B є графік $\Gamma_f \subset A \times B$ довільної функції $f : A \to B$.

Якщо множини збігаються, тобто $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = D$, то говорять, що на множині D визначені $n-$ арне відношення та його характеристичний предикат.

Основним способом подання відношень є табличний. Рядками цієї таблиці є набори $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in R$, які називаються записами. Для формування запису слід заповнити n полів елементами $d_i \in D_i$, кожне з яких має свій номер і назву. Наприклад поле номер 4 може мати назву "рік народження"і має заповнюватися елементами з множини чотирицифрових чисел D_4 .

6.1 Операції над відношеннями.

Оскільки відношення є підмножинами, то для них визначені всі операції теорії множин: об'єднання, перетин, різниця, доповнення, симетрична різниця.

Можна розглядати різні проекції відношень. Нагадаємо, що проекція наборів з декартового добутку $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ на координати з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ визначається наступним чином:

$$Pr_{i_1,i_2,\ldots i_k}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = (d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_k}).$$

Визначимо **проекцію** відношення R на поля з номерами $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ або поля з відповідними назвами, як відношення між множинами $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_k}$, яке визначається наступним чином

$$Pr_{i_1,i_2,\ldots,i_k}R = \{(d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_k}) | \exists r \in R \; Pr_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(r) = (d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_k})\}. \quad (6.1)$$

Якщо $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}-$ номери, які не попали в послідовність $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, то для відповідного предикату будемо мати:

$$\chi_{Pr_{i_1,i_2,\ldots,i_k}R}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \exists x_{j_1} \exists x_{j_2}, \ldots, \exists x_{j_{n-k}} \chi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

Означення 6.1.1. *Нехай R_1 відношення між множинами D_1, D_2, а R_2 відношення між множинами E_1, E_2. Якщо $D_2 = E_1$, то згорткою (композицією) відношень по полям $2|1$ (2 - поле відношення R_1, 1 - поле відношення R_2) називається відношення між множинами D_1, E_2, яке визначається наступним чином:*

$$R_1 \circ R_2 = \{(d, e) | \exists d^* \in D_2 : (d, d^*) \in R_1 \wedge (d^*, e) \in R_2.\} \quad (6.2)$$

Узагальнюючи цю ситуацію розглянемо відношення R_1 між множинами $D_i, i = 1, 2, \ldots, n_1$, і відношення R_2 між множинами, $E_j, j = 1, 2, \ldots, n_2$. Припустимо, що назви полів з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ першого відношення збігаються з назвами полів другого відношення, що мають відповідні номери: $j_1, j_2, \ldots, j_m$. Тобто, можна вважати, що $D_{i_1} = E_{j_1}, D_{i_2} = E_{j_2} \ldots D_{i_m} = E_{j_m}$. Позначимо через $k_1, k_2, \ldots, k_{n_1-m}-$ номера полів, які не попали в послідовність $i_1, i_2, \ldots, i_m$, а через $l_1, l_2, \ldots, l_{n_2-m}-$ номера, що не попали в послідовність $j_1, j_2, \ldots, j_m$.

$i_1, i_2, \ldots, i_m | j_1, j_2, \ldots, j_m-$. **згорткою** *або композицією відношень R_1, R_2 називається відношення*

$$R_1 \circ_{i_1,i_2,\ldots,i_m|j_1,j_2,\ldots,j_m} R_2 \subseteq D_{k_1} \times D_{k_2} \ldots D_{k_{n_1-m}} \times E_{l_1} \times E_{l_2} \times \ldots \times E_{l_{n_2-m}},$$

яке визначається наступним чином

$$\begin{gathered} R_1 \circ_{i_1,i_2,\ldots,i_m} R_2 = \{(d_{k_1}, d_{k_2}, \ldots, d_{k_s}, e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots e_{l_t}) | \exists r_1 \in R_1, \exists r_2 \in R_2 : \\ Pr_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(r_1) = Pr_{j_1,j_2,\ldots,j_m}(r_2), \\ Pr_{k_1,k_2,\ldots,k_s}(r_1) = (d_{k_1}, d_{k_2}, \ldots, d_{k_s}), Pr_{l_1,l_2,\ldots,l_t}(r_2) = (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_t})\}. \quad (6.3) \end{gathered}$$

Для відповідних предикатів маємо такі формули:

$$\chi_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \exists y \left(\chi_{R_1}(x, y) \wedge \chi_{R_2}(y, z)\right),$$

$$\chi_{R_1 \circ R_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n_1-m}}, x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_{n_2-m}}) = \exists x_{i_1} \exists x_{i_2} \ldots \exists x_{i_m} \left(\chi_{R_1} \wedge \chi_{R_2}\right).$$

Для відношення R між множинами D_1, D_2 визначимо обернене відношення

$$R^{-1} = \{(d_1, d_2) | (d_2, d_1) \in R\} \subseteq D_2 \times D_1. \quad (6.4)$$

Для відношення R між множинами $D_1, D_2, ..., D_n$ і довільної перестановки індексів $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, визначимо відношення R^σ між множинами $D_{i_1}, D_{i_2}, ..., D_{i_n}$, яке складається з таких наборів $(d_{i_1}, d_{i_2}, ..., d_{i_n})$, що після зворотньої перестановки координат σ^{-1}, отриманий набір належить R, тобто $(d_{i_1}, d_{i_2}, ..., d_{i_n})^{\sigma^{-1}} \in R$. Для отримання таблиці відношення R^σ слід зробити відповідну перестановку полів всіх записів у таблиці відношення R.

Приклад 6.1.1. *Припустимо, що потрібно провести дослідження зв'язку між хворобами та професіями мешканців певного регіону. Інформація отримана з баз даних підприємств та установ регіону була оформлена у вигляді таблиць відношень. Операціями проекції та об'єднання відношень була отримана одна таблиця відношення R_1між множинами $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5,$ де D_1 — множина прізвищ, D_2 — множина імен, D_3 — множина імен по батькові, D_4 — множина чотирицифрових чисел , D_5 — множина професій, D_6 — множина двоцифрових чисел.*

Прізвище	*Ім'я*	*По батькові*	*Рік нар.*	*Професія*	*Стаж роб.*
Антонюк	*Іван*	*Васильович*	*1950*	*бухгалтер*	*24*
Антонюк	*Марія*	*Пилипівна*	*1954*	*інженер*	*20*
Богомаз	*Петро*	*Іванович*	*1963*	*електрик*	*15*
Болюбаш	*Марія*	*Іванівна*	*1965*	*вчитель*	*17*
Бровко	*Роман*	*Петрович*	*1955*	*інженер*	*25*
Бровченко	*Степан*	*Петрович*	*1955*	*зварювальник*	*25*
Бровченко	*Юрій*	*Петрович*	*1955*	*зварювальник*	*25*
Вірченко	*Антон*	*Степанович*	*1958*	*електрик*	*20*
...	...	...	...	...	...

З баз даних медичних закладів регіону було сформовано відношення R_2:

Прізвище	*Ім'я*	*По батькові*	*Рік нар.*	*Діагноз*	*Група крові*
Антонюк	*Іван*	*Васильович*	*1950*	*стенокардія*	*2*
Антонюк	*Марія*	*Пилипівна*	*1954*	*виразка шлунка*	*2*
Бабенко	*Сидір*	*Петрович*	*1945*	*стенокардія*	*3*
Богомаз	*Петро*	*Іванович*	*1963*	*гіпертонія*	*3*
Болюбаш	*Марія*	*Іванівна*	*1965*	*гайморит*	*1*
Бровко	*Роман*	*Петрович*	*1955*	*хронічний бронхіт*	*2*
Бровченко	*Юрій*	*Петрович*	*1955*	*аритмія*	*1*
Вірченко	*Антон*	*Степенович*	*1958*	*виразка шлунка*	*3*
...	...	...	...	...	...

Для отримання потрібного відношення слід виконати згортку відношення R_1 та відношення R_2 по полях "прізвище", "ім'я", "по батькові","рік народження". Таблиця такої згортки буде мати вигляд:

Професія	*Стаж роб.*	*Діагноз*	*Група крові*
бухгалтер	*24*	*стенокардія*	*2*
інженер	*20*	*виразка шлунка*	*2*
електрик	*15*	*гіпертонія*	*3*
вчитель	*17*	*гайморит*	*1*
інженер	*25*	*хронічний бронхіт*	*2*
зварювальник	*25*	*аритмія*	*1*
електрик	*20*	*виразка шлунка*	*3*
...	...	...	...

.

Проекція отриманого відношення на поля - "професія", "хвороба"і буде потрібним відношенням.

Для бінарних відношень $R \subset A \times B$ вкажемо деякі інші форми їх задання:

1) таблицею (матрицею) відповідного предикату:

$$
\begin{array}{c||c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & \dots & b_l \\
\hline
a_1 & * & * & \dots & * \\
a_2 & * & * & \dots & * \\
a_3 & * & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_k & * & * & \dots & * \\
\hline
\end{array},
$$

де $* \in \{0, 1\}$;

2) **графом відношення**: елементи множин зображаються точками пари яких з'єднуються орієнтованими дугами, якщо вони належать відношенню;

3) якщо множини A, B є числовими, тобто $A, B \subset \mathbb{R}$, то кожній парі $(a, b) \in R$, можна співставити точку на декартовій площині, що має координати $x = a, y = b$; отримана множина точок називається **графіком** відношення.

Якщо на площині зображені графи відношень $R_1 \subset A \times B$ та $R_2 \subset B \times C$, то граф відношення $R_1 \circ R_2$ можна отримати з'єднанням дугами тих пар $(a, c), a \in A, c \in C$, для яких існує шлях $a \to b \to c$, де перша стрілка відповідає дузі графа відношення R_1, а друга дузі графа відношення R_2. Для побудови графа відношення R^{-1} слід у графі відношення R змінити напрямок дуг на протилежний.

Питання. Якщо множини A, B є числовими, то як розташовується графік відношення R^{-1} по відношенню до графіка відношення R?

6.2 Бінарні відношення спеціальних типів.

Означення 6.2.1. *Бінарне відношення R на множині D називається* **рефлексивним**, *якщо*

$$\forall d \in D \quad (d, d) \in R.$$

Бінарне відношення R називається **антирефлексивним**, *якщо*

$$\forall d \in D \quad (d, d) \notin R.$$

Означення 6.2.2. *Бінарне відношення R на множині D називається* **симетричним**, *якщо*

$$\forall d_1, d_2 \in D \quad (d_1, d_2) \in R \Rightarrow (d_2, d_1) \in R.$$

Бінарне відношення R **антисиметричним**, *якщо*

$$\forall d_1, d_2 \in D \quad (d_1, d_2) \in R \ \wedge \ (d_2, d_1) \in R \Rightarrow d_1 = d_2.$$

Означення 6.2.3. *Бінарне відношення R на множині D називається* **транзитивним** *, якщо*

$$\forall d_1, d_2, d_3 \in D \quad (d_1, d_2) \in R \wedge (d_2, d_3) \in R \Rightarrow (d_1, d_3) \in R.$$

Відношення $\delta = \{(d, d) | d \in D\} \subset D \times D$ називають **діагоналлю**. Умова рефлексивності означає, що $\delta \subseteq R$, а умова антирефлексивності означає, що $\delta \subseteq \overline{R}$, тобто рефлекивним є доповнення до відношення R. Умова симетричності відношення R може бути записана таким чином:

$$R = R^{-1},$$

а умова транзитивності у такий спосіб:

$$R \circ R \subseteq R.$$

Означення 6.2.4. *Нехай $*$ - одна з властивостей - рефлексивність, симетричність або транзитивність. Тоді $*$-* **замиканням** *відношення R називається найменше (за включенням) бінарне відношення $\widetilde{R}$ таке, що $\widetilde{R} \supseteq R$ (на множині D) що має властивість $*$ і $\widetilde{R} \supseteq R$.*

6.2.1 Відношення еквівалентності

Означення 6.2.5. *Бінарне відношення R на множині D називається* **відношенням еквівалентності***, якщо воно*

1) рефлексивне

2) симетричне

3) транзитивне.

Для відношень еквівалентності замість запису $(d_1, d_2) \in R$ вживають запис $d_1 \sim d_2$.

Приклад 6.2.1. *Звичайне відношення рівності чисел є відношенням еквівалетності на довільній числовій множині:*

Рівність підмножин є також відношенням еквівалентності на булеані:

Рівнопотужність множин є відношенням еквівалентності;

Геометрична рівність фігур, коли існує рух площини, що переводить одну фігуру в іншу, є також прикладом відношення еквівалентності на множині геометричних фігур на площині.

Приклад 6.2.2. *Нехай задано розбиття множини D, тобто задано сукупність множин $A_i, i \in I$:*

1) $D = \bigcup_{i \in I} A_i$*;*

2) $\forall i, j \in I,\ i < j$ *має місце* $A_i \cap A_j = \varnothing$*.*

Визначимо відношення R *наступним чином:*

$$(d_1, d_2) \in R \Leftrightarrow \exists i \in I : d_1, d_2 \in A_i.$$

Неважко переконатися, що всі три умови справджуються і R *є відношенням еквівалентності.*

Виявляється, що всі відношення еквівалентності можна описати у такий спосіб. Нехай на множині D задано відношення еквівалентності $\sim$. Для кожного $a \in D$ введемо в розгляд множини

$$D_a = \{d \in D | d \sim a\}.$$

Теорема 6.2.1. *Для будь-яких елементів* $a, b \in D$ *має місце одне з двох:*

або $D_a = D_b$

або $D_a \cap D_b = \varnothing$*.*

Доведення. Припустимо, що $D_a \cap D_b \neq \varnothing$ і $d^* \in D_a \cap D_b$, тоді за означенням множин D_a, D_b, маємо: $a \sim d^*, b \sim d^*$. Враховуючи симетричність відношення, $a \sim d^*, d^* \sim b$, а за транзитивністю $a \sim b$ і звичайно $b \sim a$. Тоді для будь-якого елемента $d \in D_a$, за транзитивністю маємо $d \sim a \sim b \Rightarrow d \sim b \Rightarrow d \in D_b$, тобто $D_a \subseteq D_b$. Аналогічно доводиться протилежне включення і отримується рівність $D_a = D_b$. □

Означення 6.2.6. *Множини* D_a *називаються класами еквівалентності, а множина елементами якої є класи еквівалентності називається* **фактор-множиною** *множини* D *по відношенню еквівалентності* $\sim$ *і позначається* $D/\sim$.

Сукупність елементів множини A*, взятих по одному з кожного класу еквівалентності називається* **сукупністю представників** *класів еквівалентності.*

Перед наведенням відповідного прикладу нагадаємо, що на множині цілих чисел визначена операція ділення з остачею. Для довільних $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, однозначно визначена частка $q \in \mathbb{Z}$ і остача $r :\ 0 \leq r < b$, як числа для яких виконується: $a = q \cdot b + r$,

Приклад 6.2.3. *Нехай $D = \mathbb{Z}-$ множина цілих чисел і $n \in \mathbb{N}, n > 1,-$ фіксоване натуральне число. Визначимо бінарне відношення R_n :*
$(z_1, z_2) \in R_n \Leftrightarrow$ остачі від ділення z_1 та z_2 на n збігаються $\Leftrightarrow$ $z_1 - z_2$ ділиться на n.

Переконайтесь самостійно, що це дійсно відношення еквівалентності. Розглянемо множину $\mathbb{Z}_0-$ чисел які еквівалентні числу 0. За означенням, вона складається з чисел які діляться на n. Позначимо цю множину $\overline{0}$. Елементами множини $\mathbb{Z}_1-$ є числа які при діленні на n дають в остачі 1, і множину цих чисел позначимо $\overline{1}$. В такий спосіб ми отримуємо опис фактор-множини:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}\},$$

де $\overline{k}-$ є множиною цілих чисел, які при діленні на n дають в остачі k. Елементи фактор-множини $\mathbb{Z}_n$ називають **лишками** *за модулем n. При цьому, остачі $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ від ділення на n утворюють природну систему представників цього відношення еквівалентності.*

Для описаного відношення еквівалентності прийнято вживати позначення:

$$x \equiv y \mod n \Leftrightarrow (x, y) \in R_n,$$

Для довільного цілого числа $a \in \mathbb{Z}$, запис $\bar{a}$ означає клас еквівалентності до якого належить a, зокрема, якщо $a = q \cdot n + r, \quad 0 \leq r < n, \quad r-$ остача від ділення a на n, то $\bar{a} = \bar{r}$ і r є представником цього класу.

Розглянемо вказане відношення еквівалентності для $n = 7$ і для даного $a \in \mathbb{Z}$ розглянемо множину класів виду $\overline{a^k}, k = 1, 2, 3, \ldots$. Для $a = 0$ будемо мати $0^1 = 0^2 = \ldots = 0^k = \ldots = 0$, а для $a = 1$ маємо $= 1^1 = 1^2 = \ldots = 1^k = \ldots = 1$. В такий спосіб отримуємо таблицю для інших значень представників $a = 2, 3, 4, 5, 6$.

a^k	2	3	4	5	6
2	$4 \ni \overline{4}$	$8 \ni \overline{1}$	$16 \ni \overline{2}$	$32 \ni \overline{4}$	$64 \ni \overline{1}$
3	$9 \ni \overline{2}$	$27 \ni \overline{6}$	$81 \ni \overline{4}$	$243 \ni \overline{5}$	$729 \ni \overline{1}$
4	$16 \ni \overline{2}$	$64 \ni \overline{1}$	$256 \ni \overline{4}$	$1024 \ni \overline{2}$	$4096 \ni \overline{1}$
5	$25 \ni \overline{4}$	$125 \ni \overline{6}$	$625 \ni \overline{2}$	$3125 \ni \overline{3}$	$15625 \ni \overline{1}$
6	$36 \ni \overline{1}$	$216 \ni \overline{6}$	$1296 \ni \overline{1}$	$7776 \ni \overline{6}$	$46656 \ni \overline{1}$

Насправді, щоб уникнути громіздких обчислень слід помітити, що остача від ділення добутку двох чисел на дане число дорівнює остачі від ділення добутку остач цих чисел на вказане число. Наприклад, якщо ми вже знаємо, що остача від ділення 5^5 на 7 дорівнює 3, то для отримання остачі від ділення $5^6 = 5^5 \cdot 5$ на 7 слід першу остачу 3 помножити на 5 (остача від ділення 5 на 7) і взяти остачу від ділення їх добутку $3 \cdot 5 = 15$ на 7, яка дорівнює 1. Використанням цього прийому вказану таблицю можна заповнити досить швидко.

З отриманої таблиці видно, що в кожному рядку присутня принаймні одна одиниця. Виявляється, що це є загальна властивість піднесення до степеня за модулем простого числа, а саме має місце

Лема 6.2.1. *Для будь-якого цілого числа a, яке не ділиться на фіксоване просте число p, існує натуральне число k таке, що $a^k \equiv 1 \mod p$.*

Доведення. Для згаданого a розглянемо множину лишків $\{\overline{a^k} | k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Хоча k пробігає нескінченну кількість значень, але кількість лишків скінченна, отже, існують натуральні $l, m (l \neq m)$ такі, що $a^l \equiv a^m \mod p$. Звідки маємо, що різниця $a^l - a^m$ ділиться на p. Для $l \geq m$ маємо $a^l - a^m = a^m(a^{l-m} - 1)$. Добуток чисел ділиться на просте число, тоді і тільки тоді, коли принаймні один з співмножників на нього ділиться. Але за умовою леми a не ділиться на p, отже, на p ділиться $a^{l-m} - 1$, звідки $a^{l-m} \equiv 1 \mod p$. □

Означення 6.2.7. *Найменше натуральне k, для якого має місце $a^k \equiv 1 \mod p$ називають порядком елемента a за модулем p і позначають $|a|_p$ або просто $|a|$, якщо просте число фіксоване.*

З наведеної таблиці видно, що $|2|_7 = 3$, $|3|_7 = 6$, $|4|_7 = 3$, $|5|_7 = 6$, $|6|_7 = 2$.

Вправа. Покажіть, що якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ має місце $a^m \equiv 1 \mod p$, то m ділиться на порядок $|a|_p$ елемента a.

Зауважимо, що якщо n не є простим числом, то твердження леми неправильне. Дійсно, при $n = 4$ і $a = 2$ маємо, $a^2 = 4 \equiv 0 \mod 4, 2^k \equiv 0 \mod 4, k > 1$. Тобто ні для якого натурального k остача від ділення 2^k на 4 не буде дорівнювати 1.

Звернемо увагу також, що в останньому стовпчику наведеної таблиці стоять всі одиниці. Виявляється, що це не випадково. Має місце

Теорема 6.2.2. Мала теорема Ферма. *Для довільних простого числа p і натурального a, яке не ділиться на p має місце*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \ .$$

Доведення. Для доведення цієї теореми ми знову використаємо певне відношення еквівалентності. Для даного a визначимо відношення R_a на множині $\mathbb{Z}$ наступним чином:

$$(x, y) \in R_a \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \geq 0 (\ x \equiv a^m \cdot y \mod p).$$

Перевіримо умови рефлексивності, симетричності та транзитивності. Рефлексивність очевидна, адже $x = a^0 \cdot x$. Якщо $(x, y) \in R_a$, то для деякого m має місце $x \equiv a^m \cdot y \mod p$, тобто $x - a^m \cdot y$ ділиться на p. При цьому не втрачаючи загальності, можна вважати, що $m < |a|_p = k$ (чому?). Тоді число

$$a^{k-m} \cdot (x - a^m \cdot y) = a^{k-m} \cdot x - a^{k-m} \cdot a^m \cdot y = a^{k-m} \cdot x - a^k \cdot y = a^{k-m} \cdot x - y$$

також ділиться на p, а отже $y - a^{k-m} \cdot x$ ділиться на p, тобто $y \equiv a^{k-m} \cdot x \mod p$, а отже, $(y, x) \in R_a$.

Доведемо транзитивність. Припустимо, що $(x, y), (y, z) \in R_a$, тоді існують такі $0 \leq l, m < k$:

$$x \equiv a^l \cdot y \mod p, \quad y \equiv a^m \cdot z \mod p.$$

Оскільки $y - a^m \cdot z$ ділиться на p, то і число $a^l \cdot (y - a^m \cdot z)$ ділиться на p. Але число $x - a^l \cdot y$ також ділиться на p, а отже на p ділиться їх сума

$$a^l \cdot (y - a^m \cdot z) + x - a^l \cdot y = x - a^{l+m} \cdot z,$$

звідки, $x \equiv a^{l+m} \cdot z \mod p$, тобто $(x, z) \in R_a$. Отже, для довільного a, яке не ділиться на p маємо відношення еквівалентності, на множині цілих чисел, яке на далі будемо позначати $\sim_a$. Легко бачити, що якщо $x_1 \equiv x_2 \mod p$, $y_1 \equiv y_2 \mod p$ і $x_1 \sim_a y_1$, то $x_2 \sim_a y_2$. Таким чином, $\sim_a$ можна розглядати як відношення еквівалентності на множині лишків $\mathbb{Z}_p$.

Класи еквівалентності $\sim_a$ на множині $\mathbb{Z}_p$ найпростіше будувати послідовним множенням на число a з вибором найменшого представника класу за $mod p$:

$$x, x_1 = a \cdot x, \ldots, x_{i+1} = a \cdot x_i, \ldots, i = 2, 3, \ldots.$$

Розглянемо ці відношення $\sim_a$ для вищенаведеного прикладу $n = 7$. При $a = 2$ маємо такі класи еквівалентності відношення $\sim_2$:

$$\{\overline{0}\}, \{\overline{1}, 2 \cdot 1 \in \overline{2}, 2 \cdot 2 \in \overline{4}\}, \{\overline{3}, 2 \cdot 3 \in \overline{6}, 2 \cdot 6 \in \overline{5}\}.$$

Отже, маємо один клас еквівалентності з одного елемента $\{\overline{0}\}$ і два класи еквівалентності $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$, $\{\overline{3}, \overline{6}, \overline{5}\}$, що містять по три елементи. Для відношення еквівалентності $\sim_3$ будемо мати два класи еквівалентності: $\{\overline{0}\}$ та клас

$$\{\overline{1}, \overline{3}, 3 \cdot 3 \in \overline{2}, 3 \cdot 2 \in \overline{6}, 3 \cdot 6 \in \overline{4}, 3 \cdot 4 \in \overline{5}\}.$$

куди попала решта лишків. Для відношення $\sim_6$ отримуємо крім $\{\overline{0}\}$ ще двохелементні класи еквівалентності:

$$\{\overline{1}, \overline{6}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}, \{\overline{3}, \overline{4}\}.$$

Повернемося тепер до доведення теореми. Легко бачити, що кількість елементів у всіх класах еквівалентності $\sim_a$ відмінних від $\{\overline{0}\}$ однакова і дорівнює порядку елемента a. Дійсно, якщо $k = |a|_p$, то враховуючи, що для довільного x має місце $a^k \cdot x \equiv x \ mod \ p$ елементи

$$\bar{x}, \overline{a \cdot x}, \overline{a^2 \cdot x}, \ldots, \overline{a^{k-1} \cdot x}$$

утворюють клас еквівалентності, який містить рівно k елементів, незалежно від обраного $x \neq 0$. Якщо r це кількість таких класів, що не містять 0. Тоді, отримуємо, що

$$|\mathbb{Z}_p| = p = 1 + r \cdot k,$$

звідки, маємо, $p-1 = r \cdot k$, тобто число $p-1$ ділиться порядок довільного числа $a \neq 0$. Таким чином,

$$a^{p-1} = a^{r \cdot k} = \left(a^k\right)^r.$$

Оскільки число a^k при діленні на p дає в остачі 1, то і степінь цього числа при діленні на p буде теж давати остачу 1. Цим доведення теореми завершено. $\square$

6.2.2 Відношення часткового порядку.

Означення 6.2.8. *Бінарне відношення на множині D називається відношенням* **строгого часткового порядку,** *якщо воно*

i) антирефлексивне;

ii) транзитивне.

Означення 6.2.9. *Бінарне відношення на множині D називається відношенням* **нестрогого часткового порядку,** *якщо воно*

i) рефлексивне;

ii) антисиметричне;

iii) транзитивне.

Надалі будемо вживати такі позначення:

$a \prec b-$ елементи a, b знаходяться у відношенні строгого часткового порядку $\prec$;

$a \preceq b-$ елементи a, b знаходяться у відношенні нестрогого часткового порядку $\preceq$.

Неважко переконатися, що рефлексивне замикання відношення строгого часткового порядку є відношенням нестрогого часткового порядку. Дійсно, якщо для якоїсь пари $a, b \in D$ має місце $a \prec b$ і $b \prec a$ одночасно, то з транзитивності випливає, що тоді $a \prec a$, що суперечить антирефлексивності відношення $\prec$. Отже, для довільної пари a, b різних елементів із D одночасне виконання

$a \prec b$ і $b \prec a$ є неможливим. У рефлексивному замиканні ми до множини пар $(a, b) : a \prec b$ додаємо лише діагональ — усі пари $(d, d), d \in D$, адже воно є мінімальним рефлексивним за включенням. Отже, буде мати місце антисиметричність. При цьому транзитивність збережеться.

Навпаки, якщо $\preceq$ — відношення нестрогого часткового порядку, то відношення $R = \{(a, b) \mid a \neq b \& a \preceq b\}$ є очевидно відношенням строгого часткового порядку, причому R є його рефлексивним замиканням. Отже, строге та відповідне нестроге відношення однозначно визначають одне одне.

Означення 6.2.10. *Множина D, на якій задано відношення строгого або нестрогого частково порядку, називається* **частково–впорядкованою** *множиною (ч.в.м.), позначається $(D, \prec)$.*

Якщо для пари елементів $a, b \in D$ частково впорядкованої множини не виконується жодна з умов $a \preceq b, b \preceq a$ то будемо говорити, що ці елементи є непорівнянними.

Означення 6.2.11. *Відношення часткового порядку $\prec$ називається відношенням* **лінійного** *або* **повного** *порядку, якщо*

$$\forall d_1, d_2 \in D \quad ((d_1 \preceq d_2) \vee (d_2 \preceq d_1)).$$

Очевидно, що при лінійному впорядкуванні непорівнянних пар не існує.

Означення 6.2.12. *Дві частково-впорядковані множини $(D_1, \prec_1), (D_2, \prec_2)$, називаються* **ізоморфними***, якщо існує бієкція $\phi : D_1 \leftrightarrow D_2$ така, що*

$$\forall d_1, d_2 \in D \quad (d_1 \prec_1 d_2) \Leftrightarrow \phi(d_1) \prec_2 \phi(d_2).$$

Доведіть самостійно, що якщо множини D_1, D_2 є скінченними $|D_1| = |D_2|$, а $\prec_1, \prec_2$ є відношеннями лінійних порядків, то ці частково-впорядковані множини ізоморфні.

Приклад 6.2.4. *Множина натуральних чисел та будь-яка її підмножина з природним відношенням $<$ є частково впорядкованою множиною.*

Більш того, цей порядок є лінійним.

Приклад 6.2.5. *Протилежним до лінійного порядку є такий, що множина $\{(a, b) | a \prec b\}$ є порожньою. Тобто будь-які два елементи є непорівнянними.*

Приклад 6.2.6. *Нехай $\Omega-$ універсальна множина і 2^{Ω} її булеан. На множині 2^{Ω} розглянемо бінарне відношення*

$$\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq \Omega\}.$$

Вказане відношення є відношенням нестрогого часткового порядку. Переконайтесь у цьому.

Приклад 6.2.7. *На множині натуральних чисел введемо відношення*

$$\{(m,n)|m \ \text{є дільником числа} \ n\}.$$

Вказане відношення є також відношенням нестрогого часткового порядку (переконайтесь у цьому).

Приклад 6.2.8. *Нехай* $(D,\prec)$– *частково-впорядкована множина. Тоді відношення*
$\{(d_1,d_2)|d_2 \prec d_1\}$ *є відношенням строгого часткового порядку (антипорядок).*

Нехай $(A,\preceq_1),(B,\preceq_2)$ є дві частково-впорядковані множини. Виникає питання, як можна визначити відношення часткового порядку на декартовому добутку $A\times B$. Перше що спадає на думку, це впорядкувати пари у такий спосіб:

$$(a_1,b_1)\preceq(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1\preceq_1 a_2 \ \ \& \ \ b_1\preceq_2 b_2.$$

Переконайтеся, що це дійсно відношення часткового порядку. При цьому, воно не буде лінійним навіть, якщо такими були $\preceq_1,\preceq_2$. Дійсно, адже пари $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ для яких $a_1\prec a_2, b_2\prec b_1$ є непорівнянними.

Але можна ввести так званий **прямий лексикографічний порядок.**

$$(a_1,b_1)\preceq_{lex}(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1\preceq_1 a_2 \quad\vee\quad (a_1=a_2 \ \& \ b_1\preceq_2 b_2).$$

Зворотній лексикографічний порядок. визначається наступним чином

$$(a_1,b_1)\preceq_{invlex}(a_2,b_2)\Leftrightarrow b_1\preceq_2 b_2 \quad\vee\quad (b_1=b_2 \ \& \ a_1\preceq_1 a_2).$$

Переконайтесь у тому, що ці відношення є відношеннями часткового порядку, причому якщо відношення $\preceq_1,\preceq_2$ є лінійними, то такими будуть обидва лексикографічні впорядкування.

Вказані впорядкування легко узагальнюються на довільну скінченну кількість множин. Нехай $(D_i,\preceq_i),\ i=1,2,\ldots,k,$ – сукупність частково-впорядкованих множин. На множині $D_1\times D_2\times\ldots\times D_k$ визначимо відношення:

$$(u_1,u_2,\ldots,u_k) \ \preceq \ (v_1,v_2,\ldots,v_k) \ \Leftrightarrow \ \forall i \ = \ 1,2,\ldots,k, \quad u_i \ \preceq_i \ v_i; \quad (6.5)$$

$$(u_1,u_2,\ldots,u_k)\preceq_{lex}(v_1,v_2,\ldots,v_k)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_1\preceq v_1\vee\exists j(\ \forall l, l<j\leq k,\ u_l=v_l \ \& \ ,u_j\preceq_j v_j); \quad (6.6)$$

$$(u_1,u_2,\ldots,u_k)\preceq_{invlex}(v_1,v_2,\ldots,v_k)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_k\preceq v_k\vee\exists j(\ \forall l, k\geq l>j,\ u_l=v_l \ \& \ ,u_j\preceq_j v_j); \quad (6.7)$$

Означення 6.2.13. *Нехай* $(D, \prec)-$ *частково-впорядкована множина. Елемент* $a \in D$ *називається* **максимальним (мінімальним)**, *якщо*

$$\neg \exists d \in D : \quad a \prec d, \qquad (d \prec a)$$

Означення 6.2.14. *Нехай* $A \subseteq D-$*довільна підмножина. Елемент* $a^* \in A$ *називається* **найбільшим (найменшим)** *елементом множини* A, *якщо* $\forall a \in A \;\; a \preceq a^* \quad (a^* \preceq a)$.

Означення 6.2.15. *Елемент* $d \in D$ *називається* **верхньою (нижньою) гранню або межею** *множини* A, *якщо* $\forall a \in A \; a \preceq d, \qquad (d \preceq a)$.

Звичайно, що найбільший або найменший елементи, якщо вони існують є верхньою та нижньою гранями множини A. Але довільна грань множини може не бути її елементом.

Означення 6.2.16. *Розглянемо множину* $U = U(A) \;\; (L = L(A))$ *верхніх (нижніх) граней множини* A. *Найменший (найбільший) елемент множини верхніх (нижніх)граней* $U \;\; (L)$ *називається* **супремумом (інфімумом)** *множини* A *і позначається*
$\sup A \;\; (\inf A)$.

Зрозуміло, що всі перелічені типи елементів: максимальні та мінімальні, найбільші та найменші, верхні та нижні грані, супремуми та інфімуми можуть і не існувати.

Означення 6.2.17. *Частково-впорядкована множина* $(D, \prec)$ *називається* **решіткою**, *якщо для довільної двохелементної підмножини* $A = \{a, b\} \subset D$ *існують* $\sup A$ *та* $\inf A$.

Приклад 6.2.9. *Довільна лінійно-впорядкована множина є решіткою.*

Дійсно, для довільної двохелементної множини $\{a, b\}$ або $a \prec b$ або $b \prec a$. В першому випадку $b = \sup A, a = \inf A$ в другому випадку навпаки.

Нетривіальні приклади решіток дають нам приклади 6.2.6,6.2.7. Дайте опис $\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\}$ для цих прикладів.

Означення 6.2.18. *Частково-впорядкована множина* $(D, \prec)$ *називається* **повною решіткою**, *якщо для довільної підмножини* $A \subseteq D$ *існують* $\sup A$ *та* $\inf A$.

Прикладом повної решітки є приклад 6.2.6 (доведіть це). Частково-впорядкована множина з прикладу 6.2.7 не є повною решіткою (чому ?).

6.3 Задачі

1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Для заданого відношення R на множині M визначити $Pr_1R, Pr_2R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$ і $R^{-1} \circ R$:

   (а) $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$;

   (б) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 4)\}$;

   (в) $R = \{(2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 2)\}$;

   (г) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 5)\}$.

2. Для заданого відношення R на множині N

   (а) $R = \{(m, n)|\ n$ ділиться на $m\}$;

   (б) $R = \{(m, n)|\ m - n$ ділиться на $k, k \in N\}$

   визначити Pr_1R, Pr_2R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$ і $R^{-1} \circ R$, $\overline{R}$. Визначити, чи будуть ці відношення рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, транзитивними.

3. Довести, що для довільного відношення R на множині M

   (а) $Pr_1R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow Pr_2R = \emptyset$;

   (б) $Pr_2R = Pr_1R^{-1}$;

   (в) $Pr_1R = Pr_2R^{-1}$.

4. Довести, що для будь-яких відношень виконується:

   (а) $(R \cup R) \cap R = R$;

   (б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

   (в) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = {R_1}^{-1} \cup {R_2}^{-1}$.

5. На множині Z задано відношення:

   $(m, n) \in R_1 \quad \Leftrightarrow m - n$ парне число;

   $(m, n) \in R_2 \quad \Leftrightarrow m + n$ парне число;

   $(m, n) \in R_3 \quad \Leftrightarrow m - n \leq 100$;

   $(m, n) \in R_4 \quad \Leftrightarrow m - n$ непарне число;

   $(m, n) \in R_5 \quad \Leftrightarrow m + n$ непарне число;

   $(m, n) \in R_6 \quad \Leftrightarrow m/n$ парне число;

   $(m, n) \in R_7 \quad \Leftrightarrow m/n$ непарне число;

   $(m, n) \in R_8 \quad \Leftrightarrow m * n$ парне число;

   $(m, n) \in R_9 \quad \Leftrightarrow m * n$ непарне число;

$(m,n) \in R_{10} \quad \Leftrightarrow m-n \quad$ є степенем числа 2;

$(m,n) \in R_{11} \quad \Leftrightarrow m$ і $n \quad$ мають спільний дільник, відмінний від 1.

Визначити, які з них є

(а) рефлексивними;

(б) антирефлексивними;

(в) симетричними;

(г) антисиметричними;

(д) транзитивними.

6. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 може не бути антирефлексивним відношенням.

7. Довести, що для симетричних відношень R_1 і R_2 будуть симетричними відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, ${R_1}^{-1}$, $R_1 \circ {R_1}^{-1}$.

8. Побудувати два симетричних відношення R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$, композиція яких $R_1 \circ R_2$ не буде симетричним відношенням.

9. Навести приклад транзитивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$ таких, що

   (а) $R_1 \circ R_2$ нетранзитивне;

   (б) $R_1 \circ R_2$ транзитивне;

   (в) $R_1 \circ R_2 \neq R_1$;

   (г) $R_1 \circ R_2 = R_1$.

10. Побудувати відношення

    (а) симетричне, транзитивне, нерефлексивне;

    (б) рефлексивне, симетричне, нетранзитивне;

    (в) рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне;

    (г) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

    (є) несиметричне, неантисиметричне;

    (ж) нерефлексивне, неантирефлексивне, несиметричне, транзитивне.

11. Побудувати транзитивні, рефлексивні і симетричні замикання R^* відношень з прикладу 1 цього розділу.

12. Скільки є рефлексивних відношень на множині з n елементів? Скільки атирефлексивних?

13. На множині $\overline{\mathbf{N}} \times \overline{\mathbf{N}}$ ($\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{0\}$) визначимо відношення $\mathcal{R}$ і $\mathcal{Q}$
(а) $((a,b),(c,d)) \in \mathcal{R} \quad \Longleftrightarrow \quad a+d=b+c$;
(б) $((a,b),(c,d)) \in \mathcal{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad$ ($a \cdot d = b \cdot c$ для $b \neq 0$ і $d \neq 0$) або ($a = c$ для $b = 0$ або $d = 0$).

Довести, що відношення $\mathcal{R}$ і $\mathcal{Q}$ є відношеннями еквівалентності на множині $\overline{\mathbf{N}} \times \overline{\mathbf{N}}$.

14. Нехай $\mathcal{M}$ множина всіх прямих на площині. Чи будуть відношеннями еквівалентності на $\mathcal{M}$ такі відношення:
(а) паралельність прямих;
(б) перпендикулярність прямих ?

15. Навести приклад двох відношень еквівалентності $\mathcal{R}_1$ і $\mathcal{R}_2$ на множині $\mathcal{M} = \{1,2,3,4\}$ таких, що $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ не є відношенням еквівалентності на $\mathcal{M}$.

16. Нехай задано довільне відношення $\mathcal{R}$ на множині $\mathbf{M}$. Сформулювати алгоритм, який за допомогою основних операцій над відношеннями дозволяє побудувати найменше відношення еквівалентності $\mathcal{Q}$ на множині $\mathbf{M}$ таке, що $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$.

17. Побудувати фактор-множини за відношеннями еквівалентності з прикладів 1,2. Визначити їхні індекси.

18. Довести, що множина всіх підмножин (булеан) даної множини частково впорядкована за відношенням включення.

19. Нехай $a \leq b \Leftrightarrow a, b \in N$ і a ділить b. Довести, що $\leq$ - частковий порядок на N.

20. Означимо на множині R дійсних чисел відношення $T : aTb$ тоді і тільки тоді, коли $a/(a^2+1) \leq b/(b^2+1),\ a,b \in R$. Довести, що

    (а) T не є відношенням часткового порядку на всій множині R;

    (б) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(1, \infty)$.

    (в) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(-\infty, -1]$.

21. Побудувати всі неізоморфні відношення часткового порядку на множині

    (а) $M = \{a, b\}$;

    (б) $M = \{a, b, c\}$;

    (в) $M = \{a, b, c, d\}$.

22. Перелічити усі неізоморфні частково-впорядковані 6-елементні множини з найбільшим і чотирма мінімальними елементами.

23. Перелічити усі неізоморфні частково-впорядковані 5-елементні множини з найменшим і найбільшим елементами.

24. Побудувати приклад частково впорядкованої множини, яка має

    (а) точно один мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;

    (б) точно один максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;

    (в) один мінімальний і один максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;

    (г) не має жодного мінімального і максимального елементів, та не має найменшого і найбільшого елементів.

25. Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

26. Лінійно впорядкована множина називається цілком впорядкованою, якщо кожна її непорожня підмножина має мінімальний елемент. Довести, що

    (а) множина N, де $0 < 2 < 4 ... < 1 < 3 < 5...$ є цілком впорядкованою;

    (б) множина N, де $...4 < 3 < 2 < 1$ не є цілком впорядкованою;

    (в) множина Z де $1 < 2 < 3 < ... < 0 < -1 < -2 < -3 < ...$ є цілком впорядкованою.

27. Довести, що множина N натуральних чисел з відношенням часткового порядку "ділить"є решіткою.

28. Розглянемо множину R^n кортежів дійсних чисел довжини n з відношенням часткового порядку означеним так : $(a_1, a_2, ..., a_n) \leq (b_1, b_2, ..., b_n)$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \leq b_i$ для всіх $i = 1, 2, ...n$. Довести, що частково впорядкована у такий спосіб множина R^n є решіткою.

29. Розглянемо множину $L = N \times B$, де N — множина натуральних чисел, а $= \{0, 1\}$. Покладемо $(n, i) \leq (m, j)$ тоді і тільки тоді, коли $m \leq n$ і $i \leq j$. Довести, що L є решіткою.

30. Довести, що в будь-якій скінченній решітці існує найбільший та найменший елементи.

31. Навести приклади решіток:

    (а) без найбільшого елемента, але з найменшим елементом;

    (б) без найменшого елемента, але з найбільшим елементом;

    (в) без найбільшого і без найменшого елементів.

32. Довести, що в будь-якій решітці L для довільних елементів $a, b, c, d, \in L$ виконується

    (а) $sup(a, a) = a, \;\; inf(a, a) = a$;

    (б) $a \leq sup(a, b) \;\; inf(a, b) \leq a$;

    (в) якщо $a \leq c$ і $b \leq c$, то $sup(a, b) \leq c$;

    (г) якщо $\leq a$ і $c \leq b$, то $c \leq inf(a, b)$;

    (д) $a \leq b$ тоді і тільки тоді, коли $sup(a, b) = b$.

33. Чи утворюватиме повну решітку впорядкована за відношенням включення множина

    (а) всіх рефлексивних

    (б) всіх антирефлексивних

    (в) всіх симетричних

    (г) всіх антисиметричних

    (д) всіх транзитивних

    відношень на даній множині M?

34. Довести, що множина всіх дільників натурального числа n, частково впорядкована за відношенням "ділить", є повною решіткою.

35. Нехай на множині $L = \{a, b, c, d, e\}$ задано відношення

    $$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}.$$

    Чи буде множина L

    (а) частково впорядкованою множиною;

    (б) решіткою;

    (в) повною решіткою ?

Розділ 7

Теорія графів.

Означення 7.0.1. **Загальним орієнтованим графом** *називається сукупність*
$G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$, *яка складається з трьох множин* $V-$ *множина вершин (vertexes),* $E-$ *множина ребер (edges),*$L-$ *множина петель (loops) та відображень:*

$$\partial_E : E \to V \times V,$$

$$\partial_L : L \to V.$$

При цьому якщо $\partial_E(e) = (v_1, v_2)$, *то вершину* v_1 *будемо називати* **початком** *ребра* e, *а вершину* v_2 *її* **кінцем** .

Означення 7.0.2. **Загальним неорієнтованим графом** *називається сукупність*
$G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$, *яка складається з трьох множин* $V-$ *множина вершин (vertexes),* $E-$ *множина ребер (edges),*$L-$ *множина петель (loops) та відображень:*

$$\partial_E : E \to C_V^2 - \text{ множина двохелементних підмножин множини} V,$$

$$\partial_L : L \to V.$$

Якщо існують пари вершин v_1, v_2 для яких існують m ребер $e : \partial_E(e) = \{v_1, v_2\}$ і $m > 1$, то говорять про наявність кратних ребер. Іноді говорять, що вершини v_1, v_2 мають спільне ребро кратності m.

Означення 7.0.3. *Граф без кратних ребер та петель називається простим.*

Простий граф визначається трійкою (V, E, ∂_E).

Приклад 7.0.1. *Прикладами простих графів є* **цілком незв'язний** *граф у якого* $E = \varnothing$, *тобто граф, у якого немає жодного ребра. Протилежним прикладом є* **повний** *граф, у якого будь-які дві вершини з'єднані ребром.*

Питання. Скільки ребер має повний граф на n вершинах?

Приклад 7.0.2. *Наведемо ще декілька важливих прикладів.*

Означення 7.0.4. *i) В орієнтованому (неорієнтованому) графі вершини v_1, v_2 називаються* **суміжними**, *якщо існує ребро*

$$e \in E: \quad \partial_E(e) = (v_1, v_2) \quad (\partial_E(e) = \{v_1, v_2\}),$$

при цьому говорять, що ребро e є **інцидентним** *як вершині v_1 так і вершині v_2.*

ii) В орієнтованому (неорієнтованому) графі ребра e_1, e_2 називаються **суміжними**, *якщо впорядковані пари $\partial_E(e_1), \partial_E(e_2)$ мають спільні координати (множини $\partial_E(e_1)$ і $\partial_E(e_2)$ мають спільну вершину).*

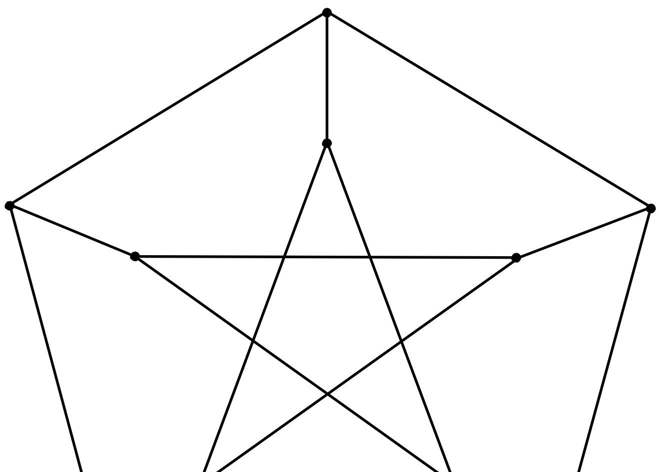
iii) Вершина v та ребро e називаються **інцидентними**, *якщо ребро e є інцидентним вершині v.*

iv) Вершина v та петля l називаються **інцидентними**, *якщо $\partial_L(l) = v$.*

Означення 7.0.5. *Кількість ребер інцидентних даній вершині v плюс подвоєна кількість інцидентних їй петель називають* **степенем** *або* **валентністю** *вершини і позначають* $\deg v$

Означення 7.0.6. *Простий граф називається* **регулярним**, *якщо всі його вершини мають однаковий степінь.*

Приклад 7.0.3. *Прикладами регулярних графів є правильні многогранники - тетраедр, куб, октаедр ікосаедр, додекаедр. В різних задачах часто виникає* **граф Петерсона**:



Як бачимо, кожна вершина цього графу має степінь 3.

Лема 7.0.1. *(про рукопотискання). Для довільного графу $G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$ має місце*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2(|E| + |L|). \tag{7.1}$$

Доведення. Підрахуємо кількість ребер інцидентних різним вершинам і підсумуємо ці числа по всім вершинам. Очевидно, що ми отримаємо подвоєну кількість ребер графа. Адже кожне ребро інцидентне двом вершинам, а отже буде враховано два рази. Оскільки степінь кожної вершини є сумою кількості інцидентних їй ребер та подвоєної кількості петель, то цим лема доведена. □

Назва леми пов'язано з наступною інтерпретацією. Нехай є певна кількість людей, з кожним з яких ми зв'яжемо вершину графа. Дві вершини будуть суміжними, якщо ці люди потискали один одному руку. Цілком можливо існування пар, які привіталися декілька разів (таке буває коли забули про те, що сьогодні вже віталися), менш ймовірно (хоча чого не буває), що якась людина привіталася сама з собою. При такій інтерпретації, в правій частині рівності (7.1) стоїть подвоєна загальна кількість рукопотискань, що відбулися, а у лівій підсумовуються кількості рукопотискань зроблених усіма особами.

Означення 7.0.7. *Для даного орієнтованого (неорієнтованого) графа можна скласти* **матрицю суміжності**

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\ \hline v_1 & * & * & * & \dots & * \\ v_2 & * & * & * & \dots & * \\ v_3 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & * & * & * & \dots & * \end{array}\right),$$

Де на перетині рядка та стовпчика, що відповідають вершинам v_i, v_j ($v_i \neq v_j$) стоїть число $*$ — ребер $e : \partial_E(e) = (v_i, v_j)$, а на діагоналі стоять кількості петель l інцидентних відповідній вершині v, тобто $* = |\{l \in L | \partial(l) = v\}|$.

Для неорієнтованого графа $*$ буде означати кількість ребер $e : \partial_E(e) = \{v_i, v_j\}$ і матриця суміжності буде симетричною відносно діагоналі.

Для простого графа будемо мати матрицю з нулів та одиниць з нульовою діагоналлю.

Означення 7.0.8. *Для простих графів розглядають також* **реберну матри-**

цю суміжності:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ \hline e_1 & * & * & * & \dots & * \\ e_2 & * & * & * & \dots & * \\ e_3 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n & * & * & * & \dots & * \end{array}\right),$$

де $*$ *дорівнює* 1, *якщо відповідні ребра суміжні і* 0, *в протилежному випадку.*

Означення 7.0.9. *Для неорієнтованих графів може бути корисною* **матриця інцидентності**:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ \hline v_1 & * & * & * & \dots & * \\ v_2 & * & * & * & \dots & * \\ v_3 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_m & * & * & * & \dots & * \end{array}\right),$$

де $*$ *дорівнює* 1, *якщо відповідна вершина та ребро інцидентні і* 0, *в протилежному випадку.*

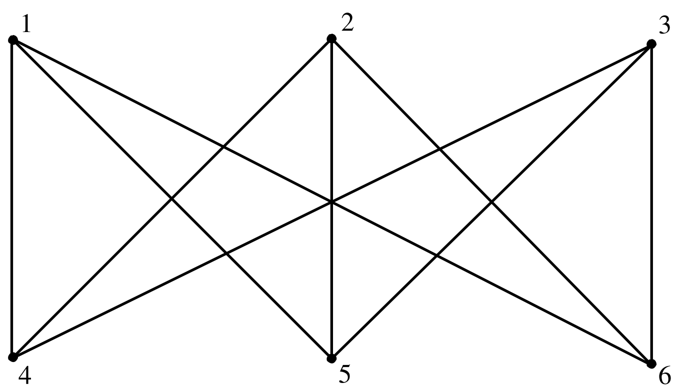
Означення 7.0.10. *Два простих графа* $G_1 = (V_1, E_1, \partial_{E_1})$, $\quad G_2 = (V_2, E_3, \partial_{E_2})$ *називаються ізоморфними, якщо існує бієкція між множинами вершин:*

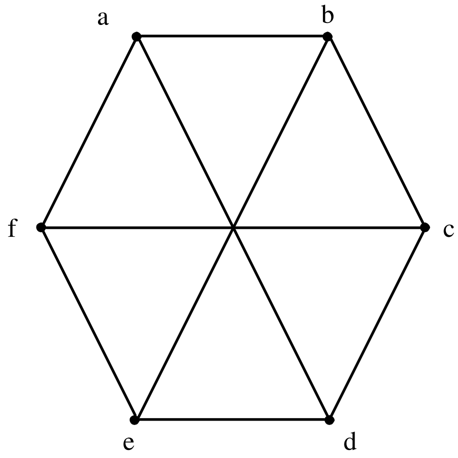
$$\phi : V_1 \leftrightarrow V_2,$$

така, що

$$\textit{вершини } \ v, v_1 \in V_1 \ \textit{ суміжні } \ \Leftrightarrow \ \textit{вершини } \ \phi(v), \phi(v_1) \in V_2 \ \textit{ суміжні}$$

Розглянемо два графи G_1 і G_2.





Обидва вони є регулярними графами степеня 3 і як бачимо картинки суттєво різняться, але насправді ці графи ізоморфні. Ізоморфізм визначає наступна біекція ϕ :

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto c \\ 3 &\mapsto e \\ 4 &\mapsto f \\ 5 &\mapsto d \\ 6 &\mapsto b \end{aligned}$$

Завдання. Побудуйте ще декілька ізоморфізмів між цими графами.

Наведені графи є прикладами так званих дводольних графів.

Означення 7.0.11. *Граф називаеться* **дводольним,** *якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини (долі) V_1, V_2 таким чином, що жодна дві вершини з однієї долі не є суміжними.*

Питання. За яких умов цикл є дводольним графом?

Для загальних графів означення ізоморфізму більш складне. Адже треба враховувати кратність ребер та петель, а для орграфів узгоджувати напрямки ребер.

Означення 7.0.12. *Графи $G_1 = (V_1, E_1, L_1, \partial_{E_1}, \partial_{L_1}), G_2 = (V_2, E_2, L_2, \partial_{E_2}, \partial_{L_2})$, називаються* **ізоморфними**, *якщо існують біекції:*

$$\phi : V_1 \leftrightarrow V_2, \psi_1 : E_1 \leftrightarrow E_2, \psi_2 : L_1 \leftrightarrow L_2$$

такі, що

$$\partial_{E_2}(\psi_1(e)) = \phi(\partial_{E_1}(e))$$
$$\partial_{L_2}(\psi_2(l)) = \phi(\partial_{E_1}(l)).$$

В правій частині першої рівності стоїть упорядкована або неупорядкована пара вершин, яка отримана застосуванням відображення ϕ до кожного елемента пари вершин $\partial_{E_1}(e)$.

7.1 Операції над графами.

1. **Об'єднанням** графів $G_1 = (V_1, E_1, L_1, \partial_{E_1}, \partial_{L_1}), G_2 = (V_2, E_2, L_2, \partial_{E_2}, \partial_{L_2})$, які не мають спільних вершин ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), а отже і ребер ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$) називається граф

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, L_1 \cup L_2, \partial_{E_1 \cup E_2}, \partial_{L_1 \cup L_2}),$$

у якого

$$\partial_{E_1 \cup E_2}(e) = \begin{cases} \partial_{E_1}(e) & \text{якщо} \quad e \in E_1 \\ \partial_{E_2}(e) & \text{якщо} \quad e \in E_2 \end{cases} \qquad \partial_{L_1 \cup L_2}(l) = \begin{cases} \partial_{L_1}(l) & \text{якщо} \quad l \in L_1 \\ \partial_{L_2}(l) & \text{якщо} \quad l \in L_2 \end{cases}$$

Означення 7.1.1. *Граф називається* **зв'язним***, якщо його не можна подати як об'єднання двох графів.*

2. **З'єднанням (конкатинацією)** графів
$G_1 = (V_1, E_1, L_1, \partial_{E_1}, \partial_{L_1}), G_2 = (V_2, E_2, L_2, \partial_{E_2}, \partial_{L_2})$, які не мають спільних вершин ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), а отже і ребер ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$) називається граф

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{12}, L_1 \cup L_2, \partial_{E_1 \cup E_2 \cup E_{12}}, \partial_{L_1 \cup L_2}),$$

при цьому множина нових ребер E_{12} така, що

$$\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \exists! e \in E_{1,2} : \partial_{E_1 \cup E_2 \cup E_{12}}(e) = \{v_1, v_2\}.$$

2. **Доповненням** простого графа $G = (V, E, \partial_E)$ називається граф $\overline{G} = (V, \widetilde{E}, \overline{\partial}_E)$, такий, що довільна пар вершин є суміжними в графі $\overline{G}$ тоді і тільки тоді, коли вони не є суміжними в графі G.

7.2 Маршрути, ланцюги, цикли.

Означення 7.2.1. *Нехай $G-$ загальний неорієнтований граф, пара вершин v_1, v_m та скінченна послідовність ребер $e_1, e_2, \ldots, e_m$: називається* **маршрутом (шляхом)** *між вершинами v_1, v_m, якщо*

v_1 інцидентна e_1, v_m інцидентна e_m, а послідовні пари ребер e_{i-1}, e_i є суміжними для довільного $i : 1 < i \leq m$. При цьому вершина v_1 і називається **початком** *маршруту, а v_m її* **кінцем***.*

Для орієнтованих графів слід вимагати, щоб кінець ребра e_{i-1} збігався з початком ребра e_i.

Якщо всі ребра маршруту є різними, то маршрут називають **ланцюгом**, *а якщо початок і кінець ланцюга збігаються, то ланцюг називається* **замкненим** *або циклом.*

Якщо всі вершини, що інцидентні ребрам ланцюга, з'являються лише один раз, тобто кожна вершина є інцидентною ребрам лише одної пари e_{i-1}, e_i , крім можливо початку та кінця, які можуть і збігатися, то такий ланцюг будемо називати **простим**.

Простий замкнений ланцюг називається **простим циклом**.

Лема 7.2.1. *Якщо в скінченному графі степінь кожної вершини графа не менша ніж 2, то граф має принаймні один цикл.*

Доведення. Оберемо довільну вершину відмітимо її (наприклад "пофарбуємо") і "підемо"по довільному інцидентному їй ребру (воно існує бо степінь вершини не менша ніж 2). Досягши суміжної вершини відмітимо її і "підемо"далі по іншому ребру, яке існує внаслідок умови на степінь вершини. При такій прогулянці, якщо ми приходимо у вершину, в якій ще не були, то завжди є інше ребро, по якому можна вийти. Але оскільки граф має скінченну кількість вершин, то рано чи пізно ми попадемо у вершину, в якій були раніше, і цим побудуємо цикл. □

На множині вершин графа G можна розглянути відношення: $v_1 \sim v_2$ тоді і лише тоді, коли існує маршрут з початком у вершині v_1 і кінцем у вершині v_2. Самостійно переконайтеся, що це відношення є відношенням еквівалентності. Очевидно, що вершини, які належать різним класам еквівалентності, є не суміжними. Отже, граф G можна подати як об'єднання

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i,$$

де G_i- граф множина вершини якого збігається з певним класом еквівалентності, разом з інцидентними їм ребрами. При цьому, очевидно, що графи G_i будуть зв'язними. Вони називаються **компонентами зв'язності** графа G. У зв'язного графа є лише одна компонента зв'язності.

Означення 7.2.2. *Ребро графа називається* **мостом**, *якщо після його вилучення кількість компонент зв'язності збільшується.*

Зауважимо, що жодне ребро, що входить у замкнений ланцюг не є мостом.

Теорема 7.2.1. *Нехай* $G = (V, E, \partial_E)-$ *простий граф з* $n = |V|$ *вершинами,* $m = |E|$ *ребрами та* k *компонентами зв'язності. Тоді мають місце наступні нерівності.*

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \tag{7.2}$$

Доведення. Доведення нерівності $n - k \leq m$ проведемо методом математичної індукції по числу ребер.

База індукції — $m = 0$. Маємо цілком незв'язний граф (кількість компонент дорівнює кількості вершин $n = k$), отже $n - n = 0$ і базу доведено.

Припустимо, що нерівність доведено для графів з кількістю ребер меншою за m. Оберемо довільне ребро графа і вилучаємо його з графа залишивши всі вершини і решту ребер. При цьому можливі два випадки:

i) кількість компонент зв'язності не змінилася і дорівнює k;

ii) кількість компонент зв'язності збільшилася і дорівнює $k + 1$.

Оскільки кількість ребер у отриманого графа дорівнює $m - 1$, то за припущенням індукції у випадку i) будемо мати: $n - k \leq m - 1$, а отже, $n - k < m$. У випадку ii) отримуємо $n - (k + 1) \leq m - 1$, звідки $n - k \leq m$.

Для доведення другої нерівності в графі $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ оберемо компоненту зв'язності з найбільшою кількістю вершин. Якщо таких декілька, то одну з них. Не втрачаючи загальності можна вважати, що це G_1. Для довільної компоненти G_i, що містить більше ніж одну вершину, виконаємо таку операцію:

1) виберемо довільну вершину і вилучимо її разом з усіма ребрами, що їй інцидентні;

2) додамо у компоненту G_1 одну вершину і стільки ребер, щоб ця вершина стала суміжною до будь-якої вершини з цієї компоненти.

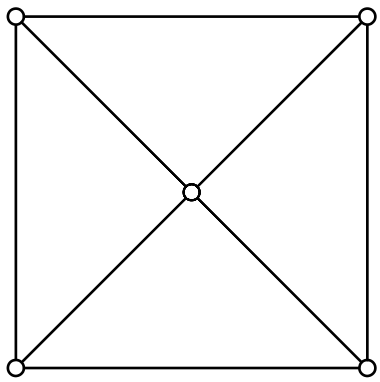
Очевидно, що при цьому кількість вершин та кількість компонент зв'язності у нового графа залишаться не змінними, а кількість ребер принаймні не зменшиться (згадаємо, що G_1 містить максимальну кількість вершин). Цю процедуру будемо повторювати до тих пір доки в компоненті G_i не залишиться одна вершина і не буде жодного ребра. Повторивши цю процедуру з усіма компонентами $G_i, i > 1$, ми отримаємо граф на n вершинах з k компонентами зв'язності, причому всі вони, крім першої, складаються з однієї ізольованої вершини. Тоді, кількість вершин першої компоненти дорівнює $n-(k-1)$. Максимально можлива кількість ребер у такого графа буде тоді, коли ця компонента буде повним графом. Тоді число ребер такого графа буде дорівнювати: $C^2_{n-k+1} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, що і треба було довести. $\square$

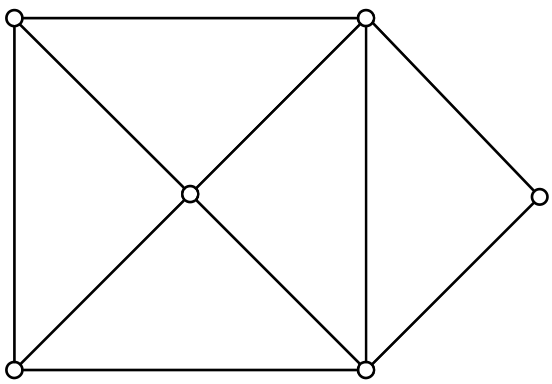
7.3 Ейлерові графи.

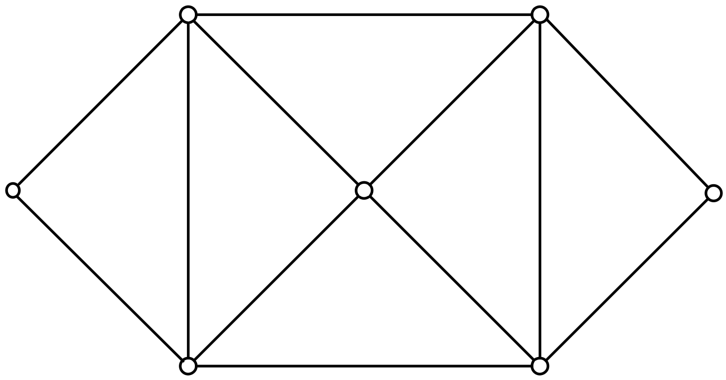
Нехай $G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$− загальний неорієнтований граф.

Означення 7.3.1. *Замкнений ланцюг графа, G, що містить всі ребра графа називається* **ейлеровим***; граф що має ейлеровий цикл називається* **ейлеровим***; граф, що містить ланцюг, що проходить через усі ребра називається* **напівейлеровим**.

Вкажіть які з цих графів є ейлеровими та напівейлеровими.







Теорема 7.3.1. *Скінченний зв'язний граф G є ейлеровим тоді і лише тоді, коли степінь кожної його вершини парна.*

Доведення. $\Rightarrow$. Якщо граф є ейлеровим, то існує ейлеровий цикл. Оскільки він містить усі вершини, то для кожної з них інцидентні їй ребра розбиваються на пари (вхідне, вихідне ребра,). При цьому для початкової вершини і першого ребра циклу існує ребро по якому ми повернулись в неї. Цим необхідність умови доведена.

$\Leftarrow$. Доведення достатності проведемо методом математичної індукції по кількості ребер графа. Якщо граф ребер не містить ребер, то він складається з однієї ізольованої вершини і твердження тривіальне. Припустимо, що граф G має m ребер і для графів з меншою кількістю ребер твердження має місце. Оскільки степінь кожної вершини графа G не менша ніж 2 (умова парності степеня), то за лемою 7.2.1 в ньому існує цикл. Тимчасово вилучаємо ребра цього циклу (запам'ятавши вершини які утворювали цикл). Кожна вершина отриманого графа $\tilde{G}$ має парний степінь, адже з кожної вершини циклу вилучалась пара ребер. Тоді кожна компонента зв'язності графа $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ задовольняє умові твердження, а оскільки кожна з них має меншу кількість ребер, то можна застосувати припущення індукції і в кожній з них побудувати ейлеровий цикл. Тепер відновимо заново граф G. Початкова вершина циклу належить до відповідної компоненти G_i і ми рухаємося по побудованому раніше ейлеровому циклу і вертаємося в цю ж вершину. Після цього по ребру циклу переходимо в наступну вершину. Якщо ця вершина належить тій самій компоненті зв'язності G_i, що і попередня, то продовжуємо рух по ребру цикла. Якщо ж ми попали в іншу компоненту G_k, то проходимо її по раніше побудованому ейлеровому циклу і вертаємося в цю ж вершину. Продовжуючи цей процес ми повернемося в початкову вершину і пройдемо кожне ребро графа G по одному разу. Таким чином буде побудовано ейлеровий цикл всього графа G. □

Теорема 7.3.2. *Скінченний зв'язний граф G є напівейлеровим тоді і лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степіня.*

Доведення. $\Rightarrow$. Зрозуміло що вершинами непарного степеня напівейлерового графа можуть бути лише початок та кінець напівейлерового ланцюга, а тому їх не більше двох.

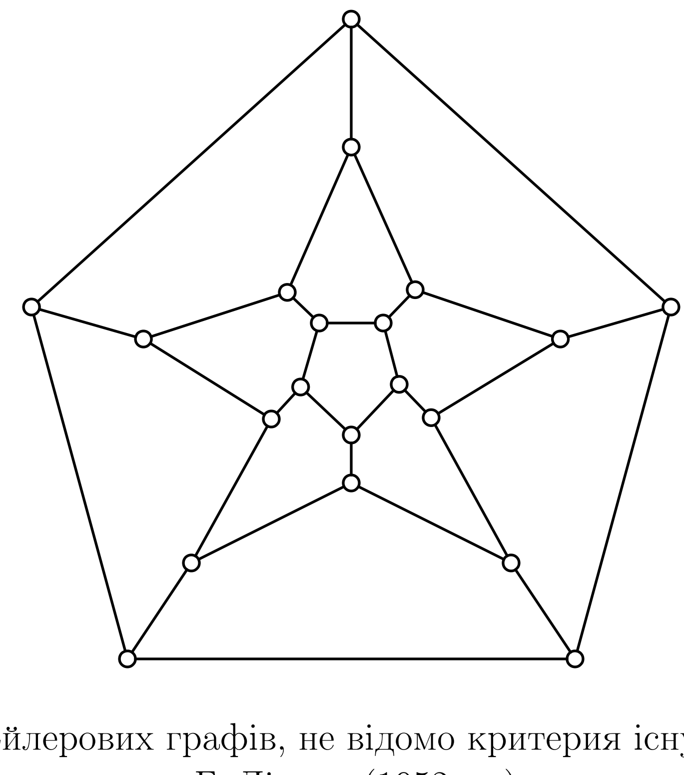
Питання: чи може бути одна вершина непарного степеня ?

$\Leftarrow$. Приєднаємо до графа G додаткову вершину і сполучимо її двома ребрами з двома вершинами непарного степеня. Очевидно, що степінь кожної вершини отриманого графа є парною і за попередньою теоремою існує ейлеровий цикл. Прибравши введену вершину і два ребра отримаємо ланцюг, який проходить через усі ребра. $\square$

7.4 Гамільтонові графи.

Означення 7.4.1. *Цикл, що містить всі вершини графа називається* **гамільтоновим***; граф що має гамільтонів цикл називається* **гамільтоновим***; граф, що містить простий ланцюг, що проходить через усі вершини називається* **напівгамільтоновим** *.*

Нетривіальними прикладами гамільтонових графів є правильні многогранники — тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр, ікосаедр.



На відміну від Ейлерових графів, не відомо критерия існування гамільтонового циклу. Наступна теорема Г. Дірака (1952 р.) дає лише достатню умову.

Теорема 7.4.1. *(Діріка). Якщо у простого графа G з n вершинами ($n \geq 3$) степінь кожної вершини не менший ніж $\frac{n}{2}$, то граф G є гамільтоновим.*

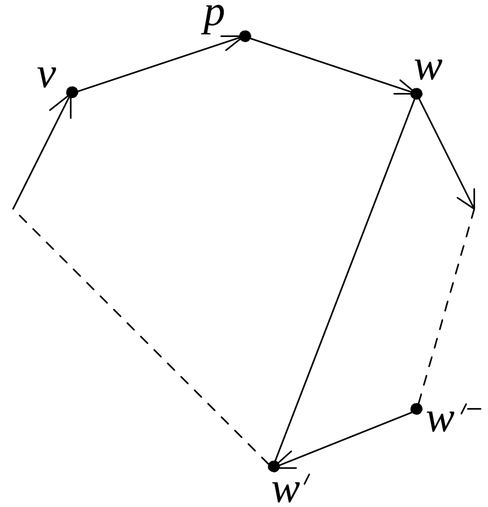
Доведення. Зрозуміло, що граф що задовольняє цим умовам є зв'язним. Адже якщо він має декілька компонент зв'язності, то принаймні в одній з них кількість вершин не перевищує $n/2$, а їх максимально можлива степінь дорівнює $n/2 - 1$.

Тепер проведемо доведення теореми від супротивного. Припустимо, що граф G не є гамільтоновим. Тоді можна додати одну вершину і сполучити її додатковими ребрами з усіма вершинами графа G. Враховуючи зв'язність, легко зрозуміти, що при цьому відбудеться об'єднання циклів графа G, і у отриманого графа цикли будуть містити більшу кількість вершин. Якщо після цього граф не став гамільтоновим, то додамо ще одну вершину, але з'єднувати її будемо лише з усіма вершинами початкового графа G. Таке введення додаткових вершин будемо проводити доти доки не отримаємо гамільтонів граф. Нехай $k-$ мінімальна кількість таких вершин, які слід приєднати, щоб отримати гамільтонів граф G'. Оскільки ми припустили, що граф G не є гамільтоновим, то $k > 0$.

Розглянемо який-небудь гамільтонів цикл графа $G' : \ldots \to v \to p \to w \to \ldots$, де $p-$ одна з приєднаних вершин. Мають місце такі твердження:

1) вершини v та w є несуміжними.

2) Нехай w' — деяка вершина графа. Якщо вершина w' є суміжною до вершини w, то вершина, w'^{-}, яка іде перед нею в гамільтоновому циклі не є суміжною до вершини v.



Якщо вершини v та w є суміжними, то вершину p можна вилучити і ланцюг $\to v \to p \to w$ замінити на відповідне ребро $v \to w$. При цьому ми отримаємо також гамільтонів цикл. Але це суперечить тому, що k є мінімальною кількістю доданих вершин.

Для доведення п. 2) припустимо, що вершина $v' = w'^-$ є суміжною до v. Тоді також можна побудувати гамільтонів цикл, але без вершини p. Цей цикл буде мати вигляд:

$$v \to v' \to \text{у зворотньому напрямку} \to w \to w' \to \text{у прямому напрямку} \to v.$$

Наявність такого циклу також суперечить мінімальності числа k і твердження 2) доведено.

Кількість вершин $n + k$ графа G' можна подати у вигляді:

$$\text{кількість вершин суміжних з } v \ + \ \text{кількість вершин не суміжних з } v \ .$$

За умовою теореми перша кількість не менша ніж $n/2+k$. Розглянемо множину вершин u таких, що їх наступники в гамільтоновому циклі вершини u^+ є суміжними до w. За твердженням 2), такі вершини не є суміжними до v, причому їх кількість не менша ніж степінь вершини w, тобто не менша ніж $n/2 + k$. Отже, кількість вершин не суміжних з v не менша ніж $n/2 + k$, звідки отримуємо нерівність

$$n + k \geq n/2 + k + n/2 + k = n + 2k,$$

яка суперечить припущенню $k > 0$. □

7.5 Ліс та дерева.

Означення 7.5.1. *Граф без циклів називається* **лісом***;*

зв'язний граф без циклів називається **деревом.**

Лема 7.5.1. *Будь-яке ребро лісу або дерева є мостом.*

Доведення. Дійсно, якщо вилучення ребра інцидентного вершинам v_1, v_2 не привело до збільшення компонент зв'язності, то це означає, що ці вершини є початком і кінцем деякого простого ланцюга, що не містить вказаного ребра. Тоді цей ланцюг разом з цим ребром утворюють цикл, а це суперечить припущенню, що граф є лісом або деревом. □

Теорема 7.5.1. *Нехай $T-$ простий граф з n вершинами, тоді наступні умови еквівалентні:*

i) T є деревом;

ii) T не містить циклів і має $n - 1$ ребро;

iii) T зв'язний і має $n - 1$ ребро;

iv) T зв'язний і кожне ребро є мостом;

v) для будь-яких двох вершин графа T існує єдиний простий ланцюг, для якого ці вершини є початком і кінцем;

vi) T не містить циклів, крім того додавання довільного одного ребра приводить до появи рівно одного циклу.

Доведення. Доведення теореми проведемо за такою схемою:

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow vi) \Rightarrow i).$$

$i) \Rightarrow ii)$. За означенням дерева граф T не містить циклів, отже слід довести, що кількість ребер дерева T дорівнює $n-1$. Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості m ребер дерева T.

База індукції: $m = 0$. Оскільки граф зв'язний, то він може містити лише одну вершину і ми отримуємо $n - 1 = 1 - 1 = 0 = m$.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження доведено для дерев, у яких кількість ребер менша за m. Вилучимо з дерева одне довільне ребро. За лемою, граф T буде уже незв'язним. Нехай $T = T_1 \cup T_2-$ розклад на компоненти зв'язності. Тоді, за означенням, T_1, T_2 є деревами з меншою ніж m кількістю ребер. Якщо кількісті вершин цих дерев дорівнює n_1, n_2 відповідно $(n = n_1+n_2)$, то за припущенням індукції отримуємо, що ці дерева містять n_1-1, n_2-1 ребер. Тоді загальна кількість ребер дорівнює $m = n_1-1+n_2-1+1$, де остання одиниця відповідає вилученому ребру. Отже $m = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Для доведення цієї імплікації слід лише довести зв'язність графа T. Нехай $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k-$ розклад на компоненти зв'язності. Оскільки за припущенням T не містить циклів, то всі T_i є деревами. Використовуючи попередню імплікацію, отримуємо, що кількість ребер дерева T_i на n_i вершинах дорівнює $n_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, k$. За умовою, загальна кількість ребер дорівнює $n-1$, отримуємо $n - 1 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)$. Оскільки $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то приходимо до рівності $n - 1 = n - k$, яка може справджуватися лише за умови $k = 1$, тобто коли граф T є зв'язним.

$iii) \Rightarrow iv)$. Доведення цієї імплікації проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує ребро яке не є мостом. Тоді після вилучення цього ребра кількість ребер зменшиться на 1 і стане рівним $n-2$, а граф залишиться зв'язним. Перша нерівність теореми 7.2.1, де $k = 1, m = n-2$ набуде вигляду: $n - 1 \geq n - 2$. Отримана суперечність доводить імплікацію.

$iv) \Rightarrow v)$. Оскільки, за умовою, T є зв'язним, то для будь-яких двох вершин існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини. Якщо таких ланцюгів принаймні два , то будь-яке ребро, що входить в один і не входить в інші, очевидно, не є мостом, що суперечить припущенню. Отже, для даної пари вершин такий ланцюг єдиний.

$v) \Rightarrow vi)$. T не містить циклів, оскільки їх наявність означає існування пар вершин, які з'єднані принаймні двома простими ланцюгами. За умовою, довільні дві вершини з'єднані простим ланцюгом і додавання ребра інцидентного цим вершинам приведе до появи циклу. Поява декількох циклів може відбутися лише при умові наявності декількох простих ланцюгів, що з'єднують ці вершини, а це суперечить умові $v)$.

$vi) \Rightarrow i)$. Для доведення зв'язності зауважимо, що якщо додавання одного ребра приводить до появи циклу, то це означає, що довільні дві вершини з'єднані простим ланцюгом, а отже граф є зв'язним. □

Наслідок 7.5.1. *Кількість ребер лісу на n вершинах з k компонентами зв'язності дорівнює $n - k$.*

Доведення. Застосувавши імплікацію $i) \Rightarrow ii)$, до кожної компоненти зв'язності (які є деревами), отримуємо результат. □

Означення 7.5.2. *Мінімальна кількість ребер, яку слід вилучити з графа G, щоб отримати ліс (дерево) називається* **циклічним рангом**. *Отриманий ліс (дерево) називається* **кістяковим** *лісом (деревом) даного графа.*

Якщо маємо граф G з n вершинами m ребрами та k компонентами зв'язності, то циклічний ранг $\gamma(G)$ цього графа дорівнює

$$\gamma(G) = m - n + k.$$

Дійсно, якщо кількість вилучених ребер дорівнює $\gamma(G)$, то за наслідком 7.5.1, маємо рівність $m - \gamma(G) = n - k$, звідки отримуємо потрібну формулу.

7.6 Розфарбування графів.

Означення 7.6.1. *Розфарбуванням неорієнтованого графа називається таке відображення множини його вершин в деяку множину — множину кольорів (типів), що суміжним вершинам при цьому відображенні відповідають різні кольори.*

Зрозуміло, що це поняття досить розглядати для простих графів, адже наявність кратних ребер змістовно нічого не змінює.

Легко бачити, що якщо кількість фарб, які ми маємо не менша ніж кількість вершин графа, то таке розфарбування, при якому всі вершини будуть пофарбовані в різні кольори, можна здійснити. Нас цікавить найменше число фарб, яке потрібно для розфарбування даного графа. Воно очевидно буде залежати від властивостей самого графа.

Означення 7.6.2. *Мінімальна кількість фарб, які потрібні для розфарбування графа G називається його* **хроматичним числом** *і позначається $\chi(G)$.*

Якщо граф має k компонент зв'язності $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, то з означення будемо мати $\chi(G) = \max_i\ \chi(G_i)$.

Питання. Яким є хроматичне число повного графа, а також простого циклу?

Хроматичне число є дуже важливим інваріантом графа і існує багато різних, часом досить складних, його оцінок. Ми зупинимося на досить простій оцінці. Нехай

$$\Delta = \Delta(G) = \max_{v \in V} \deg v.$$

Лема 7.6.1. *Має місце нерівність*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості вершин. База індукції: $|V| = 1$, тоді $\Delta = 0$ і $\chi(G) = 1 \leq 0+1$, тобто твердження має місце.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження має місце для графів з кількістю вершин менших за n і $|V| = n$. Вилучаємо з графа одну вершину v разом із інцидентними їй ребрами. Для отриманого графа $G \setminus v$ користуючись припущенням індукції маємо:

$$\chi(G \setminus v) \leq \Delta(G \setminus v) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

Тобто для розфарбування графа $G \setminus v$ має вистачити $\Delta(G) + 1$ кольорів. Тепер треба пофарбувати вершину v. Але її степінь не більша ніж $\Delta(G)$, отже для неї ми завжди знайдемо потрібний колір.

□

Розфарбування планарних графів.

Означення 7.6.3. *Простий граф (V, E, ∂_E) називається* **планарним**, *якщо існує бієктивне відображення множини вершин в множини точок площини, які попарно з'єднані неперервними кривими тоді і лише тоді, коли ці вершини суміжні, причому тільки ці точки можуть бути точками перетину двох кривих.*

Тобто вершини графа зображуються точками площини, ребра відповідними дугами, які не мають інших спільних точок крім зображених. При цьому з'являється поняття **грані**, як області площини, обмеженої (можливо частково) дугами, яка всередині не містить точок, що відповідають вершинам.

Для плоских графів має місце фундаментальне співвідношення Ейлера.

Теорема 7.6.1. *(Л. Ейлер) Для довільного зв'язного планарного графа* $G = (V, E, \partial_E)$ *з множиною граней* Γ, *має місце рівність*

$$|V| - |E| + |\Gamma| = 2 \tag{7.3}$$

Доведення. Зразу зауважимо, що якщо вказаний граф є деревом, то він не має циклів, а отже має лише одну грань. За теоремою 7.5.1 Кількість його ребер на одиницю менша від кількості ребер. Отже маємо,

$$|V| - (|V| - 1) + 1 = 2.$$

Для інших графів доведення проведемо методом математичної індукції по кількості ребер.

База індукції — $|E| = 0$. Тоді очевидно $|\Gamma| = 1$, а оскільки граф зв'язний, то він має лише одну вершину, отже, $1 - 0 + 1 = 2$ і співвідношення виконується.

Індукційний крок. Припустимо, що рівність (7.3) має місце для графів кількість ребер якого менша за m. Розглянемо довільний зв'язний граф G з m ребрами та γ гранями який не є деревом. Тоді у нього є цикл, з якого ми вилучаємо одне ребро і застосовуємо припущення індукції до отриманого графа з $m - 1$ ребрами:

$$2 = |V| - (m - 1) + \gamma - 1 = |V| - m + \gamma.$$

Отже, співвідношення (7.3) буду мати місце і для графа G. □

Наслідок 7.6.1. *Якщо* $G = (V, E, \partial_E)$*– зв'язний планарний граф* $|V| \geq 3$, *то має місце нерівність*

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6. \tag{7.4}$$

Доведення. Якщо $|V| = 3$, то твердження є тривіальним. Якщо ж $|V| > 3$, то кожна грань містить не менше ніж три ребра, а оскільки кожне ребро є границею не більше як двох граней, то маємо оцінку

$$3|\Gamma| \geq 2|E|.$$

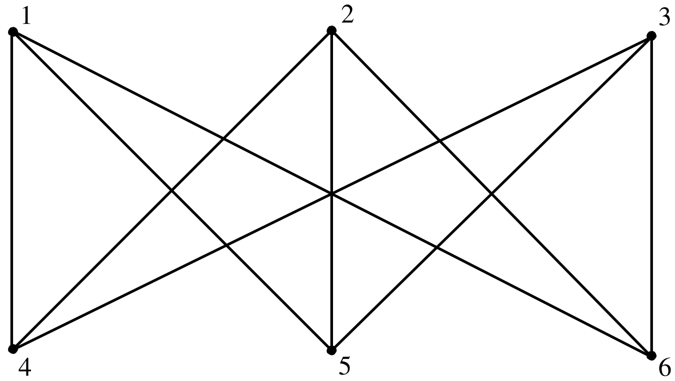
За теоремою Ейлера маємо,

$$2 = |V| - |E| + |\Gamma| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E|,$$

звідки і випливає нерівність (7.4). □

Застосуванням цього наслідку легко отримати, що повний граф на п'яти вершинах K_5 не є планарним. Дійсно, для такого графа маємо $|V| = 5$, $|E| = 10$ і нерівність 7.4 $10 < 3 \cdot 5 - 6 = 9$ не справджується.

Питання про планарність знайомого нам дводольного графа $K_{3.3}$



є відомою задачею про існування стежок від кожної з трьох хат до кожного з трьох колодязів, які б не перетиналися. Слід зазначити, що безпосереднє застосування нерівності (7.4) не дає результату, бо вона виконується $9 < 3\cdot 6 - 6 = 12$. Проведемо більш тонкі міркування. В наведеному графі не існує циклів довжини 3, а є цикли довжини 4. Якби граф був планарним мала б виконуватися нерівність $4 \cdot |\Gamma| \leq 2|E| = 18$ кожна грань оточена не менше як чотирма ребрами, які обмежують не більше двох граней. З іншого боку, за формулою Ейлера (7.3) маємо $6 - 9 + |\Gamma| = 2$, звідки $|\Gamma| = 5$ і отримана вище нерівність $4 \cdot 5 \leq 18$ не виконується.

За допомогою графів K_5 та $K_{3,3}$ Куратовський сформулював критерій планарності графів, який використовує поняття гомеоморфності графів. Нехай $e \in E-$ довільне ребро простого графа $G = (V, E, \partial_E)$ і $\partial_E(e) = \{v, w\}$; будемо говорити, що граф $\widetilde{G}$ отримано з графа G вставкою нової вершини $x \notin V$ в ребро e, якщо $\widetilde{G} = (V \cup \{x\}, E', \partial_{E'})$, де множина ребер нового графа E' отримана з E заміною ребра e на два суміжних ребра $e_1, e_2 :\ \partial_{E'}(e_1) = \{v, x\}, \partial_{E'}(e) = \{x, w\}$. Протилежною операцію є заміна вершини степеня 2 і двох інцидентних їй ребер одним ребром, що з'єднує відповідні вершини, якщо вони не були суміжними.

Означення 7.6.4. *Два простих графи G_1, G_2 називаються* **гомеоморфними**, *якщо існує послідовність графів $H_1, H_2, \ldots, H_k$ така, що $G_1 = H_1, \quad G_2 = H_k$ і кожен граф H_i отримується з графа H_{i-1} шляхом або вставки вершини в ребро або заміни вершини степеня 2 одним ребром.*

Зокрема, з означення випливає, що всі цикли гомеоморфні між собою.

Покажіть, що на множині простих графів відношення: два графи є гомеоморфними, є відношенням еквівалентності.

Теорема 7.6.2. *(1930 р. Куратовський) Граф є планарним тоді і лише тоді, коли він не містить підграфів гомеоморфних K_5 та $K_{3,3}$.*

Доведення теореми є досить складним і ми його пропускаємо.

Як наслідок нерівності (7.4) отримуємо

Наслідок 7.6.2.
В будь-якому планарному графі є вершина степінь якої не перевищує 5.

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує планарний граф $G = (V, E, \partial_E) : \forall v \in V \quad \deg v \geq 6$. Тоді, за лемою про рукопотискання - (7.1), маємо

$$6|V| \leq \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|,$$

звідки $3|V| \leq |E|$. Але це суперечить нерівності (7.4), згідно якої, $|E| \leq 3|V| - 6$, тобто $3|V| \leq 3|V| - 6$. Отримана суперечність доводить лему. □

Теорема 7.6.3. *(Теорема про п'ять фарб.)*
Будь-який планарний граф можна розфарбувати п'ятьма фарбами.

Доведення. Очевидно, що теорему досить довести для зв'язних графів. Доведення проведемо індукцією по кількості вершин графів. Для графів, у яких кількість вершин не перевищує п'ять твердження очевидне.

Індукційний крок. Припустимо, що для планарних графів з кількістю вершин менших за n твердження є правильним і покажемо, що тоді і для планарних графів $G = (V, E, \partial_E)$, у яких $|V| = n$ воно також є правильним.

За попереднім наслідком у такого графа $G = (V, E, \partial_E)$ має існувати вершина $v : \deg v \leq 5$. Тимчасово вилучаємо цю вершину разом з інцидентними їй ребрами з графа і отримаємо планарний граф $\overline{G}$ з $n - 1$ вершиною. За припущенням індукції отриманий граф можна розфарбувати п'ятьма фарбами і ми це робимо. Повертаємо назад вилучену вершину v разом з інцидентними їй ребрами. Якщо вершини суміжні з v пофарбовані менше ніж у п'ять кольорів, то у нас очевидно залишиться вільний колір для вершини v. Якщо ж $\deg v = 5$ і всі п'ять суміжних з v вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 пофарбовані в п'ять різних кольорів, які перенумеруємо числами $1, 2, 3, 4, 5$ відповідно. Позначимо через $\overline{G}_{ij}$ підграф графа $\overline{G}$ який складається з вершин пофарбованих лише в кольори з номерами i та j та ребер які інцидентні лише таким вершинам. Якщо граф $\overline{G}_{13}$ не є зв'язним, то в графі $\overline{G}_{13}$ не існує шляху з вершини v_1 у вершину v_3. Тоді можна в компоненті зв'язності графа $\overline{G}_{13}$, якій належить вершина v_1, здійснити перефарбування $1 \leftrightarrow 3$ — вершини пофарбовані кольором 1 перефарбувати в колір 3, а вершини пофарбовані кольором 3 перефарбувати в колір 1. Очевидно, що після такого перефарбування основна умова що суміжні вершини графа $\overline{G}$ мають бути пофарбовані в різні кольори продовжує виконуватися. Але тепер обидві вершини v_1 та v_3 пофарбовані в колір 3, а саму вершину v можна пофарбувати в колір 1. Якщо ж граф $\overline{G}_{13}$ є зв'язним, то розглянемо граф $\overline{G}_{24}$ який не можу бути зв'язним, адже внаслідок планарності графа $\overline{G}$ шляхи з вершини

v_1 у вершину v_3 в графі $\overline{G}_{13}$ та з вершини v_2 у вершину v_4 в графі $\overline{G}_{24}$ можуть перетинатися лише у вершині, яка з одного боку має бути пофарбована в один з кольорів 1 або 3, а з іншого в кольори 2 або 4, що неможливо.

Отже, якщо граф $\overline{G}_{13}$ є зв'язним, то граф $\overline{G}_{24}$ не є зв'язним і ми можемо виконати процедуру перефарбування $2 \leftrightarrow 4$ і звільнити колір для фарбування вершини v. Фарбування вершини v завершує розфарбування вихідного графа G і доведення теореми.

□

7.7 Задачі

1. Нехай задано граф $G = (V, E)$.
   a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$;
   b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 5), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (5, 2)\}$.
   Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих графів.

2. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

3. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами?

4. Графи G_1 і G_2 визначені на множині $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ і $V = \{a', b', c', d', e', f'\}$ задані матрицями суміжностей A_1 і A_2 відповідно. Побудувати діаграми таких графів: $G_1 \cup G_2$, $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Довести, що доповненням графа $\overline{G}$ є граф G.

6. Як за допомогою матриці суміжності A графа G визначити

   a) кількість вершин графа G;

   b) кількість ребер графа G;

   c) степінь деякої вершини графа G;

   d) чи є граф G повним графом,

   e) чи є граф G дводольним графом?

7. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а всі інші вершини мають степінь $t+1$. Довести, що $p = (t+1)n - 2m$.

8. Чи існує граф з n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо

   a) $n = 10$;

   b) $n = 11$;

   c) $n = 2k$;

   d) $n = 2k+1$.

9. Побудувати кубічний граф, що має

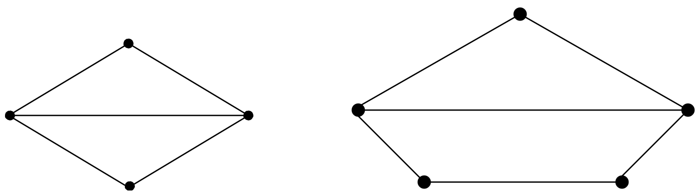
   a) 6 вершин;

   b) 4 вершини;

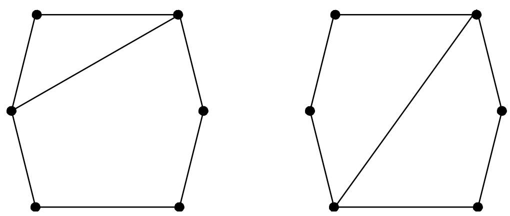
   c) 8 вершин;

10. Визначити, чи серед пар графів, зображених на малюнках є ізоморфні.

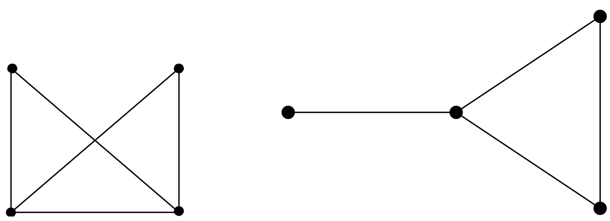
   a)



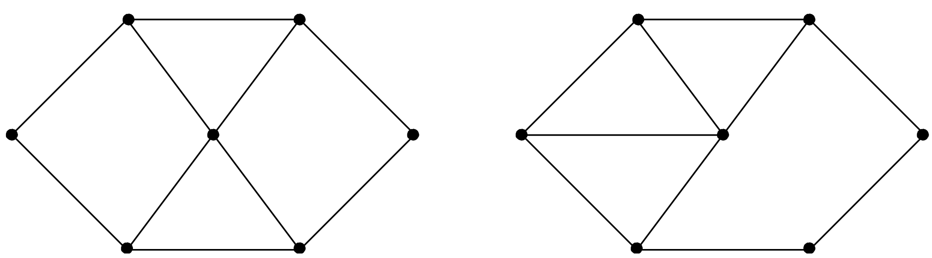
   b)



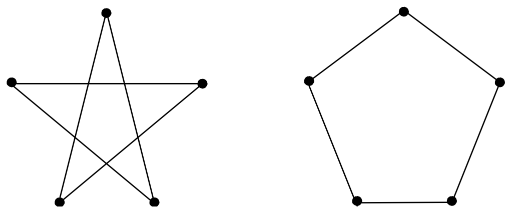
   c)



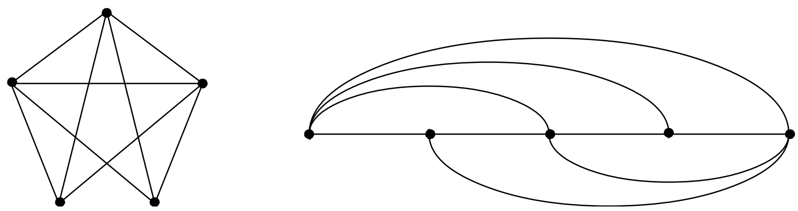
   d)



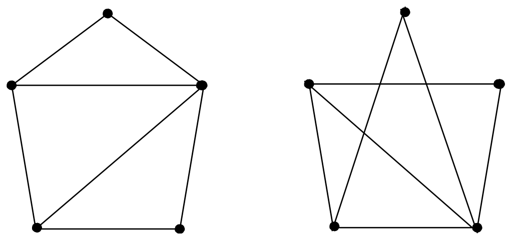
e)



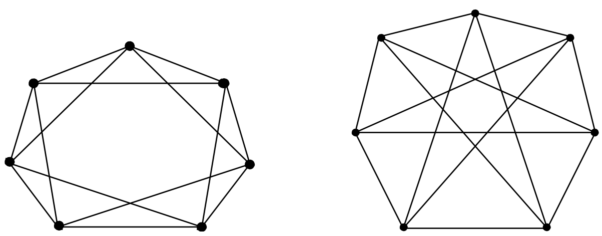
f)



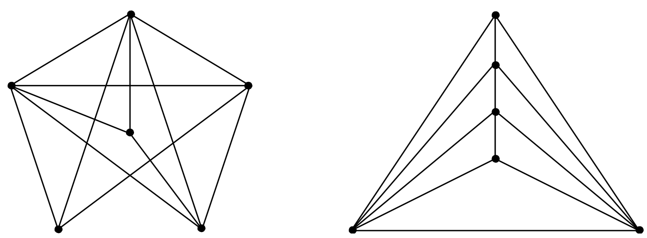
g)



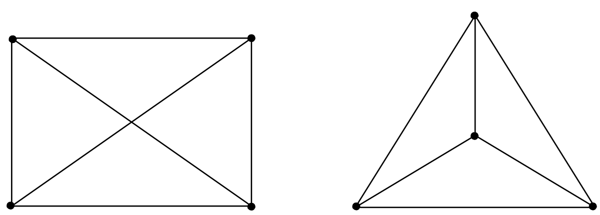
h)



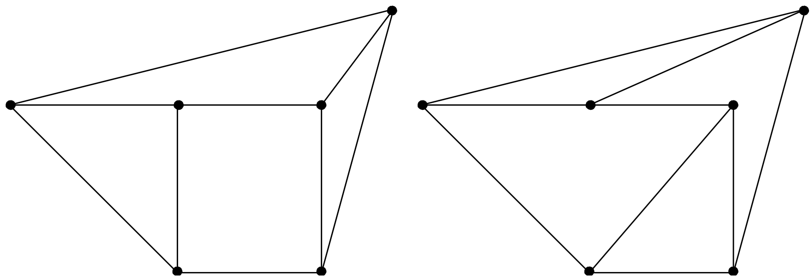
i)



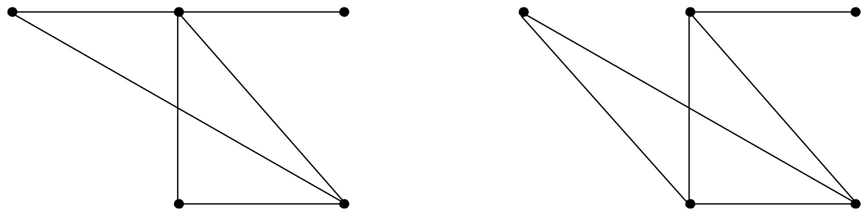
j)



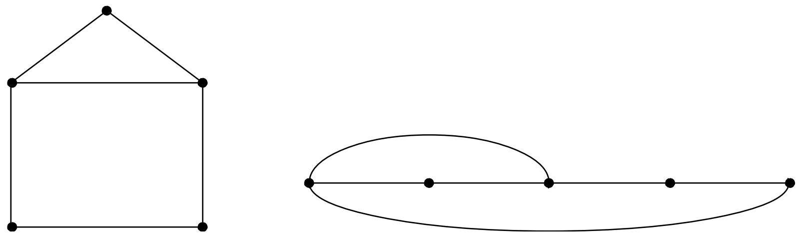
k)



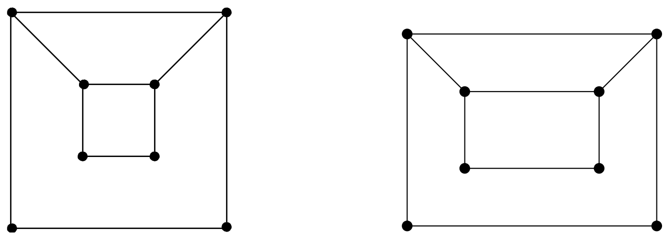
l)



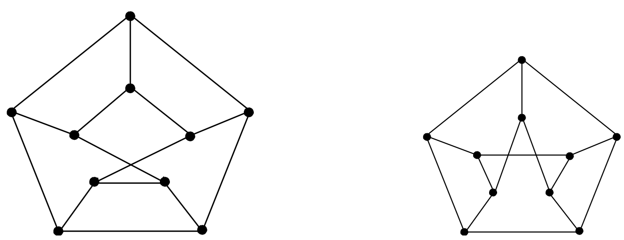
m)



n)



o)



11. Довести, що ізоморфізм є відношенням еквівалентності на множині всіх графів.

12. Побудувати чотири попарно неізоморфні самодоповнювальні (тобто такі, що ізоморфні своєму доповненню) графи з вісьмома вершинами.

13. Перевірити, чи будуть ізоморфними графи G_1 і G_2, що задані матрицями суміжності A_1 і A_2 відповідно.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. Зобразити всі попарно неізоморфні графи з n вершинами, якщо

    a) $n = 2$;

    b) $n = 3$;

    c) $n = 4$;

    d) $n = 5$.

15. Знайти в графі K_5 цикли довжини

    a) 3;

    b) 4;

    c) 6;

    d) 9;

    e) 10.

    Які з цих циклів є простими?

16. Довести, що зв'язний граф є простим циклом тоді і тільки тоді, коли степінь кожної вершини дорівнює двом.

17. Скільки ребер містить

    a) простий ланцюг із k вершин;

    b) простий цикл із k вершин;

    c) найкоротший простий цикл?

18. Зобразити кубічний граф з $2n$ вершинами ($n \geq 3$), який не має трикутників.

19. Довести, що граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

20. Довести, що для довільного графа G або він сам, або його доповнення $\overline{G}$ є зв'язним графом.

21. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають

    a) 6 вершин, 7 ребер і 2 компоненти зв'язності;

    b) 8 вершин, 6 ребер і 2 компоненти зв'язності;

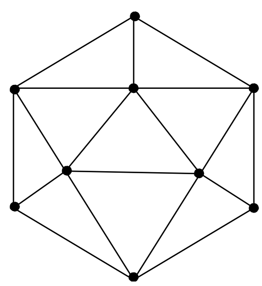
    c) 8 вершин, 6 ребер і 3 компоненти зв'язності?

22. Побудувати три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, які мають ейлерові цикли.

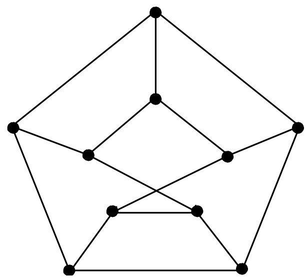
23. Перевірити, чи будуть графи з прикладу 13 ейлеровими, напівейлеровими, гамільтоновими, напівгамільтоновими.

24. Перевірити, чи будуть такі графи ейлеровими, напівейлеровими, гамільтоновими, напівгамільтоновими:

    a)

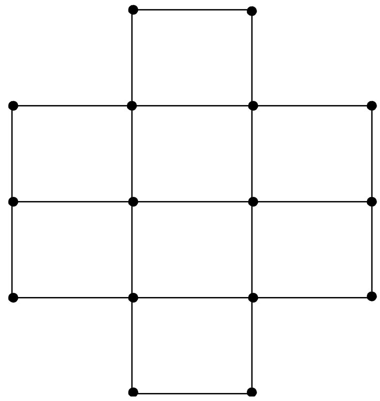


    b)

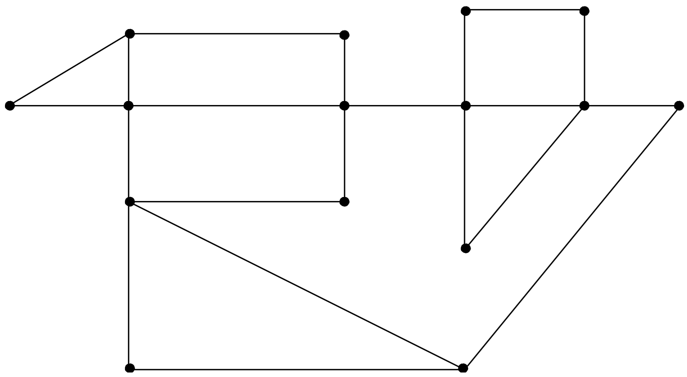


25. На малюнку зображено схеми музеїв. Вершинами графів позначено зали музеїв, а ребрами — переходи між залами. З якого залу потрібно розпочати маршрут екскурсії і в якому закінчити для того, щоб відвідувачі побували в кожній зала і пройшли по кожному переходу один раз. Визначити один з таких маршрутів.

a)



b)



26. Побудувати граф із вісьмома вершинами, який не має ейлерового циклу, але має ейлерів ланцюг.

27. Довести, що в повному графі K_n, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл. Якщо пронумерувати вершини цього графа, то скільки різних гамільтонових циклів має K_n? Скільки ейлерових?

28. Навести приклад графа, що є ейлеровим і не є гамільтоновим, а також приклад гамільтонового графа, що не є ейлеровим.

29. Охарактеризувати графи, що є одночасно ейлеровими і гамільтоновими.

30. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів з п'ятьма вершинами.

31. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів з шістьма вершинами.

32. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева з трьома, чотирма і п'ятьма вершинами.

33. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева, що мають

    a) 6 ребер і 3 кінцеві вершини;

b) 6 ребер і 4 кінцеві вершини;

c) 8 вершин та 3 вершини степеня 3?

34. Довести, що будь-яке дерево має принаймні 2 кінцеві вершини.

35. Довести, що дерево має тільки дві кінцеві вершини тоді і тільки тоді, коли воно є простим ланцюгом.

36. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

37. Побудувати кістякові дерева для графів з прикладу 13. Обчислити циклічний ранг графів.

38. Довести, що в дереві кожне ребро є мостом.

39. Про групу з 50 студентів відомо, що серед довільної четвірки студентів завжди знайдеться один студент, знайомий з трьома іншими. Довести, що тоді обов'язково знайдеться студент, знайомий з кожним з групи.

Рекомендована література

[1] Ф.А. Новиков Дискретная математика (для программистов).—СПб: Питер, 2000.—304с.

[2] М.Й. Ядренко. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник,— Київ: Вид.-поліграф. цент "Експрес", 2003р.—244с.

[3] Р. Грэтхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. —Москва, Мир, 1998.

[4] А.Я. Оленко, М.Й. Ядренко. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник, Видавництво НаУКМА-1996.

[5] Н.Я. Виленкин. Индукция. Комбинаторика. — Москва: Просвещение, 1976.

[6] Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Комбинаторика. — Москва: ФИМА, МЦНМО, 2006.— 400с.

[7] Р. Уилсон Введение в теорию графов М.Мир — 1977. 7. Р. Столл Множества, логика, аксиоматические теории, "Просвещение"Москва, 1963.

[8] В.І. Андрійчук, М.Я. Комарницький, Ю.Б. Іщук. Вступ до дискретної математики. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003.– 254с.

[9] Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий,О.А. Летичевський,Г.М. Луцикий, М.К. Песурін. Основи дискретної математики. Київ: "Наукова думка— 2002.

[10] М. Холл Комбинаторика, — Москва, Мир, 1970.