ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Лінійне програмування

для студентів напрямів підготовки 122 Комп’ютерні науки та
121 Інженерія програмного забезпечення

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,

Харків
ХНАДУ
2020

УДК 519.852

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради харківського національного автомобільно-дорожнього університету, протокол № 25/20/4.8 , від 31 січня 2020

Рецензенти:

Ніконов О.Я. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій і мехатроніки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, Лауреат Премії Президента України.

Яковлев С.В. – д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри математичного моделювання та штучного інтелекту Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Лауреат Державної премії України в галузі науки та техніки;

Нємченко К.Е. – д-р. фіз-мат. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

Назаров О.С. – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри програмної інженерії Харківського національного університету радіоелектроніки.

Ємець О. О., Пічугіна О. С., Маций О. Б., Коробчинський К. П.
Навчальний посібник «Лінійне програмування» для студентів напрямів підготовки 122 Комп'ютерні науки та 121 Інженерія програмного забезпечення / О. О. Ємець, О. С. Пічугіна, О. Б. Маций, К. П. Коробчинський. – Х. : ХНАДУ, 2019. – 102 с.

ISBN

Посібник містить необхідні теоретичні відомості, що стосуються лінійного програмування, згруповані у вісім розділів. Представлені основні методи лінійної оптимізації, засоби математичного моделювання відпо відповідних задач, а також наведено приклади розв'язання модельних практичних задач з графічними ілюстраціями розв'язків задач невеликої вимірності.

УДК 519.852

ISBN

ВСТУП

Кожен із нас час від часу стикається із проблемами вибору, тобто ситуаціями, коли досягнення результату можливе не єдиним шляхом. У такому разі природньо обрати найкращий спосіб здійснити цю дію. Але поняття найкращий розв'язок, у свою чергу, залежить від ситуації і критерія, за яким цей розв'язок обирається. Так, для людини, що направляється з пункту А у пункт Б, різні способи зробити це – піти пішки, викликати таксі чи скористатися суспільним транспортом – відповідно будуть найкращими, якщо ця людина прагне дістатися якнайдешевше, якнайшвидше чи обрати найкраще співвідношення ціна-якість, де під якістю розуміється час подорожі.

Математично, такі задачі представляються оптимізаційними математичними моделями, що включають аналітичну форму критерію, що називається цільовою функцією, та області пошуку розв'язку, і які називаються оптимізаційними задачами. У деяких випадках область пошуку містить невелику кількість допустимих розвв'язків, тому розв'язок задачі оптимізації можливо знайти звичайним перебором можливих варіантів рішень, але більш загальною є ситуація, коли допустима множина містить нескінченну, незлічену чи зліченну, кількість варіантів. У такому випадку задачу розв'язують наближено чи точно, застосовуючи певну, як правило ітераційну, схему (алгоритм, метод), що ґрунтується на активному використанні математичної моделі задачі.

Найбільш розвинутою областю теорії оптимізації є лінійна оптимізація чи лінійне програмування (Linear Programming), де розглядаються оптимізаційні задачі із лінійними цільовими функціями і областю пошуку, що задається лінійними обмеженнями, тобто є багатогранником чи багатогранною областю. Це пояснюється тим, що лінійне програмування має надзвичайно широку сферу практичного використання у теорії прийняття рішень, дослідженні операцій і оптимальному плануванні. З іншого боку, базою для бурного розвитку цієї області прикладної математики стали запропоновані Джоржем Данцигом у 1946–1947 роках загальної математичної постановки задачі лінійного програмування і симплекс-методу її розв'язання. Цей метод та різноманітні його модифікації, такі, як метод штучного базису, двоїстий симплекс-метод тощо зазвичай демонструють високу ефективність на практиці, але поліноміальну розв'язність задач лінійного програмування обґрунтував Леонід Хачіян лише у 1979 році, таким чином теоретично обгрунтувавши можливість ефективного розв'язання задач даного класу.

Інтерес до методів лінійного програмування викликаний також і тим, що лінійні оптимізаційні задачі виникають як допоміжні у інших областях теорії оптимізації, таких, як нелінійне і дискретне програмування. Отже, і на сьогоднішній день інтерес до методів лінійного програмування не слабшає.

У навчальних програмах підготовки сучасних фахівців з комп'ютерних технологій і прикладної математики, лінійне програмування розглядається у різних контекстах у таких дисциплінах, як «Дискретна математика», «Теорія прийняття рішень» і «Системний аналіз», «Математичне програмування», «Методи оптимізації», «Дослідження операцій». Даний посібник, зокрема, призначений для систематизації, закріплення та поглиблення цих знань.

Посібник містить необхідні теоретичні відомості, що стосуються лінійного програмування, згруповані у вісім розділів. Тут представлені основні методи лінійної оптимізації, засоби математичного моделювання відпо відповідних задач, а також наведено приклади розв'язання модельних практичних задач з графічними ілюстраціями розв'язків задач невеликої вимірності.

ТЕМА 1

Питання:

1.1 Предмет математичного програмування.

1.2 Математичні моделі економічних задач. Оптимізаційні моделі

1.1 Предмет математичного програмування

Математичне програмування (МП) являє собою математичну дисципліну, що займається вивченням та дослідженням екстремальних задач, розробкою методів їх розв'язування.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення функції $f(x)$, $x \in X \subset R^n$ (яку називають *цільовою*) при умовах $g^i(x) \le b_i$, $i = \overline{1,m}$, де $f(x)$, $g^i(x)$ – задані функції, b_i дійсні числа ($i = \overline{1,m}$). Традиційний запис:

$$\begin{gathered} f(x) \to min(max), \\ x \in X \subset R^n, \\ g^i(x) \le b_i,\ i = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Термін "математичне програмування" склався історично і на сьогодні вважається не досить вдалим, оскільки дезорієнтує фахівців схожістю з програмуванням на ЕОМ. Як правило, синонімами до нього використовують терміни "теорія оптимізації", "оптимальне програмування" тощо. Словосполучення "математичне програмування" означає, з одного боку, що в результаті розв'язування задачі одержується оптимальне (екстремальне) значення цільової функції, але для виходу на цей розв'язок потрібно виконати ряд дій по певній *програмі* (алгоритму). З іншого боку, одержаний розв'язок з економічної точки зору часто інтерпретується як програма діяльності підприємства (фірми), при виконанні якої цільова функція, що відображає ефективність роботи по заданій програмі, досягає екстремуму.

Залежно від властивостей функцій $f(x), g^i(x)$ ($i = \overline{1,m}$) математичне програмування можна розглядати як ряд самостійних розділів, що займаються вивченням і розробкою методів розв'язування окремих класів задач.

Перш за все, задачі МП поділяються на задачі *лінійного програмування* (ЛП) і *нелінійного програмування* (НП).

Означення. Задача (1.1) називається задачею ЛП (ЗЛП), якщо функції $f(x)$, $g^i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ – лінійні, а $X = R^n$.

ЛП найбільш досліджена область МП, у якій розроблені ефективні методи, алгоритми і програми на ЕОМ.

Приклад 1.1. Знайти найбільше значення функції $f: f = 3x_1 - 5x_2 + 5x_4 - x_5$, якщо виконані умови:

$$2x_1 - 3x_3 - 5x_5 = 10 \ ;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8;$$
$$3x_3 - 4x_4 \ge 6 \ ;$$
$$x_2,\, x_3 \le 10;\ x_1,\, x_3,\, x_4 \ge 0.$$

Наведена задача є ЗЛП.

Означення. Якщо хоч б одна з функцій $f(x)$, $g^i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ не є лінійною, задача (1.1) називається задачею нелінійного програмування (задачею НП або ЗНП).

Необхідність дослідження і розв'язання ЗНП обумовлюється тим, що в системах, що моделюються, залежності можуть бути дуже складними, і вони, як правило, мають нелінійний характер. Приведення цих залежностей до лінійних загрублює і, тим самим, спрощує модель системи або явища. При цьому, в деяких випадках, таке спрощення не спотворює суттєво результат, що одержується, і таке спрощення з подальшим застосуванням методів ЛП можливо, в інших же випадках така редукція призводить до результату настільки далекого від реального, що застосування методів ЛП повністю виключається.

Приклад 1.2. Знайти найбільше та найменше значення функції *f*:

$$f = x_1^{1.0001} + 2x_2^{0.9998},$$

якщо

$$x \in X, \text{ де } X = \left\{ x \in R^2 :\ x_1 + x_2 \le 1000000;\ x_1 + x_2 \ge 5;\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}.$$

Область, що задається даною системою обмежень, є підобластю першого квадранту. Ясно, що поблизу початку координат значення f будуть несуттєво відрізнятися від значень функції $f_1 = x_1 + 2x_2$, і при розв'язуванні задачі пошуку мінімуму $f \underset{x \in X}{\to} min$ можна перейти до задачі $f_1 \underset{x \in X}{\to} min$. У той же час, на частині межі області, що задається рівнянням $x_1 + x_2 = 1000000$, де розташований розв'язок задачі $f \underset{x \in X}{\to} min$, значення функцій f і f_1 будуть відрізнятися вже набагато більше, і перехід до ЗЛП видається не дуже вдалим.

Серед задач НП найбільш вивченими є задачі *опуклого програмування* (ОП). Це задачі пошуку мінімуму опуклої функції, яка задана на опуклій множині.

Приклад 1.3. Знайти:

$$2(x_1 - 5)^2 + 5(x_2 + 3)^2 \to min,$$

якщо

$$x_1^2 + x_2^2 \le 10; \; x_1 - 5x_2 \le 0; \; x_1, \, x_2 \ge 0.$$

У свою чергу, серед задач ОП найкраще досліджені задачі *квадратичного програмування*. Це ЗНП, коли цільова функція $f(x)$ – поліном 2-го степеню, а $g^i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ – лінійні функції.

Приклад 1.4. Знайти:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 \to min,$$

якщо

$$5x_1 + 3x_2 \le 12; \; -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10; \; x_1, \, x_2, \, x_3 \ge 0.$$

Окремими класами задач МП є задачі *цілочислової, дискретної, комбінаторної, параметричної* та *дробово-лінійної оптимізації.*

Так, у задачах цілочислової оптимізації всі (або деякі) змінні можуть набувати лише цілочислові значення; в задачах дискретної оптимізації всі (або деякі) змінні можуть набувати тільки значення з деякої дискретної множини. В задачах комбінаторної оптимізації всі (або деякі) невідомі є елементами певних комбінаторних множин (сполучень, переставлень, розміщень тощо).

У моделях реальних економічних систем коефіцієнти цільової функції (або додаткових умов) можуть бути не сталими величинами, а змінюватися в залежності від різних факторів за період часу, для якого розв'язується екстремальна задача. Наприклад, формування виробничої програми для підприємства, на якому ведеться реконструкція, визначення додаткових капітальних вкладень за умови заміни технологічних процесів обробки деталей (виробів) тощо. Моделі, що адекватно описують такі реальні ситуації, відносяться до задач параметричної оптимізації.

У задачах *дробово-лінійної* оптимізації цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а функції $g^i\left(x\right)$ ($i=\overline{1,m}$) – лінійні.

Виділяють окремі класи задач *стохастичного* і *динамічного* програмування.

Якщо в цільовій функції, або в функціях $g^i\left(x\right)$ ($i=\overline{1,m}$) є випадкові величини, то така задача відноситься до задач стохастичного програмування.

У задачах динамічного програмування (ДП) розглядається, наприклад, процес виробництва або управління в просторі (або в часі), тобто в розвитку. При цьому процедура розв’язання реалізується за своєрідною схемою: весь процес пошуку оптимального розв'язку являє собою визначену послідовність кроків, для кожного з яких знаходиться оптимальний розв'язок, причому оптимальність визначається впливом їх на наступні кроки на основі так званого принципу оптимальності Беллмана. Сам процес відшукання розв'язку є багатокроковим. При цьому одна задача з багатьма змінними замінюється багатьма задачами з невеликим числом змінних (або навіть з однією), що суттєво зменшує обсяг обчислень.

Обмеженнями для застосування методів ДП є такі умови: остаточний оптимум є сумою оптимальних розв’язків кожного з виділених кроків, а стан системи в момент часу, що розглядається, визначає вибір оптимального розв'язку, причому на його вибір не впливають стани системи в попередні моменти часу.

1.2. Математичні моделі економічних задач. Оптимізаційні моделі

Означення. *Математична модель* – це система математичних співвідношень, яка описує процес або явище, що вивчається.

Для складання математичної моделі можна використовувати будь-які математичні засоби, мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорію множин, абстрактну алгебру, топологію, математичну логіку, теорію ймовірностей тощо.

Процес складання математичної моделі називається *математичним моделюванням* (ММ). Це найзагальніший і найрозповсюдженіший у науці метод дослідження реальних процесів, що відбуваються у природі та суспільстві.

У багатьох випадках при побудові математичних моделей економічних систем або природних явищ виникає питання досягнення деяким критерієм (функцією) оптимального значення. Такі моделі називаються *оптимізаційними*.

Розглянемо два приклади формалізації ситуації прийняття рішень, які відносяться до задач МП (лінійного і нелінійного).

Приклад 1.5 (задача Канторовича про верстати).

Виріб, що випускає завод, складається з двох металевих деталей, обробка яких може бути виконана на різних верстатах (фрезерному, револьверному та автоматичному револьверному).

Потрібно закріпити верстати за деталями так, щоб одержувати за годину максимальну кількість виробів. Інформація про кількість верстатів кожного виду, їх продуктивність по кожній деталі наведена в табл.1.1:

Таблиця 1.1

Верстати	Кількість верстатів	Потужність верстата (дет./год.)	
		деталь1	деталь2
фрезерний	3	10	20
револьверний	3	20	30
автоматичний револьверний	1	30	80

Перш ніж скласти математичну модель, потрібно зрозуміти, що є допустимою дією, і на які елементарні дії її можна розбити.

У даному випадку дія – план розподілу, що характеризується кількістю верстатів кожного типу, що закріплюється за кожною деталлю. У відповідності з цим введемо сукупність невідомих

$$x = \left\{ x_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2} \right\},$$

де x_{ij} – кількість верстатів виду *i*, що випускає *j*-у деталь. Сукупність змінних *x* повністю характеризує дію.

Тепер, наприклад, $10x_{11}$ – це кількість деталей 1-го виду, що випускається фрезерним верстатом, аналогічно і для решти змінних.

Дамо відповідь на питання: при яких умовах змінні $x_{ij} \left(i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2} \right)$ будуть відповідати допустимій дії, тобто плану, що відповідає заданим ресурсам (верстатам) із вимогами комплектації (деталей 1 і деталей 2 має бути однакова кількість).

Очевидно, повинно виконуватися:

$$x_{11} + x_{12} \le 3\ ;$$

$$x_{21} + x_{22} \le 3\ ;$$

$$x_{31} + x_{32} \le 1$$

(обмеження на кількість верстатів);

$$10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31} = 20x_{12} + 30x_{22} + 80x_{23}$$

(умова виконання комплектності).

Крім того, змінні мають бути невід'ємними, тобто

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2},$$

але не обов'язково цілими числами.

Якщо, наприклад, $x_{11} = 2.25$, то це означатиме, що два фрезерних верстати весь час випускають деталь №1, а третій - лише чверть часу.

Мета планування: знайти такий набір змінних

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2},$$

які задовольняють усім вказаним умовам і максимізують функцію, що виражає кількість виробів:

$$10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31} \to max.$$

З побудованої математичної моделі видно, що дана задача відноситься до задач лінійного програмування.

<u>**Приклад 1.6.**</u> (задача використання обладнання з умовою виконання плану).

Нехай підприємству згідно плану потрібно виготовити *50, 30, 45* одиниць продукції видів A_1, A_2, A_3 відповідно, кожен із яких може виготовлятися на машинах B_1, B_2.

Треба скласти розклад використання обладнання, щоб цей план було виконано.

Потужність машин (в одиницях часу, потрібного на виготовлення одиниці продукції певного виду) вказано в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Машини	Потужність машини (год.)		
	A_1	A_2	A_3
B_1	4	10	10
B_2	6	8	20
План виготовлення продукції	50	30	45

Якщо позначити x_{ij} ($i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3}$) кількість продукції A_j, що виготовляється на машині B_i, то план використання обладнання буде складено, якщо буде побудовано множину змінних $x = \left\{x_{ij},\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3}\right\}$. Елементи *x* повинні задовольняти такі умови:

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$

$$x_{12} + x_{22} = 30,$$

$$x_{13} + x_{23} = 45$$

(умови виконання плану);

$$x \geq 0,\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3}$$

(умови невід'ємності всіх змінних).

Позначимо за *X* множину точок *x*, що задовольняють ці умови.

На виготовлення 1-ою машиною x_{11} одиниць продукції виду A_1, x_{12} – продукції A_2, x_{13} – продукції A_3 треба витратити t_1 часу, де

$$t_1 = 4x_{11} + 10x_{12} + 10x_{13} ;$$

на виготовлення 2-ою машиною x_{21} одиниць продукції виду A_1, x_{22} – продукції A_2, x_{23} – продукції A_3 треба витратити t_2 часу, де

$$t_2 = 6x_{21} + 8x_{22} + 20x_{23} .$$

Машини працюють одночасно, тому час *T*, потрібний на виконання плану, дорівнює найбільшому зі значень t_1, t_2, тобто

$$T = max\{t_1, t_2\} .$$

Задача - знайти мінімум *T* на множині *X*, тобто математична модель задачі:

$$T \underset{x \in X}{\rightarrow} min .$$

Цільова функція нелінійна, тому дана задача відноситься до задач нелінійного програмування.

ТЕМА 2

Питання:

2.1 Загальна, стандартна та канонічна форми задачі лінійного програмування, способи переходу від однієї форми до іншої.

2.2 Термінологія задач лінійного програмування, основні означення і поняття

2.1. Загальна, стандартна та канонічна форми задачі ЛП, способи переходу від однієї форми до іншої

Раніше було побудовано математичну модель задачі, яка є окремим випадком такої:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \tag{2.1}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,k}, \; k \le m; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{k+1,m}, \tag{2.3}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,l}, \; l \le n, \tag{2.4}$$

де $a_{ij}, b_i, c_j \; \left(i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}\right)$ – сталі.

Задачу (2.1)-(2.4) називають задачею лінійного програмування (*ЗЛП*) у *загальному вигляді (у загальній формі)*.

Розрізняють ще дві форми ЗЛП в залежності від наявності обмежень різного типу.

Так *стандартна* (або *симетрична*) форма моделі ЗЛП полягає у визначенні максимального значення z у (2.1), коли обмеження (2.3) відсутні, тобто $k=m$, усі змінні невід'ємні, тобто $l = n$. Таким чином, її вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{2.5}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}\ ; \qquad (2.6)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (2.7)$$

<u>Канонічна</u> (або *<u>основна</u>*) форма ЗЛП полягає у визначенні максимального значення функції (2.1) при умовах (2.3), (2.7), де $k=0,\ l=n$, тобто:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad (2.8)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}\ ; \qquad (2.9)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (2.10)$$

Як видно, стандартна та канонічна форми моделі ЗЛП є окремим випадком ЗЛП у загальній формі (2.1)-(2.4).

Стандартна форма цікава, по-перше, тим, що велика кількість прикладних задач зводиться саме до моделей цього вигляду. По-друге, для розв'язання таких задач з кількістю змінних не вище трьох є дуже цікава її геометрична інтерпретація.

Канонічна форма ЗЛП важлива тим, що основні обчислювальні схеми різних варіантів симплекс-методу – методу розв'язування ЗЛП – розроблені саме для цієї форми.

Наведені три форми ЗЛП еквівалентні в тому сенсі, що кожна з них за допомогою певних перетворень може бути зведена до будь-якої з двох інших. Зокрема, будь-яку ЗЛП можна звести до канонічного вигляду. Тому вміння розв'язувати ЗЛП у канонічному вигляді дозволяє розв'язувати ЗЛП, записану у будь-якій формі.

Для того, щоб перейти від загальної чи стандартної форми ЗЛП до канонічної потрібно вміти:

– зводити задачу мінімізації до задачі максимізації;
– переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей;
– заміняти невід'ємними змінними ті змінні, для яких умова невід'ємності не виконується.

Ці питання вирішуються так:

1) коли треба знайти мінімум функції $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, то переходять до знаходження максимуму функції $z'=-z=-c_1x_1-...-c_nx_n$, враховуючи те, що

$$max\, z' = max(-z) = min\ z; \qquad (2.11)$$

2) обмеження-нерівності вихідної задачі можна перетворити на обмеження-рівності алгебраїчним додаванням до їх лівих частин додаткових невід'ємних змінних, а саме:

а) обмеження-нерівність $a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n \le b_i$ перетворюється на обмеження-рівність $a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$, де $x_{n+1}\ge 0$;

б) обмеження-нерівність $a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n \ge b_i$ перетворюється на обмеження-рівність $a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n-x_{n+2}=b_i$, де $x_{n+2}\ge 0$. Очевидно, кількість додаткових змінних дорівнює кількості нерівностей, що перетворюється на рівність, тобто в системі (2.3) – це k;

3) якщо змінна x_j не задовольняє умову невід'ємності, тобто $l<j\le n$, то її можна замінити різницею двох невід'ємних змінних $x_j=x'_j-x''_j,\ x'_j, x''_j\ge 0$. Обґрунтованість такої заміни випливає з того, що будь-яке число можна представити у вигляді різниці двох невід'ємних чисел.

Приклад 2.1. Для даної задачі лінійного програмування перейти від загальної форми до канонічної:

$$f=x_1+3x_2-5x_3+x_4\to min;$$

$$x_1-3x_3-2x_4\ge 3,$$

$$x_1-x_2-5x_3\le 8,$$

$$-2x_1+x_3-3x_4=-10,$$

$$x_1,x_3\ge 0.$$

1) Перейдемо до задачі максимізації:

$$f^*=-f=-x_1-3x_2+5x_3-x_4\to max;$$

2) Замінимо першу та другу нерівність системи рівністю введенням нових невід'ємних змінних:

$$x_1 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 3,$$
$$x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = 8,$$
$$x_5,\, x_6 \geq 0.$$

3) Змінні x_2, x_4 не задовольняють умову невід'ємності, тому робимо заміну: $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_4 = x_4' - x_4''$, $x_2', x_2'', x_4', x_4'' \geq 0$. Звідси

$$x_1 - 3x_3 - 2\left(x_4' - x_4''\right) - x_5 = x_1 - 3x_3 - 2x_4' + 2x_4'' - x_5 = 3,$$

$$x_1 - \left(x_2' - x_2''\right) - 5x_3 + x_6 = x_1 - x_2' + x_2'' - 5x_3 + x_6 = 8,$$

$$-2x_1 + x_3 - 3\left(x_4' - x_4''\right) = -2x_1 + x_3 - 3x_4' + 3x_4'' = -10,$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6 \geq 0.$$

Вектор вільних членів $b = \left(3,\ 8,\ -10\right)$ містить від'ємну компоненту. Якщо потрібно, щоб $b \geq \bar{0}$, то треба третє рівняння помножити на -1 (через $\bar{0}$ тут і далі позначається нульовий вектор відповідної вимірності).

2.2. Термінологія задач лінійного програмування, основні означення і поняття

Наведемо термінологію лінійного програмування, яку ми будемо використовувати.

Як відомо, множини, елементами яких є точки, називають *точковими* (наприклад, на площині – коло, пряма тощо; у просторі - куля, куб, площина тощо; в n-вимірному просторі – область визначення функції n змінних тощо). Точкові множини (далі просто множини) поділяють на *опуклі* і *неопуклі*.

Означення. *Опуклою лінійною комбінацією* точок $x^1, \ldots, x^r$ n-вимірного евклідова простору R^n називається точка

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \tag{2.12}$$

де $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,r},\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1.$

При $r = 2$ множина точок, що задовольняє (2.12), називається *відрізком*, що з'єднує точки x^1, x^2, і позначується $\left[x^1, x^2\right]$. Будь-яку точку $x \in \left[x^1, x^2\right]$ можна представити у формі: $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, де $\lambda \in [0,1]$.

Означення. Множина точок називається *опуклою*, якщо разом із будь-якими двома точками вона містить і весь вісь відрізок, що з'єднує ці точки.

Якщо існує відрізок, кінці якого належать множині, а сам відрізок має хоч одну точку поза множиною, множина називається *неопуклою*.

Приклад 2.2. Опуклі множини: порожня множина, весь простір R^n (наприклад, пряма в R^1, квадрат чи коло на площині R^2). Неопуклі множини - кільце, в тому числі окружність, на площині.

Опуклі множини мають важливу властивість, що відображається такою теоремою.

Теорема 2.1. Переріз довільного скінченого числа опуклих множин є також опуклою множиною.

Доведення. Продемонструємо доведення для двох множин. Нехай $M_1, M_2 \in H$ – опуклі множини (H – деякий простір).

Якщо $M = M_1 \cap M_2$: $M = \varnothing$, або $M = H$, то справедливість теореми очевидна (див. приклад 2.2). Те саме можна сказати, якщо $M = A$, де A – точка.

Якщо це не так, то існують дві точки $A, B \in M : A \neq B$. Отже, з означення перерізу $A, B \in M_1, A, B \in M_2$. Оскільки M_1, M_2 – опуклі, то $[A,B] \in M_1$, $[A,B] \in M_2$, звідки, а також з означення перерізу слідує $[A,B] \in M$. Отож, M опукла множина.

Означення. Точка опуклої множини називається *кутовою* (або *крайньою*), якщо через неї не можна провести жодного відрізка, що складається лише з точок даної множини, для якого вона була б внутрішньою.

Приклад 2.3. Розглянемо коло $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, яке є опуклою множиною. Будь-яка точка окружності $x_1^2 + x_2^2 = 1$ є кутовою, тобто множина кутових точок кола – це окружність, що обмежує коло.

Означення. *Замкненим півпростором* (або просто *півпростором*) називається множина точок $x \in R^n$, що задовольняє нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \qquad (2.13)$$

де $a_j \ \left(j = \overline{1,n} \right)$, b – деякі константи.

Означення. *Гіперплощиною* називається множина точок $x \in R^n$, координати яких задовольняють рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b. \qquad (2.14)$$

Зауважимо, що будь-яка гіперплощина може бути представлена як переріз двох півпросторів.

Означення. *Багатогранною множиною* (або *багатогранною областю*) називається переріз скінченої кількості півпросторів.

Означення. Множина *M* простору R^n *обмежена*, якщо існує куля, що повністю містить *M***,** тобто існує така стала *r*, що всі точки $x = \left(x_1, ..., x_n \right) \in M$ задовольняють нерівність: $x_1^2 + ... + x_n^2 \le r^2$.

Означення. Обмежена багатогранна множина називається *багатогранником*.

ТЕМА 3

Питання:

3.1 Геометричне тлумачення (інтерпретація) ЗЛП. Графічний метод розв'язування ЗЛП.

3.2 Основні теореми лінійного програмування

3.1. Геометричне тлумачення (інтерпретація) ЗЛП. Графічний метод розв'язування ЗЛП

Графічний метод застосовується до розв'язання ЗЛП, заданих у стандартній формі, коли $n = 2, 3$.

Розглянемо таку задачу при $n = 2$:

$$c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow min(max),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

Область допустимих розв'язків задачі може бути порожньою (*випадок A*) або непорожньою і представляти собою багатокутник, необмежену багатокутну область або точку (*випадок B*).

1) **<u>Випадок A.</u>** Допустима область порожня, коли система обмежень не справджується в жодній точці. Висновок: ЗЛП не має розв'язків.

<u>Приклад 3.1.</u> Наступній задачі:

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow min(max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 \le x_2, \\ 4x_2 \le x_1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

відповідає рис. 3.1.

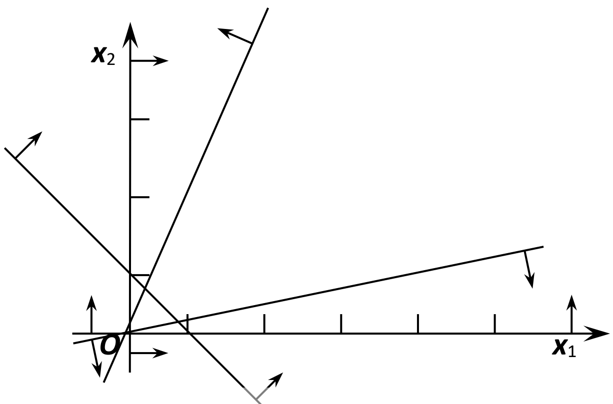


Рис.3.1. Порожня область задачі з прикладу 3.1

2) **Випадок В.**

а) Якщо допустима область складається з однієї точки, то ця точка є оптимальним розв'язком ЗЛП.

Приклад 3.2. Задачі:

$x_1 + 2x_2 \to min(max)$

$$\begin{cases} 2x_1 \le x_2, \\ 3x_2 \le x_1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

відповідає рис. 3.2.

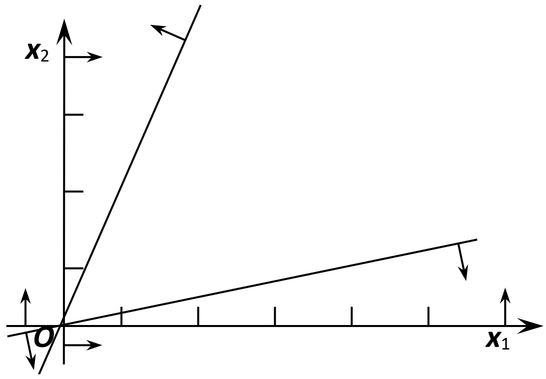


Рис.3.2. Область задачі з прикладу 3.2

Допустима область – початок координат. Таким чином, маємо:

$x_{min} = x_{max} = (0,0)$,

$z_{min} = z_{max} = 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Рівняння $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ є сім'єю паралельних прямих з параметром z. Коли z зростає, то пряма (лінія рівня) зміщується паралельно сама собі в напрямку вектору цільової функції $c = (c_1, c_2)$, який називається *напрямним*.

Пересуваючи лінію рівня до межі області допустимих розв'язків (ОДР) з положення, коли ОДР розташована далі в напрямку вектору ***c***, ніж початкове розташування лінії рівня, маємо: перша точка перерізу лінії рівня з ОДР є точкою мінімуму функції, остання точкою максимуму.

Якщо цільова функція досягає екстремуму одночасно в двох вершинах A і B, то вона, очевидно, досягає цього значення і на відрізку $[A, B]$ (це може бути, коли вектор c паралельний вектору нормалі до прямої обмеження).

б) Допустима область багатокутник.

<u>Приклад 3.3</u>. Задачі:

$x_1 + 2x_2 \to min(max)$

$$\begin{cases} 2x_1 \ge x_2, \\ 3x_2 \ge x_1, \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 2x_5 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

відповідає рис. 3.3. ОДР – чотирикутник $ABCD$, напрямний вектор: $c = (1,2)$.

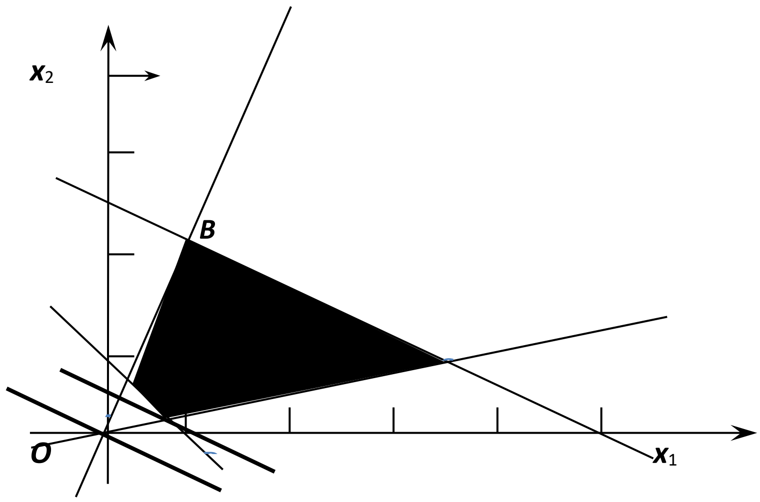


Рис.3.3. Область з прикладу 3.3

Будуємо, наприклад, лінію рівня, що проходить через O (вона не має перетину з ОДР). Рухаємо її в напрямку c до перерізу з ОДР, одержуємо точку D. Рухаємо пряму далі до тих пір, доки вона має спільні точки з $ABCD$. Виявляється, що останніми точками перетину з нею будуть вершини B і C, відповідно, і всі точки відрізку $[B, C]$, але нам достатньо знайти одну з них, наприклад, точку B.

Далі ми будемо нумерувати нерівності в системі римськими числами. Для того, щоб знайти розв'язок ЗЛП, розв'яжемо систему двох рівнянь, яку формуємо з геометричних міркувань. А саме: точка D утворюється у перетині прямих, отриманих з нерівностей II і III, заміною знаків "≤" на "=", отже:

$$D: \begin{cases} 3x_2 = x_1; \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases} \; D\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Точка B – це точка перетину прямих, отриманих із нерівностей I і IV, заміною знаків "≤" на "=".

$$B: \begin{cases} 2x_1 = x_2; \\ x_1 + 2x_2 = 5; \end{cases} \; B(1,2).$$

<u>Відповідь</u>: $x_{min} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), z_{min} = \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; точка x_{max} однозначно не визначена ($x_{max} \in [B,C]$), $z_{max} = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$

в) Допустима область – багатокутна необмежена область

Приклад 3.4. Область задачі:

$$x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0, \\ 2x_1 \geq x_2, \\ 3x_2 \geq x_1, \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

показана на рис. 3.4.

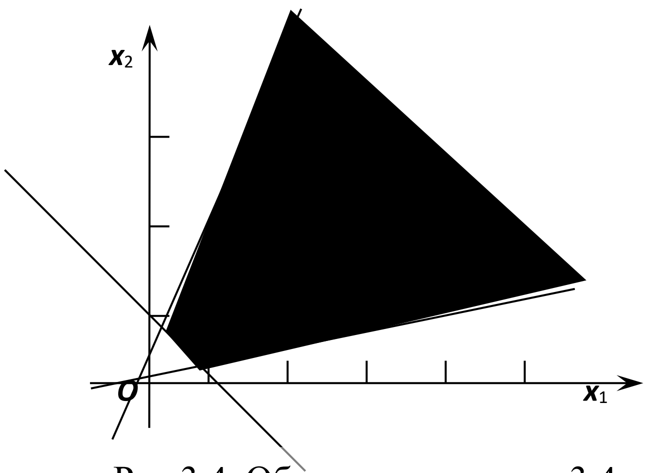


Рис.3.4. Область з прикладу 3.4

Як видно, рухаючись у напрямку вектору c, ми ніколи не знайдемо останньої точки перерізу лінії рівня з ОДЗ. У такому випадку кажуть, що цільова функція <u>*необмежена зверху*</u> і пишуть: $z_{max} = +\infty$. Аналогічно, якщо не можна вказати першої точки перетину лінії рівня з ОДР, говорять, що цільова <u>*функція необмежена знизу*</u> і відповідь записують у вигляді: $z_{min} = -\infty$.

Для випадку $n = 3$, геометричне представлення задачі будується в тривимірному просторі. ОДР являє собою, якщо вона непорожня, точку, багатогранник або необмежену багатогранну область. Поверхня рівня (аналог лінії рівня) – гіперплощина $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = z$, яка зміщується в напрямку вектору $c = (c_1, c_2, c_3)$. Множина розв'язків ЗЛП, якщо вона непорожня, а цільова функція обмежена, очевидно, може бути: точкою, нескінченою множиною, що являє собою ребро, нескінченою множиною – гранню багатогранника. Для того, щоб знайти координати вершини, в якій досягається розв'язок ЗЛП, необхідно три нерівності системи додаткових обмежень перетворити на рівності.

<u>**Зауваження**</u>. Аналогічно тому, як лінійна нерівність може бути зведена до рівняння додаванням нової змінної з відповідним знаком, відкиданням змінної рівняння може бути зведено до нерівності з числом змінних на 1 менше і з відповідним знаком, при цьому повинна виконуватися умова невід'ємності змінної, яка було відкинута. Це дозволяє в окремих випадках графічно розв'язувати ЗЛП, які задані в загальній формі для n>3. Цей прийом продемонструємо на такому прикладі.

Приклад 3.5. Розв'язати графічно задачу:

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 30x_5 + 6x_6 \to min(max)\ ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 = 8, \\ 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 - x_6 = 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Випишемо матрицю A системи рівнянь і вектор вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Так перше рівняння системи еквівалентне таким системам із двох нерівностей:

$$3x_3 + x_5 \leq 9,\ x_1 = 9 - 3x_3 - x_5 \geq 0;$$

$$x_1 + 3x_3 \leq 9,\ x_5 = 9 - x_1 - 3x_3 \geq 0;$$

$$x_1 + x_5 \leq 9, \quad x_3 = \left(9 - x_1 - x_5\right) / 3 \geq 0.$$

Проте, оскільки дане рівняння входить до системи, в інші рівняння якої також входять змінні x_1, x_3, x_5, перейти від системи рівнянь до системи нерівностей можна лише для змінних, які входять лише в одне рівняння системи (це, наприклад, змінна x_4). Еквівалентними перетвореннями приведемо матрицю обмежень до такого вигляду:

$$\left(A|b\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}/4 \\ \mathrm{II} + \mathrm{IV} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{IV} \\ \mathrm{II}-\mathrm{IV} \\ \\ \\ \end{array} \sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right).$$

Тут використано символічне позначення дій над рядками матриці вигляду: III/4 (третій рядок поділити на 3), I-IV (від першого відняти четвертий рядок) тощо. Тепер система векторів-рядків матриці містить одиничний базис, тобто існують 4 змінні, кожна з яких входить лише в єдине рівняння системи (це змінні x_1, x_4, x_5, x_6). Запишемо систему рівнянь і еквівалентну їм систему нерівностей:

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 + x_5 = -2; \\ -x_2 + x_6 = -3; \\ \frac{3}{4}x_3 + x_4 = \frac{3}{2}; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 11; \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,6}\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_2 + 5x_3 \leq -2; \\ -x_2 \leq -3; \\ \frac{3}{4}x_3 \leq \frac{3}{2}; \\ 2x_2 - 2x_3 \leq 11; \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,6}\right), \end{cases}$$

за умови, що:

$$x_1 = 11 - 2x_2 + 2x_3,\ x_4 = 3/2 - 3/4x_3,\ x_5 = -2 + 2x_2 - 5x_3,\ x_6 = \text{-}3 + x_2.$$

Виключимо змінні x_1, x_4, x_5, x_6 із цільової функції:

$$F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 30x_5 + 6x_6 = 3\left(11 - 2x_2 + 2x_3\right) - 2x_2 + 5x_3 +$$

$$+\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3\right) - 30\left(-2 + 2x_2 - 5x_3\right) + 6\left(-3 + x_2\right) = 76{,}5 - 62x_2 + 160{,}25x_3.$$

Розглянемо тепер ЗЛП із системою обмежень, які є нерівностями з двома змінними і розв'яжемо її графічно. Задача має вигляд:

$$-62x_2 + 160\frac{1}{4}x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 \le -2; \\ x_2 \ge 3; \\ x_3 \le 2; \\ x_2 - x_3 \le \frac{11}{2}; \\ x_2, x_3 \ge 0, \end{cases}$$

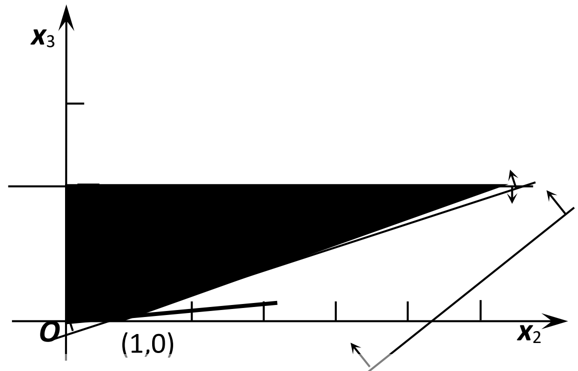


Рис.3.5. Область в площині змінних x_2, x_3 для прикладу 3.5.

а її допустима область показана на рис. 3.5. Отриманий розв'язок задачі мінімізації:

$$x^{**} = (1,0); z^{**} = -62 + 0 + 142{,}5 = 50{,}5.$$

Знайдені значення цільової функції допоміжної задачі – це також шукане значення цільової функції z вихідної задачі. Для того, щоб знайти розв'язок вихідної задачі, знаходимо решту змінних x_1, x_4, x_5, x_6.

<u>Відповідь</u>: $x^* = (9;\ 1;\ 0;\ 1.5;\ 0;\ 9)$, $z^* = z^{**} = 50.5$.

Користуватися при розв'язанні ЗЛП геометричною інтерпретацією навіть для $n = 3$ досить складно, але наведена геометрична інтерпретація дозволяє сформулювати такі властивості ЗЛП на багатограннику:

а) оптимальний розв'язок, якщо він існує, знаходиться не всередині, а на межі ОДР, у тому числі, досягається принаймні в одній з його вершин;

б) для того, щоб знайти оптимальний розв'язок, треба, переходячи від однієї вершини до іншої, рухатися в напрямку зменшення цільової функції в задачі мінімізації (або збільшення – в задачі максимізації).

3.2. Основні теореми лінійного програмування

<u>**Означення**</u>. Якщо система обмежень ЗЛП має хоча б один розв'язок, то вона називається <u>*сумісною*</u>, інакше – <u>*несумісною*</u>.

<u>Означення</u>. Множина X точок $x \in R^n$, що задовольняє систему обмежень ЗЛП, називається <u>*допустимою множиною (допустимою областю)*</u> ЗЛП.

<u>Означення</u>. Будь-яка точка $x \in X$ допустимої множини ЗЛП називається <u>*допустимою точкою (допустимим розв'язком, планом*</u>).

Дослідимо властивості множини допустимих розв'язків ЗЛП.

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі. Система обмежень ЗЛП має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Будемо вважати, що $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$ інакше помножимо відповідне рівняння на –1.

Розглянемо n векторів, які назвемо векторами умов або векторами обмежень:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ а також вектор } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

У цих позначеннях систему (3.1) запишемо в векторній формі:

$$A_1x_1 + \ \ldots\ + A_nx_n = b. \qquad (3.2)$$

<u>Теорема 3.1.</u> Нехай множина M – опукла. Тоді опукла лінійна комбінація довільного числа точок цієї множини належить цій множині.

<u>Доведення</u>. Нехай $x_1, \ldots, x_r \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,r}$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Покажемо, що $x \in M$, де

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i. \qquad (3.3)$$

Доведення проведемо методом математичної індукції.

Для $r=1$ теорема очевидна. Для $r=2$ теорема вірна згідно з означенням опуклої множини. Нехай теорема вірна для $r=k$, тобто

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \in M\,, \tag{3.4}$$

покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \in M\,. \tag{3.5}$$

Можна вважати, що в (3.5) всі $\lambda_i \neq 0$ ($i=\overline{1,k+1}$), інакше теорема вірна за припущенням індукції.

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,$ то $\lambda_{k+1} = 1-\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1-\lambda > 0 \quad \left(\lambda = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$

Тоді $x = \lambda \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} x^i + \left(1-\lambda\right) x^{k+1}.$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} x^i \in M$, в силу (3.4), $x^{k+1} \in M$ з умови теореми, то, згідно з означенням опуклої множини, $x \in M$, що і треба було довести.

<u>Теорема 3.2</u>. Півпростір є опуклою множиною.

<u>Доведення</u>. Нехай x^1, x^2 – дві точки півпростору (2.12), тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^i \leq b\,, i=1,2\,. \tag{3.7}$$

Покажемо, що $x = \lambda x^1 + \left(1-\lambda\right) x^2$ належить півпростору (2.12). У силу (3.7) маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\lambda x_j^1 + \left(1-\lambda\right) x_j^2\right) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^1 + \left(1-\lambda\right) \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2 \leq$$

$$\leq \lambda b + \left(1-\lambda\right) b = b.$$

Теорему доведено.

<u>Наслідок</u>. Гіперплощина є опуклою множиною як переріз двох півпросторів.

Багатогранна область, у тому числі багатогранник, є опуклою множиною як переріз скінченого числа опуклих множин.

<u>Означення</u>. Точка $x \in X$, що мінімізує (максимізує) цільову функцію

$$\left(c,x\right)=cx=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\ , \qquad (3.6)$$

називається <u>*оптимальним розв'язком*</u> ЗЛП, або просто <u>*розв'язком*</u>, або <u>*оптимальним планом*</u>.

Доведемо, що розв'язком ЗЛП може бути крайня точка допустимої області. Не обмежуючи загальності розглянемо типовий для практичних задач випадок, коли допустима множина ЗЛП є багатогранником (його далі називаємо <u>*багатогранником розв'язків*</u>).

<u>**Означення**</u>. Кутові точки цього багатогранника (тобто точки, які не є опуклими комбінаціями інших точок багатогранника) називають <u>*вершинами.*</u> Множина вершин багатогранника *M* позначається *vert M*.

<u>**Теорема 3.3.**</u> Нехай допустима множина *D* ЗЛП є багатогранником, тоді функція цілі (3.6) досягає свого мінімуму в вершині області *D*. Якщо (3.6) досягає свого мінімуму не в одній точці, то вона досягає мінімуму в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.

<u>Доведення</u>. Нехай $vert\,D=\left\{x^1,...,x^p\right\}$, x^* – розв'язок ЗЛП (нехай це задача мінімізації), тобто $\forall x\in D\ cx^*\le cx$. Якщо $x\in vert\,D$, то першу частину теореми доведено. Якщо $x\notin vert\,D$, то x^* може бути представлена опуклою лінійною комбінацією його вершин, тобто

$$x^*=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x^i\text{, де }\lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,p},\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1.$$

У силу лінійності функції cx маємо:

$$cx^*=c\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x^i\right)=c_1\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_1^i\right)+...+c_n\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_n^i\right)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(cx^i\right)\ge$$

$$\ge\lambda_1\left(cx^i\right)+...+\lambda_n\left(cx^i\right)=\left(cx^i\right)\sum_{j=1}^{p}\lambda_j=cx^i,\ \forall i=\overline{1,p}.$$

Отже, з одного боку, $cx^*\ge cx^k$, де $k=\overline{1,p}$ $;cx^k=\min\limits_{1\le i\le p} cx^i$.

З іншого боку, оскільки x^* доставляє мінімум cx, то $cx^*\le cx^k$. Таким чином, маємо: $cx^*=cx^k$, тобто існує вершина x^k, у якій цільова функція набуває мінімального значення. Першу частину теореми доведено.

Доведемо другу частину теореми. Нехай cx набуває мінімального значення в точках $x^1, ..., x^s$, тобто $cx^i = z = cx^*$, $i = \overline{1,s}$.

Розглянемо деяку опуклу лінійну комбінацію цих точок:

$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i, \ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,s}, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1.$$

Тоді $cx = c\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \left(cx^i\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z^* = z^* \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = z^*$.

Отже цільова функція досягає свого мінімального значення в довільній точці X, що є опуклою лінійною комбінацією точок $x^1, ..., x^s$. Теорему доведено.

Таким чином, для того, щоб розв'язати ЗЛП, достатньо зробити перебір крайніх точок багатогранника розв'язків. При цьому виникає питання пошуку всіх крайніх точок допустимої множини ЗЛП і переходу від довільної вершини до іншої вершини.

Означення. Допустимий розв'язок x ($x \in X$, X – допустима множина) називається *базисним*, якщо система векторів умов, що відповідає його додатнім компонентам, лінійно незалежна.

Теорема 3.4. Допустимий розв'язок x є вершиною допустимої області X (багатогранника розв'язків) тоді і тільки тоді, коли він є базисним.

Доведення. *Достатність*. Нехай x базисний розв'язок. Без обмеження загальності, можна вважати, що ненульові компоненти x мають перші індекси, тобто

$$x = \left(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0\right), x_i > 0, i = \overline{1,k}. \tag{3.8}$$

Точка $x \in X$, тобто x задовольняє систему обмежень (3.2). Враховуючи (3.8), рівняння (3.2) переписується так:

$$A_1 x_1 + ... + A_k x_k = b. \tag{3.9}$$

Покажемо, що $x \in vert\, X$. Припустимо, що це не так, тобто $x \notin vert\, X$, тоді x може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації двох різних точок $x^1, x^2 \in X : x^1 \neq x^2$, тобто:

$$x = \lambda x^1 + \left(1 - \lambda\right) x^2, \text{ де } \lambda \in \left(0,1\right).$$

Оскільки $\lambda > 0,\ 1 - \lambda > 0,\ x^1, x^2$ повинні мати вигляд:

$$x^1 = \left(x_1^1, ..., x_k^1, 0, ..., 0\right),$$

$$x^2 = \left(x_1^2, ..., x_k^2, 0, ..., 0\right),$$

$x^1, x^2 \in X$, звідки, в силу (3.9)

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^i A_j = b, i = 1,2. \qquad (3.10)$$

Віднімаючи співвідношення (3.10) (перше від другого), маємо:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j^1 - x_j^2\right) A_j = 0. \qquad (3.11)$$

У силу лінійної незалежності $A_1, ..., A_k$, (3.11) може виконуватися лише у випадку $x_j^1 - x_j^2 = 0,\ j = \overline{1,k}$, тобто $x^1 = x^2$, а це суперечить припущенню, що $x^1 \neq x^2$. Отже, $x \in vert\, X$.

Необхідність. Нехай x має вигляд (3.8) і $x \in vert\, X$. Покажемо, що x – базисний розв'язок. Припускаємо супротивне, тобто вектори $A_1, ..., A_k$ не всі лінійно незалежні, а це означає, що $\exists \alpha_j, 1 \leq j \leq k: \sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_j\right| > 0$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_j = 0, \qquad (3.12)$$

$x \in X$, отже x задовольняє (3.2). Виходячи (3.2), (3.12), розглянемо при довільному $\varepsilon > 0$ такі вирази:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j + \varepsilon\alpha_j\right) A_j = b,\ \sum_{j=1}^{k} \left(x_j - \varepsilon\alpha_j\right) A_j = b.$$

Очевидно ε>0 можна підібрати таким чином, щоб точки

$$x^1 = \left(x_1 + \varepsilon\alpha_j, ..., x_k + \varepsilon\alpha_j, 0, ..., 0\right),\ x^2 = \left(x_1 - \varepsilon\alpha_j, ..., x_k - \varepsilon\alpha_j, 0, ..., 0\right)$$

мали невід'ємні координати, тобто були допустимими розв'язками ЗЛП ($x^1, x^2 \in X$). Тоді маємо: $x = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right),\ x^1 \neq x^2$, тобто $x \notin vert\, X$.

Отримане протиріччя доводить необхідність. Теорему доведено.

Таким чином, якщо додатнім компонентам деякого допустимого розв'язку відповідають лінійно незалежні вектори умов, то цей допустимий розв'язок є вершиною багатогранника розв'язків.

Виходячи з цієї теореми, можна було б запропонувати такий шлях розв'язування ЗЛП: обирається довільна лінійно незалежна система m векторів умов, координати x_j точки x, що не відповідають даним компонентам, покладаються рівними 0. Знаходиться розв'язок одержаної системи m рівнянь з m невідомими. Якщо він задовольняє умову невід'ємності координат, то x – вершина X. За знайденим розв'язком обчислюється і запам'ятовується значення cx. Потім обирається інша лінійно незалежна система векторів умов і так далі. Після перегляду всіх таких систем знаходимо оптимальний розв'язок як той, якому відповідає найменше з одержаних значень цільової функції.

Можна показати, що можливих комбінацій векторів умов всього

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

а це (при великих m і n) – дуже велика кількість. Ясно, що в запропонованому підході відсутній напрямлений перебір вершин, і реалізація його практично неможлива для великих m і n.

Приклад 3.6. Знайти розв'язок ЗЛП:

$$f = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to min;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Маємо 4 вектори умови, базисний розв'язок визначається двома векторами з цих чотирьох. Можливих таких комбінацій $C_4^2 = 6$. Необхідною умовою того, щоб базисний розв'язок визначався векторами A_i, A_j ($i \ne j$), є умова їх лінійної незалежності, так, наприклад, вектори A_1, A_2 лінійно незалежні (визначник $|A_1, A_2| = 5 \ne 0$), тобто вони можуть визначати базисний розв'язок ЗЛП. Для того, щоб перевірити, чи це справді так, треба виразити змінні x_3, x_4 через змінні x_1, x_2. Зробимо це в матричній формі за допомогою еквівалентних перетворень матриці, в результаті яких у перших двох стовпцях буде одинична матриця

$$(A|b)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & -2 & 0 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2\end{array}\right).$$

З даної матриці видно, що якщо взяти $x_3 = x_4 = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = 2$, тобто одержано $x^0 = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$ – базисний розв'язок ЗЛП. Запам'ятовуємо значення цільової функції в цій точці: $z^0 = 2 - 2 = 0.$

Решту базисних розв'язків одержуємо так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & \boxed{-\frac{4}{5}} & -\frac{1}{5} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-\frac{5}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{array}\right).$$

Допустимий розв'язок системи $x^1 = \left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{5}{4},\ 0\right)$, який відповідає базисним стовпцям A_2, A_3, проте, не є базисним розв'язком ЗЛП, тому що не задовольняє умову невід'ємності.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-\frac{5}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4}\\ \boxed{-\frac{1}{2}} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -5\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right).$$

Допустимий розв'язок системи $x^2 = (-3,\ 0,\ -5,\ 0)$, який відповідає базисним стовпцям A_1, A_3, також не є базисним, тому що не задовольняє умову невід'ємності

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -5\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right).$$

Допустимий розв'язок системи $x^3 = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{10}{3}\right)$, який відповідає базисним стовпцям A_1, A_4, також не є базисним, тому що не задовольняє умову невід'ємності.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 4 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Допустимий розв'язок системи $x^4 = (0,\ -1,\ 0,\ -5)$, який відповідає базисним стовпцям A_2, A_4, також не є базисним, тому що не задовольняє умову невід'ємності координат.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 4 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Допустимий розв'язок системи $x^5 = \left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -3\right)$, який відповідає базисним стовпцям A_3, A_4, також не є базисним, тому що не задовольняє умову невід'ємності координат.

Таким чином, у результаті перебору всіх можливих варіантів, знайдено лише один допустимий розв'язок, який є і оптимальним розв'язком.

<u>*Відповідь*</u>. $x^* = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$, $z^* = 0$.

Далі ми розглянемо напрямлений перебір суміжних вершин допустимої області, при якому здійснюється перехід від однієї вершини до іншої вершини, значення цільової функції в якій менше, ніж у попередній.

ТЕМА 4

Питання:

4.1 Аналітичний вступ у симплекс-метод

4.2 Перебір вершин методом виключення Жордана-Гаусса

4.3 Симплекс-метод. Критерій оптимальності

4.1. Аналітичний вступ у симплекс-метод

Оскільки, як показано раніше, розв'язок ЗЛП можна звести до перебору вершин (у тому числі і цілеспрямованого), то виникають питання:

а) як знайти початкову вершину?

б) як перейти від однієї вершини до іншої?

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі. Будемо казати, що система обмежень (2.9) записана в канонічній формі, якщо вектор правих частин складається з невід'ємних компонент, для кожного рівняння є змінна з коефіцієнтом 1 у цьому рівнянні і нулями у всіх інших рівняннях. Таку систему можна одержати методом виключення Жордана-Гаусса, а також так званим методом штучного базису, який буде розглянуто далі. Необхідною умовою застосування метода Жордана-Гаусса є лінійна незалежність стовпців, які елементарними перетвореннями приводяться до одиничних.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що одиничні стовпці мають індекси від 1 до m, і система додаткових обмежень записана у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \ldots + \alpha_{1j}x_j + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\\
&x_i + \alpha_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{ik}x_k + \ldots + \alpha_{ij}x_j + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i;\\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\\
&x_l + \alpha_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{lk}x_k + \ldots + \alpha_{lj}x_j + \ldots + \alpha_{ln}x_n = \beta_l;\\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\\
&x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mk}x_k + \ldots + \alpha_{mj}x_j + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

де $\beta_i \geq 0, i = \overline{1,m}$.

У матричній формі (4.1) має вигляд:

$$\alpha x = \beta, \tag{4.2}$$

де

$$\alpha = \left(E, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{\text{n}} \right), \tag{4.3}$$

E – одинична матриця, $\text{E} = \left(\alpha_1, \cdots, \ \alpha_m \right)$,

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \ldots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}, \ j = \overline{1,n} \ ; \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

У векторній формі (4.1) має вигляд:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b. \tag{4.5}$$

<u>Означення</u>. Змінні $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ у системі (4.1) називаються <u>*базисними*</u>, інші – <u>*небазисними*</u>.

Система (4.1) дає можливість легко знайти початкову вершину. Дійсно, точка $x^0 = \left(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0 \right) \in vert\, X$, тому що вектори умов, які відповідають його ненульовим компонентам $\beta_1, \ldots, \beta_m$, утворюють одиничну матрицю, тобто є лінійно незалежними.

Від задачі мінімізації

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

при умовах (2.9), (2.10) легко перейти до еквівалентної задачі з системою (4.1), ввівши <u>*штучні*</u> змінні. В кожне i-е рівняння ($i = \overline{1,m}$) вводиться змінна x_{n+1}, а для того, щоб в оптимальному розв'язку ці змінні були нульовими, одночасно вони вводяться у цільову функцію з великим коефіцієнтом M. Цей засіб одержав назву <u>*М-методу*</u> (або <u>*методу штучного базису*</u>).

Перед безпосереднім викладенням симплекс-методу в загальному вигляді продемонструємо його ідею на конкретному прикладі розв'язання задачі лінійного програмування.

<u>Приклад 4.1</u> (задача складання плану виробництва). Нехай на виготовлення двох видів продукції B_1, B_2 потрібно 4 види сировини A_1, A_2, A_3, A_4, кількість якої обмежена. Дані про прибуток від реалізації одиниці продукції, кількість сировини і потреби її на виробництво наведені в табл. 4.1. Скласти план виробництва продукції, при якому прибуток підприємства був би максимальним.

Таблиця 4.1

Сировина	Запаси сировини	Витрати на одиницю продукції	
		A_1	A_2
A_1	19	2	3
A_2	13	2	1
A_3	15	0	3
A_4	18	3	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції		7	5

Введемо змінні: x_i – кількість виготовленої продукції виду B_i $(i = 1,2)$.

Математична модель даної задачі:

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19; \\ 2x_1 + x_2 \le 13; \\ 3x_2 \le 15; \\ 3x_1 \le 18; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Перейдемо до її канонічної форми:

$$7x_1 + 5x_2 \to max \; ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13; \\ 3x_2 + x_5 = 15; \\ 3x_1 + x_6 = 18; \\ x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,6}\right). \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2; \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2; \\ x_5 = 15 - 3x_2; \\ x_6 = 18 - 3x_1; \\ x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

За умовою всі змінні невід'ємні, тобто найменше значення, яке можуть набувати x_1, x_2, - це 0 ($x_1 = 0, x_2 = 0$). При цьому решта змінних набувають значення $x_3 = 19, x_4 = 13, x_5 = 15, x_6 = 18$, які також є допустимими, тобто вектор $x^0 = (0,0,19,13,15,18)$ – допустимий розв'язок задачі, а значення цільової функції $F_0 = F(x_1, x_2)\big|_{x^0} = 7x_1 + 5x_2\big|_{x^0} = 0$.

У даному випадку змінні x_3, x_4, x_5, x_6 – базисні, x_1, x_2 – небазисні.

Обидві небазисні змінні входять у склад $F(x_1, x_2)$ із додатнім знаком, тобто збільшення будь-якої з них призведе до збільшення цільової функції. Проте, збільшувати їх необмежено не має можливості, оскільки вони входять до системи обмежень із від'ємними знаками, і базисні змінні можуть стати від'ємними, що недопустимо. Залишимо $x_1 = 0$, а будемо збільшувати змінну x_2.

Із третього рівняння видно, що $x_2 \le 5$, інакше x_5 стає від'ємною. Візьмемо $x_2 = 5$, при цьому $x_5 = 0$, решта змінних невід'ємні ($x_3 = 4, x_4 = 8, x_6 = 18$), тобто знову отримали допустимий розв'язок $x^1 = (0,5,4,8,0,18)$.

Значення цільової функції в точці x^1 більше за F_0: $F_1 = F(x_1, x_2)\big|_{x^1} = 25$.

У новому плані нульові значення набувають вже змінні x_1, x_5, вони є небазисними. Виразимо решту змінних (базисних) через x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 = 5 - \dfrac{1}{3}x_5; \\ x_3 = 4 - 2x_1 + x_5; \\ x_4 = 8 - 2x_1 + \dfrac{1}{3}x_5; \\ x_6 = 18 - 3x_1; \\ x_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

Отримаємо:

$$F\left(x_1,x_5\right)=25+7x_1-\frac{5}{3}x_5.$$

З вигляду цільової функції через небазисні змінні видно, що збільшення x_5 призведе до зменшення цільової функції, тому фіксуємо $x_5=0$ і збільшуємо, доки є можливість, змінну x_1. Так, з другого рівняння маємо: $x_1 \le 2$; із третього рівняння - $x_1 \le 4$, тобто разом $x_1 \le 2$. Якщо взяти $x_1=2$, то змінна x_3 стає нулем. Такий вибір змінної x_2 залишає решту змінних невід'ємними, тобто знову дає допустимий розв'язок ЗЛП:

$$x^2=\left(2,5,0,4,0,12\right);\ F_2=F\left(x_1,x_5\right)\Big|_{x^2}=39.$$

Обравши тепер небазисними змінні x_3,x_5, одержуємо:

$$F\left(x_3,x_5\right)=39-\frac{7}{2}x_3+\frac{11}{6}x_5\ ;$$

$$\begin{cases} x_1=2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5; \\ x_2=5-\frac{1}{3}x_5; \\ x_4=4+x_3-\frac{2}{3}x_5; \\ x_6=12+\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{2}x_5; \\ x_i \ge 0\ \left(i=\overline{1,6}\right). \end{cases}$$

З вигляду цільової функції видно, що тепер треба залишити $x_3=0$ і збільшувати x_5. З першого рівняння видно, що x_5 можна збільшувати необмежено, з решти трьох рівнянь маємо: $x_5 \le 6$, і якщо взяти $x_5=6$, то змінна x_4 перетворюється на 0. Новий допустимий план ЗЛП:

$$x^3=\left(5,3,0,0,6,3\right),\ F_3=F\left(x_3,x_5\right)\Big|_{x^3}=50.$$

Нарешті, обравши змінні x_3,x_4 за небазисні, отримуємо такий вираз цільової функції через небазисні змінні:

$$F\left(x_3, x_4\right) = 50 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4 .$$

Бачимо, що подальше збільшення значення F можливо тільки за рахунок зменшення x_3, x_4, які вже набувають найменшого з можливих значення. Таким чином, задачу розв'язано, а її розв'язок $x^* = x^3$, $F^* = 50$.

Вихідна задача містить лише змінні x_1, x_2, тому розв'язок її $x^{**} = (5,\ 3)$, $F^{**} = 50$.

<u>*Висновок*</u>. На даному прикладі продемонстровані головні моменти симплекс-методу, а саме перехід до нового допустимого плану, а також заміна в наборі небазисних змінних однієї змінної іншою з множини базисних, що еквівалентно вибору в методі Жордана-Гаусса рівняння і змінної; перехід до нових базисних змінних.

На цьому ж прикладі видно, що певну складність являє собою перехід від одного набору базисних змінних до іншого. Можна лише уявити собі, наскільки він є складнішим для задач великої вимірності. Тому очевидна доцільність переходу від системи рівнянь до таблиць (так званих <u>*симплекс-таблиць*</u>), що скорочують обчислення. В них, наприклад, немає необхідності переносити базисні змінні в одну частину системи, а небазисні – в іншу.

Узагальненням цих ідей є метод розв'язування ЗЛП, який отримав <u>назву *"симплекс-метод"*.</u>

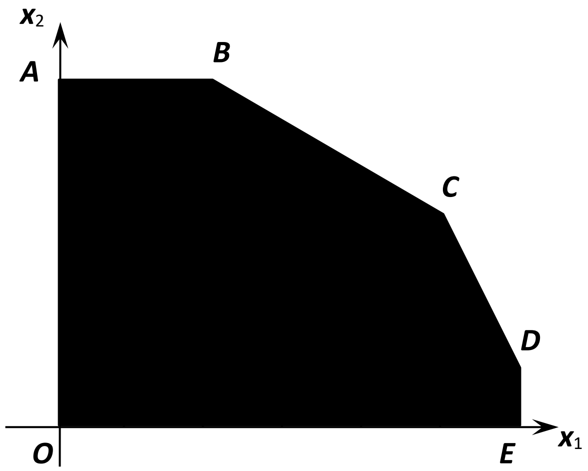


Рис. 4.1. ОДР для прикладу 4.1.

Дана задача легко розв'язується геометрично. Побудуємо область допустимих розв'язків (рис. 4.1), яка являє собою багатокутник. Дамо геометричну інтерпретацію послідовності планів, яку ми одержували в ході пошуку x^*. Пошук починався з точки x^0, якій на площині Ox_1x_2 відповідає точка $O(0,\ 0)$, далі було одержано план x^1, якому відповідає точка $A(5,\ 0)$ на площині Ox_1x_2. Вона, як видно з рисунка, є вершиною багатокутника розв'язків, суміжною з вершиною O. Далі було одержано іншу суміжну до A вершину – точку $B(2,\ 5)$ і, нарешті, вершину $C(5,\ 3)$, суміжну з B.

З даного рисунку видно, що коли б на першому кроці за небазисну змінну взяти x_2 замість x_1, то у ході розв'язування задачі було одержано таку послідовність точок: O, E, D, C.

4.2. Перебір вершин методом виключення Жордана-Гаусса

Розглянемо перехід від однієї вершини до іншої методом виключення Жордана-Гаусса. Цей перехід полягає в виключенні з усіх рівнянь, крім l-го, змінної x_k шляхом множення l-го рівняння на $\dfrac{\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}$ і віднімання отриманого рівняння від i-го рівняння, $i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, m$.

Помноживши l-е рівняння на $\dfrac{1}{\alpha_{lk}}$, ми знову одержимо систему вигляду (4.1), що відрізняється від (4.1) тим, що в l-му рівнянні з коефіцієнтом 1 буде вже не x_l, а x_k. Нова система має вигляд:

$$\begin{gathered}
x_1 + \alpha'_{1l} x_l + \dots + \alpha'_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha'_{1k} x_k + \dots + \alpha'_{1j} x_j + \dots + \alpha'_{1n} x_n = \beta'_1; \\
\cdots \\
x_i + \alpha'_{il} x_l + \dots + \alpha'_{im+1} x_{m+1} + \dots + \alpha'_{ik} x_k + \dots + \alpha'_{ij} x_j + \dots + \alpha'_{in} x_n = \beta'_i; \\
\cdots \\
x_l + \alpha'_{ll} x_l + \dots + \alpha'_{l,m+1} x_{m+l} + \dots + \alpha'_{lk} x_k + \dots + \alpha'_{lj} x_j + \dots + \alpha'_{ln} x_n = \beta'_l; \\
\cdots \\
x_m + \alpha'_{ml} x_l + \dots + \alpha'_{m,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha'_{mk} x_k + \dots + \alpha'_{mj} x_j + \dots + \alpha'_{mn} x_n = \beta'_m,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

де

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{\alpha_{lk}},\ i = l; \\[2ex] \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik},\ i \ne l; \end{cases} \qquad \beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{lk}},\ i = l; \\[2ex] \beta_i - \dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik},\ i \ne l. \end{cases} \tag{4.7}$$

Для того, щоб нова система (4.6) визначала вершину багатогранника розв'язків, її праві частини повинні бути невід'ємні. Тому потрібно обирати такий рядок l і стовпець k, щоб виконувались умови:

$$1)\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \geq 0\ ;\ 2)\ \beta_i - \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} \geq 0. \qquad (4.8)$$

Якщо обрати змінну x_k , для якої хоча б одна компонента відповідного їй вектору умов додатна ($\alpha_{lk} > 0$), то перша умова з (4.8) буде, очевидно, виконана. Також повинна виконуватися друга умова з (4.8).

Якщо $\alpha_{ik} < 0$, то умова 2) виконана, оскільки $\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik} < 0$.

Якщо ж $\alpha_{ik} > 0$, то l потрібно вибрати так, щоб $\beta_i \geq \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik}$.

Таким чином, умова для вибору l:

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} = \theta. \qquad (4.9)$$

Одержаний результат можна сформулювати у формі правила: виходячи з системи (4.1), яка визначає деяку вершину багатогранника розв'язків, для одержання нової вершини потрібно взяти небазисну змінну x_k , якій відповідає вектор умов хоча б з однією додатною компонентою, обрати l-е рівняння з умови (4.9); виключити змінну x_k з усіх рівнянь, окрім l-го.

У результаті одержуємо нову систему вигляду (4.1), яка визначає нову вершину допустимої області.

Таким чином, ми отримали відповідь на питання про пошук початкової вершини і про перехід до суміжної вершини.

Залишилось організувати напрямлений пошук екстремуму, тобто треба відповісти на питання, чи не можна вибрати таку суміжну вершину, значення цільової функції в якій було б менше, ніж у точці $x^0 = (\beta_1, ...,\beta_m, 0, ..., 0)$.

У початковій вершині x^0 значення функції цілі дорівнює:

$$cx^0 = \sum_{j=1}^{m} c_j\beta_j .$$

Нова вершина має координати:

$$x' = \left(\beta_1 - \theta\alpha_{1k}, \ldots, \beta_{l-1} - \theta\alpha_{l-1,k}, \beta_l - \theta\alpha_{lk},\right.$$

$$\left.\beta_{l+1} - \theta\alpha_{l+1,k}, \ldots, \beta_m - \theta\alpha_{mk}, 0, \ldots, 0, \theta, 0, \ldots, 0\right) =$$

$$= \left(\beta_1 - \theta\alpha_{1k}, \ldots, \beta_{l-1} - \theta\alpha_{l-1,k}, 0, \beta_{l+1} - \theta\alpha_{l+1,k}, \ldots, \beta_m - \theta\alpha_{mk},\right.$$

$$\left.0, \ldots, 0, \theta, 0, \ldots, 0, \beta_{l+1} - \theta\alpha_{l+1,k}, \ldots, \beta_m - \theta\alpha_{mk}, 0, \ldots, 0, \theta, 0, \ldots, 0\right).$$

Відзначимо, що, оскільки $\beta_l - \theta\alpha_{lk} = 0$, величина θ розташована на k-ій позиції вектору x'.

Обчислимо значення функції цілі в x':

$$cx' = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\beta_j - \theta\alpha_{jk}\right) + \theta c_k = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j - \theta \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{jk} + \theta c_k =$$

$$= cx^0 + \theta\left(c_k - z_k\right),$$

де

$$z_k = \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{jk}. \qquad (4.10)$$

Як видно, якщо вибрати x_k, для якого $c_k - z_k < 0$, то значення cx у новій вершині буде менше, ніж у вихідній.

Якщо ввести позначення:

$$\Delta_j = c_j - z_j, \; j = \overline{1,n}, \qquad (4.11)$$

де z_j обчислюється за (4.10), то умова для вибору x_k набуває вигляд: $\Delta_k < 0$.

<u>Означення</u>. Величини Δ_j ($j = \overline{1,n}$), які обчислюються за (4.11), називаються *<u>відносними оцінками</u>*.

<u>Зауваження</u>. При виборі k для цілеспрямованого переходу в напрямку оптимального розв’язку достатньо виконання вищенаведеної умови: $\Delta_k < 0$, але на практиці користуються правилом, яке в середньому дає результат за меншу кількість кроків, ніж вибір k за номером першого стовпця з від’ємною оцінкою, а саме: k-й стовпець таблиці – це стовпець із мінімальною від’ємною відносною оцінкою, якщо таких стовпців декілька, то обирають довільний із них, наприклад, перший за номером, тобто:

$$k: \; \Delta_k = \min_{j=\overline{1,n}} \Delta_j. \qquad (4.12)$$

Таким чином, ми розглянули всі питання, необхідні для викладення симплекс-методу – одного з центральних методів лінійного програмування.

4.3. Симплекс-метод. Критерій оптимальності

Даний метод застосовується для розв'язування ЗЛП у канонічній формі з системою обмежень, записаною у формі (4.1). У цьому випадку автоматично знаходиться початкова допустима вершина, а потім за описаною схемою здійснюється напрямлений перебір вершин.

З цією метою для кожної з небазисних змінних підраховуються відносні оцінки. Обирається змінна x_k, для якої $\Delta_k < 0$ (див. (4.12)), і, крім того, вектор умов A_k має хоча б одну додатну компоненту. Для кожного i-го рівняння, для якого $\alpha_{ik} > 0$, обчислюється $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$, і обирається те з них, де це співвідношення мінімальне (див. (4.9)).

Потім за методом Жордана-Гаусса виключається змінна x_k із усіх рівнянь, окрім l-го. В результаті приходимо до нової системи вигляду (4.1), з якої визначається нова вершина, при переході до якої значення функції цілі зменшується.

Для нової вершини здійснюється аналогічний цикл, який називається *ітерацією симплекс-методу*.

Цей процес продовжується до тих пір, поки відносні оцінки небазисних змінних не стануть невід'ємними. Покажемо, що в даному випадку ЗЛП розв'язано.

Теорема 4.1 (критерій оптимальності). Якщо для деякого базисного розв'язку $x \in X$ справедливі нерівності:

$$\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.13}$$

то x – розв'язок ЗЛП.

Доведення. Нехай система обмежень ЗЛП у матричному запису:

$$Ax = b,$$

де $A = (A_1, \ldots, A_n)$, A_i – вектори обмежень.

Матричний запис системи обмежень ЗЛП після переходу до форми (4.1) позначимо так:

$$\alpha x = \beta ,$$

де

$$\alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n\right) \; = \; \left(E, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n\right),$$

$$\left(\alpha_1, ..., \alpha_m\right) = E ,$$

$$\alpha_j = (\alpha_{1j}, ..., \alpha_{mj})^T, \; j = \overline{1,n}.$$

Введемо для цільової функції позначення: $f\left(x\right) = cx$.

Розглянемо $y \in R^n$ – деякий допустимий розв'язок ЗЛП ($y \in X$, X – допустима область), тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j A_j = b , \tag{4.14}$$

значення цільової функції в точці $y -$ $f\left(y\right)$.

Покажемо, що якщо виконана умова (4.13), то

$$f\left(x\right) \le f\left(y\right).$$

$$f\left(y\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \ge \sum_{k=1}^{n} z_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{jk} \right) y_k = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} y_k \right) c_j . \tag{4.15}$$

Покажемо, що

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} y_j , \; k = \overline{1,m}. \tag{4.16}$$

Введемо позначення: $B = \left(A_1, ..., A_m\right)$ (матриця B називається <u>*базисом*</u>), тоді $A = \left(B, A_{m+1}, ..., A_n\right)$.

Перетворення, які приводять до того, що $\left(\alpha_1, ..., \alpha_m\right) = E$, у матричній формі можна записати:

$$\alpha = B^{-1} A \text{ або } \alpha_j = B^{-1} A_j , \; j = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$A_j = B \alpha_j , \; j = \overline{1,n},$$

або інакше:

$$A_j = \alpha_{1j} A_1 + ... + \alpha_{mj} A_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} A_k .$$

Підставляючи дане співвідношення у (4.16), маємо:

$$b=\sum_{j=1}^{n} y_j A_j=\sum_{j=1}^{n} y_j\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{kj}A_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}y_j\right)A_k .$$

Оскільки $x\in X$, тобто $b=\sum_{k=1}^{n} x_k A_k=\sum_{k=1}^{m} x_k A_k$, причому система векторів $\{A_1,...,A_m\}$ – лінійно незалежна.

Віднімаючи два останні рівняння одне від одного, одержуємо:

$$0=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}y_j-x_k\right)A_k .$$

Ця рівність виконується, якщо $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}y_j=x_k,\, k=\overline{1,m}$, тобто умова (4.16) виконана. Таким чином, із урахуванням (4.16), з (4.15) маємо: $f(y)\ge\sum_{k=1}^{m} x_k A_k=f(x)$, що і треба було довести.

Ознаку необмеженості цільової функції на допустимій множині встановлює наступна теорема.

<u>Теорема 4.2</u>. Якщо для деякого базисного розв'язку існує хоча б одна небазисна змінна x_k , для якої $\Delta_k<0$ і $\alpha_{ik}\le 0$ ($i=\overline{1,m}$), то функція цілі ЗЛП не обмежена знизу на допустимій множині.

<u>Доведення</u>. Нехай $x=(x_1,...,x_m,0,...,0)$ – базисний розв'язок, а x_k – небазисна змінна, що задовольняє умови теореми. Покажемо, що вектор:

$$x'=\begin{pmatrix}\beta_1-\theta\alpha_{1k},...,\beta_{l-1}-\theta\alpha_{l-1,k},0,\beta_{l+1}-\theta\alpha_{l+1k},...,\\ \beta_m-\theta\alpha_{mk},0,...,0,\theta,0,...,0\end{pmatrix},$$

де $x_k=\theta$, для довільного $\theta>0$ є допустимим розв'язком ЗЛП.

Дійсно, компоненти вектору x' невід'ємні. Крім того, x' є допустимим розв'язком ЗЛП, оскільки на основі рівності (4.16) маємо:

$$cx'=\sum_{j=1}^{m} c_j\left(x_j-\theta\alpha_{jk}\right)+\theta c_k=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j+\theta\left(c_k-\sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_{jk}\right)=b.$$

Знайдемо значення функції цілі в точці x':

$$cx'=\sum_{j=1}^{m} c_j\left(x'_j-\theta\alpha_{jk}\right)+\theta c_k=\sum_{j=1}^{m} c_j x'_j+\theta\left(c_k-z_k\right)=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j+\theta\Delta_k .$$

Оскільки з умови $\Delta_k < 0$, то, взявши досить велике додатне число θ, значення cx' можна зробити як завгодно малим, що і доводить теорему.

Зауваження. Якщо після деякої ітерації $\theta = 0$, то в процесі перебору вершин за симплекс-методом деякі вершини можуть повторюватись, і не виключено, що може бути одержана послідовність базисних розв'язків (вершин), які будуть періодично повторюватись, і таких, які не є розв'язками ЗЛП.

Це явище називається *зациклюванням*. Такі випадки практично зустрічаються рідко. Але існують спеціальні приклади, на яких зациклювання відбувається.

Розроблені спеціальні методи усувати його. Так, правило Бленда (антицикличное правило Бленда, алгоритм Бленда) - це алгоритмічне уточнення симплекс-методу. Воно використовується в ході ітераційного процесу симплекс-методу для визначення, який стовпець вводиться в базис і який рядок виводиться з базису. Так, для лінійної задачі мінімізації, алгоритм правила Бленда полягає у наступному:

а) обирається небазисний стовпець з найменшим індексом з відємною відносною оцінкою;

б) серед усіх рядків вибираємо за напрямний той, для якої досягається мінімум відношення елемента стовпця b_b до відповідного коефіцієнта матриці обмежень за умови, що цей коефіцієнт більше нуля. Якщо цей мінімум досягається на декількох рядках, вибираємо за напрямний рядок з найменшим індексом.

ТЕМА 5

Питання:

5.1 Практична реалізація симплекс-методу

5.1. Практична реалізація симплекс-методу

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійної задачі максимізації (2.8)-(2.10), система обмежень якої записана у вигляді (4.1), і перші m векторів стовпців складають одиничну матрицю:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}.$$

Матриця обмежень:

$$A = \left(A_1, ..., A_m, A_{m+1},\ ...,\ A_n\right) = \left(E,\ A_{m+1},\ ..., A_n\right).$$

Оскільки $\left\{A_1, ..., A_m\right\}$ – система лінійно незалежних векторів, то ці вектори утворюють базис m-вимірного простору, і, згідно з теоремою 3.4, точка $x^0 = \left(b_1,\ ...,\ b_m, 0,\ ...,\ 0\right)$ – вершина допустимої області.

Доведені для задачі мінімізації теореми 4.1, 4.2 справедливі і для цього випадку, якщо, з урахуванням (2.11), відносними оцінками називати величини,

$$\Delta_j = z_j - c_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Теорема 4.2 про необмеженість цільової функції на допустимій області в цьому випадку сформулюється так.

<u>Теорема 5.1</u>. Якщо для деякого базисного розв'язку існує хоча б одна небазисна змінна x_k, для якої $\Delta_k < 0$ і $\alpha_{ik} \leq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, то функція цілі ЗЛП не обмежена зверху на допустимій множині.

Дослідження базисного розв'язку на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес доцільно вести, якщо умови задачі і дані, одержані після визначення вихідного базисного розв'язку, записати так, як показано в табл. 5.1.

В стовпці x_b записуються базисні змінні $x_b = (x_1, \ldots, x_m)$ (у загальному випадку з довільними індексами базисних змінних $x_b = \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\right)$, якщо $\left(A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\right) = E$).

У стовпці c_b записують коефіцієнти цільової функції при базисних змінних $c_b = (c_1, \ldots, c_m)$ (у загальному випадку $c_b = \left(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}\right)$).

У стовпці b_b записують додатні компоненти вихідного базисного розв'язку $b_b = \left(b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}\right)$. У цьому ж стовпці в результаті обчислень одержують додатні компоненти оптимального розв'язку.

Стовпці A_j ($j = \overline{1,n}$) містять коефіцієнти розкладання цих векторів за векторами базису $\left\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\right\}$. Табл. 5.1 має *m+1* рядок. Перші m рядків визначаються вихідними даними задачі, а елементи (m+1)-го рядка обчислюються. В цьому рядку в стовпці вектору b_b записують значення цільової функції z^0, яке вона набуває у даному базисному розв'язку, а в стовпцях $A_1, \ldots, A_n$ стоять відносні оцінки Δ_j, $j = \overline{1,n}$.

При цьому треба зауважити, що відносні оцінки, що відповідають базисним змінним, можна не обчислювати (вони дорівнюють 0). Для небазисних змінних значення z_j знаходяться як скалярний добуток вектору A_j на вектор c_b мінус c_j.

Значення z^0 – це скалярний добуток вектору c_b і b_b.

Таблиця 5.1

i	x_b	c_b	b_b	c_1	c_2	...	c_l	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_k	...	A_n
1	x_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	$a_{1(m+1)}$	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	x_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	$a_{2(m+1)}$	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
l	x_l	c_l	b_l	0	0	...	1	...	0	$a_{l(m+1)}$	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_m	c_m	b_m	0	0	...	0	...	1	$a_{m(m+1)}$	...	a_{mk}	...	a_{mn}
m+1				0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

Після заповнення табл. 5.1 вихідний базисний розв'язок перевіряють на оптимальність. З цією метою передивляються елементи *m+1*-го рядка. При цьому можуть статися три випадки:

1) відносні оцінки при небазисних змінних невід'ємні: $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{m+1,n}$, решта відносних оцінок нульові, тобто в цілому маємо: $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$;

2) $\exists\, j : \Delta_j < 0$, і всі відповідні цьому індексу величини $\alpha_{ij} \leq 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$;

3) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів *j*, і для кожного такого *j* існує хоч одне $i_j : \alpha_{ij} > 0$.

У першому випадку на основі критерію оптимальності базисний розв'язок є оптимальним.

У другому випадку цільова функція не обмежена зверху на допустимій множині згідно з теоремою 5.1.

У третьому випадку можна перейти від початкового базисного розв'язку до нового, в результаті чого значення цільової функції збільшиться. Цей перехід реалізується виключенням із вихідного базису одного з векторів і включенням до нього нового вектору. Як вектор A_j, що вводиться до базису, можна взяти будь-який вектор із від'ємною відносною оцінкою ($\Delta_j < 0$).

Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$, і вирішено до базисних ввести змінну x_k . Для визначення вектору, що підлягає виключенню з базису, знаходять величину θ, згідно з (4.9), і індекс *l*, при якому значення θ

досягається. Тоді з базису виключається вектор A_l, а з базисних змінних змінна x_l.

<u>Означення</u>. Число a_{lk} називається <u>*розв'язувальним*</u> елементом. Стовпець і рядок, на перетині яких знаходиться розв'язувальний елемент, називають <u>*напрямними (розв'язувальними)*</u>.

Після знаходження напрямних рядка і стовпця знаходять новий базисний розв'язок і коефіцієнти розкладання векторів $A_j \left(j = \overline{1,n} \right)$ через вектори нового базису. Додатні компоненти нового базисного розв'язку, коефіцієнти розкладання векторів стовпців за векторами нового базису знаходяться згідно формули (4.7). Елементи (*m+1*)-го рядка цієї таблиці обчислюються або за означенням, або за такими формулами:

$$z' = z^0 - \frac{b_l}{a_{lk}} \Delta_k, \tag{5.2}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \Delta_k. \tag{5.3}$$

Наявність двох способів обчислення елементів (*m+1*)-го рядка дозволяє вести контроль за правильністю обчислень.

З формули (5.2) випливає, що при переході від одного базисного розв'язку до іншого найкраще було б ввести A_j, що має індекс *j*, при якому максимальним за абсолютною величиною є число $\frac{b_l}{a_{lj}} \Delta_j \left(\Delta_j < 0, a_{lj} > 0 \right)$.

Але з метою спрощення обчислювального процесу в подальшому вектор, що вводиться в базис, будемо визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини від'ємних оцінок Δ_j. Якщо цих чисел декілька, то в базис будемо вводити вектор, що має такий же індекс, як і максимальне з чисел c_j, що визначається *j,* $\Delta_j < 0$.

Таким чином, перехід від одного базисного розв'язку до іншого означає перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої (див. табл. 5.2):

Таблиця 5.2

i	x_b	c_b	b_b	c_1	c_2	...	c_l	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_k	...	A_n
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	...	a'_{1l}	...	0	$a'_{1(m+1)}$	...	0	...	a'_{1n}
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	...	a'_{2l}	...	0	$a'_{2(m+1)}$	...	0	...	a'_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	...	a'_{ll}	...	0	$a'_{l(m+1)}$	...	1	...	a'_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	...	a'_{ml}	...	1	$a'_{m(m+1)}$	...	0	...	a'_{mn}
m+1				0	0	...	Δ_l	...	0	$\Delta э_{m+1}$	...	0	...	Δ'_n

Позначення в таблиці 5.2: відносні оцінки – це $\Delta'_j = z'_j - c_j$ (для небазисних змінних), z' - значення cx у новому базисному розв'язку x'.

Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислювати як за допомогою рекурентних формул (4.7), так і за наступними правилами, що безпосередньо випливають з них:

1) У стовпцях векторів, що входять в базис, на перетині стовпців і рядків із однаковими індексами проставляють одиниці, решта елементів цих стовпців нулі.

2) Елементи векторів $b_b, A_j \left(j = \overline{1,n} \right)$ у рядку нової симплекс-таблиці, в якій записаний вектор, що вводиться до базису, одержують із елементів цього ж рядка вихідної таблиці, діленням їх на величину розв'язувального елементу. В стовпці c_b у l-му рядку проставляється коефіцієнт c_k, де k – індекс вектору, що вводиться до базису.

3) Решта елементів векторів b_b, $A_j \left(j = \overline{1,n} \right)$ нової симплекс-таблиці обчислюються за *<u>правилом трикутника</u>*, яке полягає у наступному.

Для обчислення цих елементів симплекс-таблиці знаходять три числа:

1) число, що стоїть у вихідній таблиці на місці шуканого елемента нової таблиці;

2) число, що стоїть у вихідній таблиці на перетині рядка, в якому стоїть шуканий елемент нової таблиці і стовпця, що відповідає вектору, який вводиться в базис;

3) число, що стоїть у новій симплекс-таблиці на перетині стовпця, в якому стоїть шуканий елемент, і вектору-рядка, що вводиться в базис (а цей рядок одержується з відповідного рядка вихідної таблиці діленням його елементів на розв'язувальний елемент).

Ці три числа утворюють трикутник, дві вершини якого відповідають числам, що розташовані у вихідній симплекс-таблиці, а третя – числу у новій таблиці. Шуканий елемент – це різниця числа, що перераховується, і добутку решти двох.

4) Продивляються елементи $(m+1)$-го рядка нової симплекс-таблиці і шукають від'ємні відносні оцінки. Якщо таких немає, то ЗЛП розв'язано, інакше повторюють наведену процедуру до одержання оптимального розв'язку або встановлення необмеженості цільової функції.

<u>Приклад 5.2.</u> Розв'язати ЗЛП:

$$z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \to max$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \le 8, \\ x_j \ge 0\left(j = \overline{1,5} \right). \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду. З цією метою додаємо по одній невід'ємній змінній до кожної нерівності системи. Отримуємо задачу:

$$z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_6 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_7 = 8, \\ x_j \ge 0\left(j = \overline{1,7} \right). \end{cases}$$

Матриця системи обмежень і вектор вільних членів мають вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Множина векторів умов:

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_3=A_7=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

містить два одиничних базисів, що дозволяє записати початковий базисний розв'язок. Так, одиничну матрицю утворюють вектори A_5, A_6, A_3 і A_5, A_6, A_7 ($E=\left(A_5, A_6, A_3\right)$, $E=\left(A_5, A_6, A_7\right)$). Якщо за базисні змінні обрати x_5, x_6, x_3, а решту змінних – за небазисні, то, прирівнюючи небазисні змінні до нуля, одержуємо початковий базисний розв'язок $x^0=\left(0,0,8,0,10,9,0\right)$, значення цільової функції $z^0= -44$.

Вектор цільової функції $c=\left(1,2,-3,1,-2,0,0\right)$ має такі компоненти при базисних змінних $c_b=\left(-2,0,\ -3\right)$.

Обчислимо елементи $(m+1)$-го рядка: для задачі максимізації відносні оцінки небазисних змінних обчислимо за формулою (5.1):

$$\Delta_i = z_i - c_i = c_b A_i - c_i,\ i=1,2,4.$$

У результаті маємо:

$$\Delta_1=\left(2\cdot(-2)-1\cdot 0+2(-3)\right)-1=-11\ ;$$

$$\Delta_2=\left(3\cdot(-2)+2\cdot 0-1\cdot(-3)\right)-2=-5\ ;$$

$$\Delta_4=\left(-1\cdot(-2)+2\cdot 0+3\cdot(-3)\right)-1=-8;$$

$$\Delta_7=\left(0\cdot(-2)+0\cdot 0+1\cdot(-3)\right)-0=-3.$$

Знайдене вище значення z^0 можна одержати по аналогії з відносними оцінками:

$$z^0=c_b\cdot b_b=-2\cdot 10+0\cdot(-2)-3\cdot 8=-44.$$

Складаємо послідовність симплекс-таблиць (вектор $b_b=b$) (див. табл. 5.3):

Таблиця 5.3

i	x_b	c_b	b_b	1	2	-3	1	-2	0	0	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$a_{ik}>0$
1	x_5	-2	10	2	3	0	-1	1	0	0	5
2	x_6	0	9	-1	'2	0	'2	0	1	0	-9
3	x_3	-3	8	2	-1	1	3	0	0	1	4
4			-44	-11	-5	'0	-8	0	0	-3	
1	x_5	-2	2	0	4	-1	-4	1	0	-1	0,50
2	x_6	0	13	0	3/2	1/2	7/2	0	1	1/2	8,67
3	x_1	1	4	1	-1/2	1/2	3/2	0	0	1/2	
4			0	0	-21/2	11/2	17/2	0	0	5/2	
1	x_2	2	1/2	0	1	-1/4	-1	1/4	0	-1/4	
2	x_6	0	49/4	0	0	7/8	5	-3/8	1	7/8	2,45
3	x_1	1	17/4	1	0	3/8	1	1/8	0	3/8	4,25
4			21/4	0	0	23/8	-2	21/8	0	-1/8	
1	x2	2	59/20	0	1	-3/40	0	7/40	1/5	-3/40	
2	x4	1	49/20	0	0	7/40	1	-3/40	1/5	7/40	
3	x1	1	9/5	1	0	1/5	0	1/5	-1/5	1/5	
4			203/20	0	0	129/40	0	99/40	2/5	9/40	

Розглянемо перехід від першої симплекс-таблиці до другої. Напрямний стовпець визначається найбільшим за модулем від'ємним елементом (*m+1*)-го рядка (таких елементів у нас два): $max\{11,8,5\} = 11 = |\Delta_1|$, тому $k = 1$. Номер напрямного рядка визначається найменшим відношенням елементів стовпця b_b до відповідних додатних компонент стовпця A_1. Для відображення цих відношень сформуємо додатковий останній стовпець симплекс-таблиці: $min\{5,4\} = 4 = \dfrac{b_3}{a_{31}}$, тому $l = 3$.

Розв'язувальний елемент $a_{31} = 2$. Ділимо на нього 3-й рядок таблиці, замінивши при цьому в стовпці x_b $x_l = x_3$ на $x_k = x_1$. Заповнюємо 3 одиничних стовпця A_1, A_5, A_6 із одиницями у рядках із x_1, x_5, x_6 відповідно. Решту елементів обчислюємо за правилом трикутника:

$$b_{b1} = 10 - 2 \cdot 4 = 2 \; ; b_{b2} = 9 - (-2) \cdot 4 = 13 \; ;$$

$$b_{b3} = 8 / 2 = 4; b_{b4} = z^1 = -44 - (-11) \cdot 4 = 0 \, ;$$

$$a'_{12} = 3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4;\ a'_{13} = 0 - 1 \cdot 1 = -1; a'_{14} = -1 - 2 \cdot 3/2 = -4;$$

$$a'_{17} = 0 - 2 \cdot 1/2 = -1;$$

$$a'_{42} = \Delta'_2 = -5 - 11(-1/2) = -2\frac{1}{2}.$$

Аналогічно продовжуємо далі, отримуючи послідовно 4 симплекс-таблиці (далі таб. 5.4.1-5.4.4).

Проаналізуємо останню таблицю 5.3.4. Її останній рядок не містить від'ємних елементів, отже, оптимальний розв'язок знайдено. Випишемо послідовність з чотирьох одержаних планів задачі

$$x^1 = (0,\quad 0,\quad 8,\quad 0,\quad 10,\ 9,\quad 0\quad),\ z^1 = -44.00;$$

$$x^2 = (4,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 2,\quad 13,\ 0\quad),\ z^2 = 0.00;$$

$$x^3 = (17/4, 1/2,\ 0,\quad 0,\quad 0,\quad 49/40\quad),\ z^3 = 5.25$$

$$x^4 = (9/5,\ 59/20,\quad 0,\quad 49/20,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad),\ z^4 = 10.15.$$

Останній з них визначає шуканий оптимальний розв'язок x^*, z^*. Запишемо відповідь з врахуванням, що початкова задача формулюється у просторі R^5 .

<u>Відповідь</u>.

$$x^4 = (9/5,\ 59/20,\quad 0,\quad 49/20,\quad 0\ ),\ z^* = z^4 = 10.$$

<u>Приклад 5.3</u>. Розв'язати ЗЛП:

$$z = -5x_1 + 4x_2 - 3x_6 \to min\ ;$$

при умовах:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 10; \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 + x_6 = 9; \\ x_j \ge 0\ \left(j = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду. З цією метою від задачі мінімізації перейдемо до задачі максимізації функції –*z*. Маємо еквівалентну задачу:

$$z' = -z = 5x_1 - 4x_2 + 3x_6 \to max\ ;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 10; \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 + x_6 = 9; \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,6} \right). \end{cases}$$

Складемо матрицю обмежень і вектор вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця A містить одиничний базис, адже $E = \left(A_5, A_3, A_6 \right)$. Таким чином до даної задачі можна безпосередньо застосувати симплекс-метод, обравши за множину базисних змінних - $x_b = \left(x_4, x_5, x_6 \right)$.

Вектор цільової функції $c = \left(5, -4, 0, 0, 0, 3 \right)$, тому

$$c_b = \left(c_5, c_3, c_6 \right) = \left(0,0,3 \right).$$

Послідовність симплекс-таблиць наведена у таблиці 5.4.

Таблиця 5.4

i	x_b	c_b	b_b	5	-4	0	0	0	3	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$a_{ik}>0$
1	x5	0	10	-3	2	0	1	1	0	5
2	x3	0	5	-1	-1	1	3	0	0	
3	x6	3	9	4	-3	0	1	0	1	
4			27	7	-5	0	3	0	0	
1	x2	-4	5	-3/2	1	0	1/2	1/2	0	
2	x3	0	10	-5/2	0	1	7/2	1/2	0	
3	x6	3	24	-1/2	0	0	5/2	3/2	1	
4			52	-1/2	0	0	11/2	5/2	0	

Ітераційний процес після одержання x^2 закінчуємо, тому що останній рядок таблиці містить від’ємну відносну оцінку $\Delta_1 = -\frac{1}{2}$, але при цьому стовпець A_1 не містить додатних компонент. Згідно з теоремою 5.1 це означає, що цільова функція на допустимій множині не обмежена зверху.

Початковий план задачі $x^1 = (0,0,5,0,10,9)$ $z'^1 = 27$. Наступний план

$$x^2 = (0,5,10,0,0,24), z'^2 = 52 \ ;$$

$$z'^* = +\infty .$$

Повертаючись до вихідної задачі мінімізації, запишемо відповідь:

Відповідь. $z^* = -\infty$, тобто цільова функція необмежена знизу.

Зауваження. Якщо вектор c_b не містить ненульових координат, то відносні оцінки можна не обчислювати, а скористатися такою властивістю:

$$\Delta_i = z_i - c_i = c_b A_i - c_i = 0 \cdot A_i - c_i = -c_i \ \left(i = \overline{1,6}\right).$$

інакше вектор

$$\Delta = -c. \tag{5.4}$$

Виконується також:

$$f_0 = z'^0 = c_b b_b = 0 \cdot b_b = 0. \tag{5.5}$$

ТЕМА 6

Питання:
6.1 Метод штучного базису

6.1. Метод штучного базису

Нехай треба розв'язати ЗЛП вигляду (2.8)-(2.10)

Означення. Задача визначення максимального значення

$$z' = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \tag{6.1}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0 \;\; j = \overline{1,n+m}, \tag{6.3}$$

де M – деяке достатньо велике додатне число, називається *розширеною* задачею по відношенню до задачі (2.8)-(2.10).

У векторній формі (6.2) має вигляд: $\sum_{j=1}^{n+m} x_j A_j = b$, де $\left(A_{n+1},\ldots, A_{n+m}\right) = E$.

Означення. Допустимий розв'язок $x = \left(0,\ldots,\ 0,b_1,\ldots,\ b_m\right)$, який містить n нулів, називається *штучним планом*, система векторів $\left\{A_{n+1},\ \ldots,\ A_{n+m}\right\}$ – *штучним базисом*, змінні $\left\{x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}\right\}$ – *штучними змінними*.

Розв'язування розширеної задачі здійснюється симплекс-методом.

Теорема 6.1. Якщо в оптимальному плані $x^* = \left(x_1^*,\ \ldots,\ x_{n+m}^*\right)$ розширеної задачі (6.1)-(6.3) значення штучних змінних нулі ($x_i^* = 0,\ i = \overline{n+1,n+m}$), то $x^* = \left(x_1^*,\ldots,x_{n+m}^*\right)$ – оптимальний розв'язок задачі (2.8)-(2.10).

Значення $z^0,\ \Delta_i,\ i = \overline{1,n}$, складаються з двох частин – одна залежить від M, інша – ні.

Вихідні дані розширеної задачі, z^0, $\Delta_i, i=\overline{1,n+m}$, заносять у таблицю, яка містить на один рядок більше, ніж звичайна, при цьому в ($m+2$)-й рядок заносять коефіцієнти при M, а в ($m+1$)-й - доданки, що не містять M.

При переході від одного базису до іншого в базис вводять вектор, що відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу ($m+2$)-го рядка. Якщо таких значень декілька, то дивляться також на $m+1$-й рядок, і обирають мінімум серед відповідних значень.

Ітераційний процес проводиться до тих пір, поки:

а) або всі штучні вектори не будуть виключені з базису;

б) або не всі штучні вектори виключені, але всі відносні оцінки невід'ємні.

У першому випадку, одержаний базис відповідає деякому базисному розв'язку вихідної задачі, і визначення оптимального плану продовжується за ($m+1$)-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, що стоїть в ($m+2$)-му рядку стовпця b_b, від'ємний, то вихідна задача не має розв'язку. Якщо ж він нульовий, то знайдений базисний розв'язок розширеної задачі є виродженим (тобто базисний розв'язок містить менш, ніж m ненульових координат), і базис містить принаймні один з векторів штучного базису.

<u>Загальна схема практичної реалізації М-методу</u>:

а) приводимо ЗЛП до канонічної форми;

б) виписуємо систему векторів умов $\{A_1,...,A_n\}$, знаходимо серед них різні одиничні, з яких складають систему $\{A_{j_1},...,A_{j_k}\}$;

в) якщо $k=m$, то це означає, що з векторів умов можна скласти одиничну матрицю вимірності m, тоді до розв'язання даної ЗЛП одразу можна застосувати симплекс-метод; якщо $k \neq m$, то треба додати $m - k$ штучних змінних до відповідних рівнянь системи обмежень, щоб можна було утворити одиничну матрицю порядку m, додати штучні змінні у цільову функцію з великим за модулем від'ємним коефіцієнтом $-M$;

г) далі застосовується довільна схема лінійного програмування. При виборі розв'язувального елемента використовується той факт, що M більше будь-якого наперед заданого числа, тобто при виборі напрямного стовпця немає потреби аналізувати компоненти ($m+1$)-го рядка;

д) якщо в ході реалізації методу деяка штучна змінна x_l виходить із множини базисних змінних, то далі можна її не розглядати, адже в базисні змінні вона знову не потрапляє, а практично викреслити з подальшого розгляду стовпець A_l;

е) щойно всі штучні змінні стають небазисними і на даній ітерації знайдено $x^s = \left(x_1,...,x_n,0,...,0\right)$ – вершину багатогранної області (6.2), (6.3), то це означає, що знайдено також $x^p = \left(x_1,...,x_n\right)$ – вершину вихідної багатогранної області (2.9), (2.10), після чого здійснюється пошук розв'язку ЗЛП за стандартною схемою. Це не означає, що є необхідність складання нової симплекс-таблиці, просто далі при виборі напрямного стовпця аналіз ведеться вже за ($m+1$)-м рядком.

<u>**Приклад 6.1**</u>. Розв'язати ЗЛП:

$$z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 10; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 6; \\ -3x_4 + 2x_6 = 5; \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 3; \\ x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,6}\right). \end{cases}$$

Матриця системи обмежень має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки видно, що серед векторів-стовпців вже є два одиничних вектори – A_2, A_5 . Отже, для утворення одиничного базису не обов'язково додавати штучні змінні до кожного рівняння, а достатньо до третього рівняння системи додати штучну змінну $x_7 \ge 0$, а до четвертого штучну змінну $x_8 \ge 0$. Ці змінні введемо до цільової функції з коефіцієнтом –*M*, одержимо наступну розширену задачу

$$\bar{z} = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - Mx_7 - Mx_8 \to max$$

при умовах:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 10; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 6; \\ -3x_4 + 2x_6 + x_7 = 5; \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_8 = 3; \\ x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,8} \right). \end{cases}$$

Матриця системи обмежень

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

містить одиничну матрицю четвертого порядку: $E = \left(A_5, A_2, A_7, A_8 \right)$, що дозволяє обрати $x_b = \left(x_5, x_2, x_7, x_8 \right)$ виписати початкову вершину розширеної задачі: $\bar{x}^0 = (0, 6, 0, 0, 10, 0, 5, 3)$ і значення цільової функції $\bar{z}$ у даній точці: $\bar{z} = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 6 - M \cdot 5 - M \cdot 3 = 4 - 8M$.

У симплекс-таблиці в стовпці b_b у (*m*+*1*)-ий рядок заносимо число *4*, а в (*m*+*2*)-й рядок коефіцієнт при *M* – число *-8*.

Аналогічно обчислюється решта елементів (*m*+1)-го та (*m*+2)-го рядка, наприклад,

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - M \cdot 0 - M \cdot (-1) - 1 = -3 + M = \Delta_{11} + \Delta_{21} M ,$$

де $\Delta_{11} = -3$, $\Delta_{21} = 1$, тому в стовпці A_1 у (*m*+1)-му та (*m*+2)-му рядках стоять значення *-3* та *1* відповідно.

Проаналізуємо процес одержання розв'язку. Почнемо з вибору розв'язувального елементу в першій симплекс-таблиці (див. табл. 6.1). Доки останній рядок містить від'ємні числа, вибір напрямного стовпця визначається саме цими числами, а саме: $max\left(|\Delta_{23}|, |\Delta_{26}| \right) = 2 = |\Delta_{26}|$. Звідси $k = 6$ – номер напрямного стовпця, а тоді розв'язувальним буде третій рядок (див. табл. 6.1.1), відповідно $a_{36} = 2$ є розв'язувальним елементом. У третьому рядку стоїть базисна змінна x_7. Отже, змінна x_7 виводиться з базисних і знову туди не вводиться, а замість неї вводиться x_6, тому стовпець A_7 надалі залишаємо порожнім (див. табл. 6.1.2-6.1.3). Ця таблиця включає послідовність з 4-ох симплекс-таблиць табл. 6.1.1- 6.1.4.

Таблиця 6.1

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik} $a_{ik}>0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	x_5	1	10	-1	0	2	0	1	1	0	0	10
2	x_2	-1	6	1	1	-1	2	0	1	0	0	6
3	x_7	-M	5	0	0	0	-3	0	2	1	0	2,5
4	x_8	-M	3	-1	0	1	-1	0	0	0	1	
5			4	-3	0	1	-1	0	1	0	0	
6			-8	1	0	-1	4	0	-2	0	0	

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik} $a_{ik}>0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	x_5	1	15/2	-1	0	2	3/2	1	0		0	3,75
2	x_2	-1	7/2	1	1	-1	7/2	0	0		0	
3	x_6	-1	5/2	0	0	0	-3/2	0	1		0	
4	x_8	-M	3	-1	0	1	-1	0	0	0	1	3
5			3/2	-3	0	1	1/2	0	0		0	
6			-3	1	0	-1	1	0	0		0	

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik} $a_{ik}>0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	x_5	1	3/2	1	0	0	7/2	1	0	-1/2	-2	1,5
2	x_2	-1	13/2	0	1	0	5/2	0	0			
3	x_6	-1	5/2	0	0	0	-3/2	0	1			
4	x_3	2	3	-1	0	1	-1	0	0			
5			-3/2	-2	0	0	3/2	0	0			
6			0	0	0	0	0	0	0			

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik} $a_{ik}>0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	x_1	1	3/2	1	0	0	7/2	1	0			
2	x_2	-1	13/2	0	1	0	5/2	0	0			
3	x_6	-1	5/2	0	0	0	-3/2	0	1			
4	x_3	2	9/2	0	0	1	5/2	1	0			
5			3/2	0	0	0	17/2	2	0			
6			0	0	0	0	0	0	0			

При переході від другої симплекс-таблиці до третьої з базису виводиться остання штучна змінна – x_8, після чого стовпець A_8 залишається порожнім. Отже, всі штучні змінні виведені з базису, крім того, в табл. 6.1.4 усі відносні оцінки невід'ємні, тобто оптимальний розв’язок знайдено як для розширеної, так і для початкової задачі, і ітераційний процес закінчено.

Послідовність знайдених планів:

$$
\begin{array}{llllllllll}
x^1 = (0 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 & 5 & 3) & z^1 = 4.00 \\
x^2 = (0 & 7/2 & 0 & 0 & 15/2 & 5/2 & 0 & 3) & z^2 = 1.50 \\
x^3 = (0 & 13/2 & 3 & 0 & 3/2 & 5/2 & 0 & 0) & z^3 = -1.50 \\
x^4 = (3/2 & 13/2 & 9/2 & 0 & 0 & 5/2 &) & & z^4 = 1.50
\end{array}
$$

$\bar{x}^* = x^4$, $\bar{z}^* = z^4 = 1.50$ - оптимальний розв’язок розширеної задачі. Відкидаючи дві останні координати, одержуємо оптимальний розв’язок

$$x^* = (3/2, 13/2, 9/2, 0, 0, 5/2),\ z^* = 1.50$$

вихідної задачі.

Відповідь. $x^* = (3/2, 13/2, 9/2, 0, 0, 5/2),\ z^* = 1.50$.

Приклад 6.2. Розв'язати ЗЛП:

$$\bar{z} = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to max$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 16; \\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 9; \\
-3x_4 + 2x_6 = 15; \\
x_1 + x_3 - x_4 = 3; \\
x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,6} \right).
\end{cases}
$$

Матриця системи обмежень має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два вектори стовпці цієї матриці - A_2, A_5 - вектори одиничного базису. Для утворення одиничного базису доповнимо її ще двома стовпцями - A_7, A_8, що відповідають штучним змінним $x_7, x_8 \geq 0$, які додаються у два останні рівняння відповідно. У результаті матриця системи обмежень перетворюється на

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

А розширена задача має вигляд:

$$\bar{z} = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - Mx_7 - Mx_8 \to max$$

при умовах:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 10; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 6; \\ -3x_4 + 2x_6 + x_7 = 5; \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_8 = 3; \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,8} \right). \end{cases}$$

Складаємо послідовність з трьох симплекс таблиць (див. табл. 7.3). З останньої з них бачимо, що від'ємна відносна оцінка -1 стоїть у стовпці A_7, що відповідає штучній змінній x_7, але ця змінна, раніше виведена з базису, у множину базисних змінних не повертається. Таким чином, в, з одного боку, оптимальний розв'язок ще не знайдено, а з іншого - в нас нема претендента на включення до базису. Це означає, що розширена задача – сумісна і має псевдолани, три з яких можна знайти з табл. 7.3.1-7.3.3, у той час як вихідна задача несумісна.

<u>Відповідь</u>. Задача несумісна

Таблиця 6.2

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	$a_{ik}>0$
1	x_5	1	16	1	0	3	0	1	1	0	0	16
2	x_2	-1	9	1	1	1	2	0	1	0	0	9
3	x_7	-M	15	0	0	0	-3	0	2	1	0	7,5
4	x_8	-M	3	1	0	1	-1	0	0	0	1	
5			7	-1	0	0	-1	0	1	0	0	
6			-18	-1	0	-1	4	0	-2	0	0	

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	$a_{ik}>0$
1	x_5	1	17/2	1	0	3	3/2	1	0			8,5
2	x_2	-1	3/2	1	1	1	7/2	0	0	-1/2	0	1,5
3	x_6	-1	15/2	0	0	0	-3/2	0	1			
4	x_8	-M	3	1	0	1	-1	0	0			3
5			-1/2	-1	0	0	1/2	0	0			
6			-3	-1	0	-1	1	0	0			

i	x_b	c_b	b_b	1	-1	2	-1	1	-1	-M	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	x_5	1	7	0	-1	2	-2	1	0	0	0
2	x_1	1	3/2	1	1	1	7/2	0	0	-1/2	0
3	x_6	-1	15/2	0	0	0	-3/2	0	1	1/2	0
4	x_8	-M	3/2	0	-1	0	-9/2	0	0	1/2	1
5			1	0	1	1	4	0	0	-1	0
6			-3/2	0	1	0	9/2	0	0	1/2	0

ТЕМА 7

Питання:

7.1 Пряма та двоїста задачі;

7.2 Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач;

7.3 Економічна інтерпретація двоїстих задач

7.1. Пряма та двоїста задачі

Кожній задачі ЛП, яку називають *<u>прямою</u>*, можна поставити у відповідність деяку іншу ЗЛП, яку називають *<u>двоїстою</u>* (або *<u>спряженою</u>*). Розв'язки цих задач рівносильні в тому сенсі, що, якщо розв'язана одна з задач, то розв'язана і інша.

Дамо означення двоїстої задачі по відношенню до загальної ЗЛП (2.1)-(2.4):

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow max,$$

якщо:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=\overline{1,k},\ k\le m;\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{k,m}, \tag{7.1}$$

$$x_j\ge 0\ \ j=\overline{1,l},\ l\le n.$$

<u>Означення</u>. Задача, що полягає в знаходженні *<u>мінімального</u>* значення функції

$$z'=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i \tag{7.2}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\ j=\overline{1,l},\ l\le n \tag{7.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j,\ j=\overline{l+1,n}\ ; \tag{7.4}$$

$$y_i\ge 0\ \ j=\overline{1,k},\ k\le m$$

називають *<u>двоїстою</u>* по відношенню до (7.1).

Задачі (7.1) і (7.2)-(7.3) утворюють так звану <u>двоїсту пару</u> задач ЛП.

Покажемо, звідки виникає і як складається двоїста задача до ЗЛП, заданої в канонічній або стандартній формі.

Якщо пряма задача задана у канонічній формі (2.8)-(2.10), тобто в матричній формі вона записується так:

$$\begin{gathered} cx \to max; \\ Ax = b,\, x \in R^n, \\ x \ge 0, b \ge 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Тут A матриця вимірності $m \times n$.

Двоїста до (7.5) задача виникає, коли ми шукаємо верхню оцінку cx на допустимій множині X задачі (7.5):

$$X = \left\{ x \in R^n : Ax = b,\, x \ge 0 \right\}$$

Маємо $Ax = b \Rightarrow -Ax + b = 0 \left(0 \in R^n\right)$.

Нехай $y \in R^m$ – довільний вектор простору R^m, тоді виконано:

$$0 = (y, 0) = (y, -Ax\ + b)\ ;$$

$$(c, x) = (c, x) + 0 = (c, x) + (y,\, -Ax + b) = (c, x) - (y, Ax) + (y, b) =$$

$$= (c, x) - \left(yA^T, x\right) + (b, y) = \left(c - yA^T, x\right) + \ (b, y).$$

Якщо обрати $y \in R^m\ :\ c - yA^T\ \le 0$, тобто

$$yA^T \ge c, \tag{7.6}$$

то маємо: $(\,c - yA^T, x\,) \le 0$, звідки

$$(c, x) \le (b, y),$$

де y - довільний вектор R^m, що задовольняє (7.6), тобто $y \in Y$, де $Y = \left\{ y \in R^m : ya^T\ \ge c \right\}$. Звідси випливає, що $(c, x) \le \min(b, y)$, де x – довільний вектор X, тобто

$$(c,x) \le \max_{x \in X}(c,x) = \left(c,x^*\right) \le \left(b,y^*\right) = \min_{y \in Y}(b,y) \le (b,y).$$

Таким чином, значення (b, y^*), де y^* – розв'язок задачі мінімізації:

$$by \underset{y \in Y}{\to} min,$$

є верхньою оцінкою $\left(c, x^*\right)$, де x^* – розв'язок (7.5), тобто виконано:

$$(c,x)\leq(b,y). \tag{7.7}$$

Виявляється (і це доведено далі в теоремі 7.1), що дана оцінка точна, тобто, якщо одна з задач двоїстої пари має розв'язок, то виконано:

$$\left(c,x^*\right) = \left(b,y^*\right). \tag{7.8}$$

<u>Означення</u>. Змінні $y_i, i=\overline{1,m}$, називаються <u>*двоїстими*</u> змінними або множниками Лагранжа.

Як видно, у випадку, що розглядається, двоїсті змінні мають довільний знак.

Розглянемо тепер ЗЛП у стандартній формі (2.5)-(2.7) і відповідну їй двоїсту задачу:

$$\begin{gathered} cx \to max\ ; \\ Ax \leq b,\ x \in R^n, \\ x \geq 0,\ b \geq 0. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Їй відповідає ЗЛП у канонічній формі:

$$\begin{gathered} \bar{c}\,\bar{x} \to max, \\ \bar{x},\bar{c} \in R^{n+m} : \bar{c} = \left(c_1,...,c_n\right), \\ \left(A,E\right)\bar{x} = b, \\ x \geq 0,\ b \geq 0. \end{gathered} \tag{7.10}$$

Тут E – одинична матриця порядку m.

Двоїста задача до (7.10), отже і до (7.9), має вигляд:

$$\begin{gathered} by \to min\ ; \\ y\left(A,E\right)^T \geq c, \\ y \in R^m, \end{gathered}$$

тобто

$$y\begin{pmatrix} A^T \\ E \end{pmatrix} \geq c. \tag{7.11}$$

Система (7.11) еквівалентна таким двом: (7.6), $y_i \geq 0, i=\overline{1,m}$, тобто двоїста до (7.9) має вигляд:

$$\begin{gathered} by \to min\ ; \\ yA^T \geq c, \end{gathered} \tag{7.12}$$

Задача, двоїста до ЗЛП у загальній формі, формується аналогічно, і правила складання двоїстої задачі за прямою вигляду (7.1) наведені в таблиці 7.1:

Таблиця 7.1

Пряма задача		Двоїста задача
1) на максимум		на мінімум
2) матриця коефіцієнтів обмежень транспонується		
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$		$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
3) число змінних	=	число обмежень в (7.3)
число обмежень	=	число змінних задачі
4) вектор b	$\rightarrow$	вектор цільової функції
вектор цільової функції c	$\rightarrow$	вектор вільних членів у (7.3)
5) $x_j \geq 0$	$\rightarrow$	$a_{1j}y_1+\ldots+a_{mj}y_m \geq c_j$
x_j – довільне	$\rightarrow$	$a_{1j}y_1+\ldots+a_{mj}y_m = c_j$
6) $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i$	$\rightarrow$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n = b_i$	$\rightarrow$	y_i - довільне

Двоїсті пари поділяють на *симетричні* і *несиметричні*.

Означення. Двоїсті задачі утворюють *симетричну пару*, якщо $x \geq 0$ ($y \geq 0$). (Це може бути, коли змінні однієї з пари двоїстих задач невід'ємні, і система обмежень містить лише нерівності).

Приклад 7.1. Записати двоїсту задачу до даної ЗЛП:

$$f = x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 - 7x_6 \rightarrow min(max);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 \leq 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_6 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 \geq 10, \\ -4x_1 - 6x_2 + 2x_4 - x_5 = 10, \\ x_1, x_2, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Спочатку розглянемо задачу максимізації. Систему обмежень приведемо до вигляду $Ax \le b$, для цього третю нерівність помножимо на *–1*. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 \le 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_6 = -4, \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 \le -10, \\ -4x_1 - 6x_2 + 2x_4 - x_5 = 10, \\ x_1, x_2, x_5, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

Запишемо матрицю *A* системи обмежень, транспоновану до неї і вектор вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пряма задача містить *6* невідомих і *4* обмеження, тобто двоїста задача міститиме *4* невідомих і *6* обмежень. Коефіцієнти нової системи обмежень визначаються матрицею A^T і коефіцієнтами вектору *c*. Знаки обмежень системи $yA^T \ge c$ визначаються знаками невідомих x_j $\left(j = \overline{1,6}\right)$: *j*-й змінній x_j відповідає *j*-е обмеження ($j = \overline{1,6}$); той факт, що в прямій задачі x_3, x_4 не задовольняє умову невід'ємності означає, що третє і четверте обмеження двоїстої задачі це рівність, решта нерівності із знаком "≥". З іншого боку, *i*-му обмеженню прямої задачі відповідає *i*-а змінна двоїстої задачі y_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$, а знак *i*-го обмеження визначає знак змінної y_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$. Так перше і третє обмеження системи являє собою нерівності, тобто $y_1, y_3 \ge 0$, решта – рівняння, тому відповідні їм змінні мають довільний знак.

Двоїста задача до задачі максимізації:

$$-5y_1 - 4y_2 + 10y_3 + 10y_4 \to min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 3y_3 - 4y_4 \geq 1, \\ -2y_1 - 3y_2 - 4y_3 - 6y_4 \geq -3, \\ 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 = -6, \\ -4y_1 - y_3 + 2y_4 = 4, \\ 5y_1 - y_4 \geq 0, \\ -y_2 \geq -7, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Аналогічно для задачі мінімізації, систему обмежень приведемо до вигляду $Ax \geq b$, для цього першу нерівність помножуємо на *–1*. Маємо:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \geq -5, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_6 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 \geq 10, \\ -4x_1 - 6x_2 + 2x_4 - x_5 = 10, \\ x_1, x_2, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}; \; A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -6 \\ -3 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Двоїста задача до задачі мінімізації має загальний вигляд: $by \to max \, : \, yA^T \leq c$. Для нашого випадку вона має вигляд:

$$-5y_1 - 4y_2 + 10y_3 + 10y_4 \to min;$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + 3y_3 - 4y_4 \le 1, \\ 2y_1 - 3y_2 + 4y_3 - 6y_4 \le -3, \\ -3y_1 + 2y_2 - 5y_3 = -6, \\ 4y_1 + y_3 + 2y_4 = 4, \\ -5y_1 - y_4 \le 0, \\ -y_2 \le -7, \\ y_1, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

7.2. Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач

Розглянемо пару двоїстих задач, причому пряма задана в канонічній формі:

– пряма:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{7.13}$$

при умовах:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{7.14}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{7.15}$$

– двоїста:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min \tag{7.16}$$

при умовах:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1,l}. \tag{7.17}$$

Задачі (7.13)-(7.15) і (7.16)-(7.17) можуть бути розв'язані незалежно. Але при визначенні симплекс-методом оптимального розв'язку однієї з задач буде знайдено розв'язок і іншої задачі.

Існуючі залежності між розв'язками пари двоїстих задач сформульовані у вигляді наступних тверджень:

Твердження. Якщо x – деякий допустимий розв'язок задачі (7.13)-(7.15), а y – деякий допустимий розв'язок двоїстої задачі (7.16), (7.17), то $F(x) \le F^*(y)$, тобто значення цільової функції $F(x)$ прямої задачі на допустимій множині X не перевищують значення цільової функції $F^*(y)$ двоїстої задачі на допустимій множині Y (доведено вище).

<u>Теорема 7.1</u> (Перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари двоїстих задач (7.13)-(7.15), (7.16)-(7.17) має оптимальний розв'язок, то і інша задача має оптимальний розв'язок, причому значення цільових функцій прямої і двоїстої задач рівні між собою.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для (7.13)-(7.15) зверху, для (7.16)-(7.17) знизу), то інша задача двоїстої пари зовсім не має розв'язків.

<u>Доведення</u>. Доведемо першу частину теореми. Припустимо пряма задача (7.13)-(7.15) має оптимальний розв'язок x^*. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що оптимальному розв'язку x^* відповідає базис, складений з перших m векторів умов $\{A_1,...,A_m\}$. Введемо позначення $B = (A_1,...,A_m)$. Якщо матричний запис системи рівнянь, що відповідає останній симплекс-таблиці:

$$\alpha x = \beta,$$

то, очевидно, $\alpha = (E, \alpha_{m+1},...,\alpha_n)$, де $\alpha_j = (\alpha_{1j},...,\alpha_{mj})^T$, $j = \overline{1,n}$. Також справедливо:

$$\alpha = B^{-1}A, \; x^{**} = B^{-1}b, \tag{7.18}$$

де x^{**} – вектор ненульових компонент оптимального розв'язку x^*: $x^{**} = (x_1^*,...,x_m^*)$, x^* – оптимальний розв'язок прямої задачі, тобто відносні оцінки в останній симплекс-таблиці невід'ємні:

$$\Delta_k = c_k - z_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ik} = c_k - (c^*, \alpha_k) \ge 0, \; k = \overline{1,n},$$

де $c^* = (c_1,...,c_m)$.

Остання система нерівностей у векторному вигляді записується так:

$$c - c^* \ge 0.$$

З урахуванням (7.18), маємо:

$$c - c^* B^{-1} A \ge 0. \tag{7.19}$$

Якщо позначити за y^* : $c^* B^{-1} = y^*$, то з (7.19) одержуємо:

$$y^* A \le c,$$

тобто y^* – допустимий розв'язок двоїстої задачі. При цьому значення цільової функції двоїстої задачі, з урахуванням (7.18):

$$\left(y^*, b\right) = \left(c^* B^{-1}, b\right) = \left(c^*, B^{-1} b\right) = \left(c^*, x^{**}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{**} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \left(c, x^*\right).$$

Таким чином, ми довели, що значення цільових функцій прямої та двоїстої задач в оптимальних розв'язках відповідних задач, якщо вони існують, рівні між собою. Першу частину теореми доведено.

Для доведення другої частини теореми, припустимо, що цільова функція прямої задачі $\left(c, x\right)$ необмежена зверху, тобто $z_{max} = +\infty$. У такому разі з (7.7) випливає, що $\left(b, y\right) \ge +\infty \ \forall \ j = \overline{1,n}$, а це означає, що $Y = \varnothing$, тобто двоїста задача не має розв'язків.

Теорему доведено.

<u>Теорема 7.2</u> (Друга теорема двоїстості). Допустимий розв'язок $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі (7.13)-(7.15) і допустимий розв'язок $y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$ задачі (7.16)-(7.17) є оптимальними розв'язками цих задач тоді і тільки тоді, коли виконується рівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \ \forall \ j = \overline{1,n}. \qquad (7.20)$$

<u>Доведення</u>. *Необхідність*. Нехай x^* – оптимальний розв'язок прямої задачі. Згідно з першою теоремою двоїстості, існує оптимальний план двоїстої задачі y^* і при цьому виконана рівність (7.8), тобто:

$$\left(c, x^*\right) - \left(b, y^*\right) = 0.$$

Також, у силу того, що x^* – розв'язок прямої задачі, то $-Ax^* + b = 0$, звідки $0 = \left(y, 0\right) = \left(y, Ax^* - b\right)$, де $y \in R^m$ – довільний, і, в тому числі, $0 = \left(y^*, Ax^* - b\right)$.

Таким чином, маємо:

$$0=\left(c,x^*\right)-\left(b,y^*\right)-\left(y,Ax^*-b\right)=\left(c,x^*\right)-\left(b,y^*\right)-\left(y^*,Ax^*\right)+$$
$$+\left(b,y^*\right)=\left(c,x^*\right)-\left(y^*,Ax^*\right)=\left(c,x^*\right)-\left(y^*A^T,x^*\right)=\left(c-y^*A^T,x^*\right). \quad (7.21)$$

Оскільки $x^*\geq 0$, а y^* – план двоїстої задачі, то $y^*A^T\geq c$, інакше $c-y^*A^T\leq 0$, а це означає, що рівність (7.21) виконується в єдиному випадку, а саме, коли виконано (7.20).

Достатність. Нехай (7.20) справедливо. Покажемо, що x^*, y^* – не лише допустимі, але й оптимальні розв'язки прямої та двоїстої задач відповідно.

Якщо скласти всі рівняння (7.20), одержимо рівняння, яке у векторній формі має вигляд:

$$\left(y^*A^T-c,x^*\right)=0.$$

Звідси

$$0=\left(y^*A^T,x^*\right)-\left(c,x^*\right)=\left(y^*,Ax^*\right)-\left(c,x^*\right)=\left(y^*,b\right)-\left(c,x^*\right).$$

Таким чином, маємо: вектор y^*, з одного боку, з умови теореми є допустимим розв'язком двоїстої задачі, а з іншого боку, це такий план двоїстої задачі, що значення цільових функцій прямої і двоїстої задачі збігаються зі значенням by^*, а це, з першої теореми двоїстості, означає, що y^* – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, x^* – оптимальний розв'язок прямої задачі.

Зауваження. З другої теореми двоїстості випливає, що розв'язки пари двоїстих задачі пов'язані наступним чином:
якщо $x_j^*\geq 0$, то

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*=c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \quad (7.22)$$

тобто додатній компоненті розв'язку прямої задачі відповідає j-е рівняння системи обмежень двоїстої задачі, яке перетворюється в точці y^* на рівність.

Враховуючи, що пряму задачу можна розглядати як двоїсту до двоїстої, можна сформулювати другу теорему двоїстості також і наступним чином: допустимі розв'язки x^* і y^* прямої і двоїстої задач відповідно є оптимальними розв'язками цих задач тоді і тільки тоді, коли виконується рівність:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right)y_i^* = 0,\ \forall i = \overline{1,m}. \qquad (7.23)$$

Звідси, по аналогії з розглянутим вище, можна записати: y^*, x^* пов'язані наступним чином: якщо $y_i^* > 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (7.24)$$

тобто додатній компоненті розв'язку двоїстої задачі відповідає *i*-е рівняння системи обмежень прямої задачі, яке в точці x^* справджується як рівність.

Дану теорему двоїстості можна застосовувати, наприклад, у тих випадках, коли одна з пари двоїстих задач розв'язується геометрично (приклад наведений далі).

7.2.1. Геометрична інтерпретація двоїстих задач

У відповідності з першою теоремою двоїстості, можуть мати місце 2 випадки:

1) обидві задачі мають розв'язки;

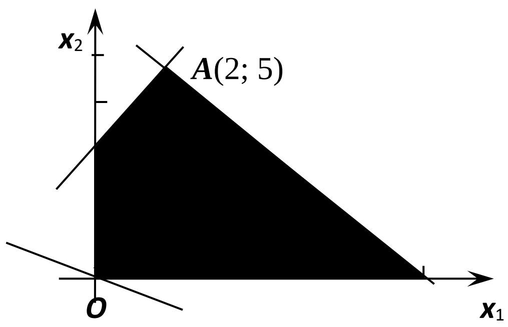
2) одна з задач не має розв'язку, тоді цільова функція другої задачі необмежена зверху (знизу).

Проілюструємо першу теорему двоїстості на прикладах.

<u>Приклад 7.2</u>. Розв'язати графічно ЗЛП та двоїсту до неї:

$$z = x_1 + 2x_2 \to max\ ;$$

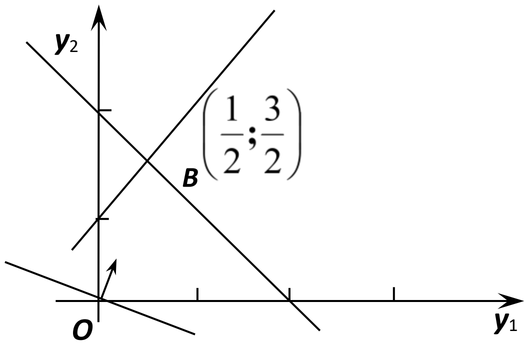
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



Двоїста задача:

$z' = 3y_1 + 7y_2 \to min$;

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \ge 1; \\ y_1 + y_2 \ge 2; \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$



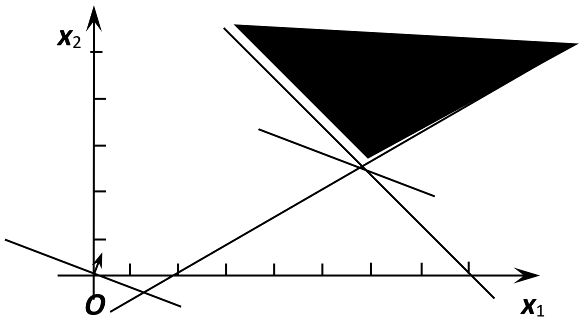
Обидві задачі можна розв'язати графічно. Вихідна задача має розв'язок $x^* = (2, 5)$ ($-x_1^* + x_2^* = 3, x_1^* + x_2^* = 7$), $z^* = 12$ (див. верхній рисунок). Згідно з першою теоремою двоїстості, інша задача двоїстої пари також повинна мати розв'язок, значення цільової функції в якому також *12*.

Дійсно, розв’язок двоїстої задачі знаходимо, користуючись геометричною інтерпретацією (див. нижній рисунок):

$$\begin{cases} -y_1^* + y_2^* = 1; \\ y_1^* + y_2^* = 2; \end{cases} \quad y^* = \left(0{,}5; 1{,}5\right).$$

<u>Відповідь</u>. $x^* = (2, 5)$, $y^* = (0.5,\ 1.5)$, $z'^* = z^* = 12$.

<u>Приклад 7.3</u>. Розв'язати графічно ЗЛП та двоїсту до неї



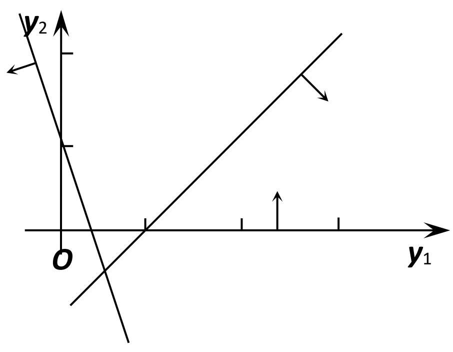
$x_1 + 2x_2 \to max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \ge 8; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2; \\ -x_1 - x_2 \le -8; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$2y_1 - 8y_2 \to min$;

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 1; \\ -2y_1 - y_2 \ge -1; \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$



Як видно з верхнього рисунка, цільова функція прямої задачі необмежена зверху. У відповідності з першою теоремою двоїстості, двоїста задача не має розв'язків, що і підтверджує наведена геометрична інтерпретація. Дійсно, з нижнього рисунку видно, що допустима область двоїстої задачі порожня.

7.2.2. Знаходження розв'язку пари двоїстих задач

Розглянемо пару двоїстих задач (7.13)-(7.15) і (7.16), (7.17). Нехай симплекс-методом знайдено розв'язок задачі (7.13)-(7.15), і знайдений оптимальний план характеризується базисом $\left\{A_{i_1},...,A_{i_m}\right\}$, тоді $c_b=\left(c_{i_1},...,c_{i_m}\right)$.

Нехай B^{-1} – матриця, обернена до $B=\left(A_{i_1},...,A_{i_m}\right)$.

Має місце така теорема:

Теорема 7.3. Якщо задача (7.13)-(7.15) має оптимальний розв'язок x^*, то вектор

$$y^*=c_bB^{-1} \qquad (7.25)$$

є оптимальним розв'язком задачі (7.16), (7.17).

З означення *невиродженого* базисного розв'язку (розв'язку ЗЛП, що має точно m ненульових координат), маємо:

$$x_j^*>0\ \forall j\in I=\left\{i_1,...,i_m\right\}.$$

Тоді з другої теореми двоїстості маємо:

$$\forall\ j\in I\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*=c_j.$$

У матричному вигляді цю систему можна записати так:

$$By^*=c_b.$$

Але B – невироджена матриця, тобто остання рівність переписується у вигляді (7.25). Теорему доведено.

Таким чином, якщо знайти симплекс-методом розв'язок (7.13)-(7.15), то, використовуючи останню симплекс-таблицю, можна визначити c_b, B^{-1}, після чого, на основі теореми 7.3, знайти оптимальний розв'язок у задачі (7.16)-(7.17).

Зауваження. У тому випадку, коли серед векторів системи $\left\{A_1,...,A_n\right\}$ є m векторів, які утворюють одиничну матрицю, шукану матрицю B^{-1} утворюють стовпці останньої симплекс-таблиці, що стоять в стовпцях даних векторів.

Тоді немає необхідності визначати оптимальний розв'язок двоїстої задачі (7.16)-(7.17) за формулою (7.25), оскільки компоненти цього плану збігаються з відповідними елементами (m + *1*)-го рядка стовпців одиничних векторів останньої симплекс-таблиці, якщо відповідний коефіцієнт цільової функції $c_j = 0$, а це означає, що $\Delta_j = z_j - c_j = z_j$, або сумі відповідного елемента (m + *1*)-го рядка і c_j (тому що $z_j = c_j + \Delta_j$).

Треба зауважити, що для того, щоб визначити початкову вершину для застосування симплекс-методу, ми завжди доповнюємо, в разі необхідності, матрицю векторів умов до утворення одиничної матриці m-го порядку, тобто вищенаведене зауваження завжди можна застосувати.

Викладене вище має місце і для симетричної пари двоїстих задач. При цьому, оскільки у даному випадку система обмежень прямої задачі містить лише нерівності вигляду "≤", то коефіцієнти цільової функції при базисних векторах вихідної симплекс-таблиці будуть 0, звідки видно, що компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі збігаються з останніми n числами $(m+1)$-го рядка останньої симплекс-таблиці.

<u>Приклад 7.4</u>. Розв'язати ЗЛП та двоїсту до неї:

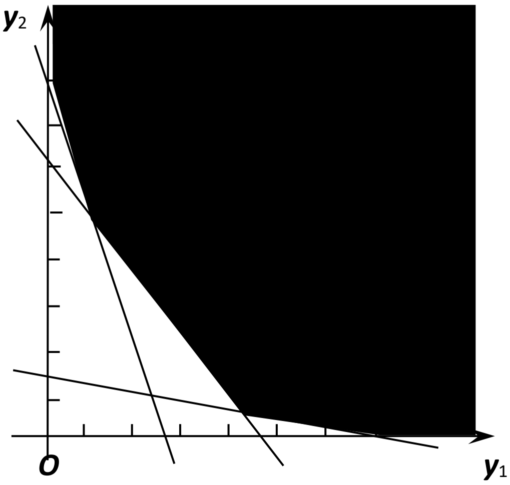
$$8x_1 + 19x_2 + 7x_3 \to max \ ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 50; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Система обмежень даної задачі містить дві нерівності, а це означає, що кількість змінних у двоїстій задачі дорівнює 2, тобто її можна розв'язати геометрично. Зробимо це.

$$z' = 25y_1 + 50y_2 \to min \ ;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 8; \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 19; \\ y_1 + 3y_2 \geq 7; \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$



З рисунка видно, що розв'язок двоїстої задачі це точка

$$A: \begin{cases} 4y_1^* + 3y_2^* = 19; \\ y_1^* + 3y_2^* = 7; \end{cases} \quad y^* = (4{,}1),$$

$$z'^* = 25 \cdot 4 + 50 = 150.$$

Ми знаємо, як шукати розв'язок іншої задачі двоїстої пари, якщо одна з задач розв'язана симплекс-методом або довільною його модифікацією, тобто якщо ми маємо останню симплекс-таблицю.

У даному випадку двоїсту задачу розв'язано іншим способом, тому для відшукання x^* скористаємося другою теоремою двоїстості. Підставимо y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Виявляється, що перше обмеження справджується як строга нерівність. Згідно з другою теоремою двоїстості, це означає, що відповідна змінна x_1 прямої задачі повинна у точці x^* обертатися на 0 (див. (7.20)), отже $x^* = 0$. Дві інші нерівності обертаються в точці y^* на рівність, тобто відповідні змінні прямої задачі x_1^*, x_2^* можуть набувати довільні невід'ємні значення. З іншого боку обидві змінні y^* додатні ($y_1^*, y_2^* > 0$), а це, згідно з другою теоремою двоїстості (див. (7.24)), означає, що в точці x^* обидві нерівності вихідної задачі повинні перетворюватися на рівність. Таким чином для визначення x^* маємо наступну систему:

$$\begin{cases} 3x_1^* + 4x_2^* + x_3^* = 25; \\ x_1^* + 3x_2^* + 3x_3^* = 50; \\ x_1^* = 0; \end{cases}$$

звідки $x^* = \left(0, \dfrac{25}{9}, \dfrac{125}{9}\right)$.

Перевіримо правильність результату, підставивши x^* у цільову функцію: $z^* = 8\cdot 0 + 19\cdot\frac{25}{9} + 7\cdot\frac{125}{9} = 150$.

Як і очікувалося, значення цільової функції в оптимальних розв'язках пари двоїстих задач рівні між собою.

Відповідь. $x^* = \left(0, \frac{25}{9}, \frac{125}{9}\right)$, $y^* = (4,1)$, $z^* = 150$.

Приклад 7.5. Розв'язати ЗЛП та двоїсту до неї:

$$z = x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 \to max\ ;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 30; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 \le 28; \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_4 \le 32; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Дана задача містить чотири змінні, система обмежень містить одне рівняння, тобто одну змінну можна виключити. Двоїста задача містить 3 змінні. Отже, жодна з двоїстої пари задач не може бути розв'язна геометрично. Перевіримо, яку задачу легше розв'язати, принаймні канонічна форма якої з двох задач містить менше змінних.

Канонічна форма вихідної задачі має вигляд:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 \to max\ ;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 30; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 + x_5 = 28; \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32; \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$30y_1 + 28y_2 + 32y_3 \to min\ ;$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 1; \\ 5y_1 + 4y_2 - 2y_3 \ge 3; \\ -y_1 + 2y_2 + 8_3 \ge -5; \\ y_3 \ge 1; \\ y_2, y_3 \ge 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 1; \\ 5y_1 + 4y_2 - 2y_3 \ge 3; \\ y_1 - 2y_2 - 8_3 \le 5; \\ y_3 \ge 1; \\ y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Двоїста задача містить 3 змінні, але y не задовольняє умову невід'ємності, тобто канонічна форма двоїстої задачі міститиме 7 змінних, а для переходу до канонічної системи обмежень необхідно ще додати три штучні змінні і розв'язувати задачу методом штучного базису з 10-ма змінними.

Таким чином, пряма задача містить меншу кількість змінних, причому серед векторів стовпців є одиничний базис $\{A_3, A_5, A_6\}$, тобто можна одразу вказати початковий план $x^0 = (0, 0, 30, 0, 28, 32)$ і застосувати симплекс-метод.

Складемо послідовність симплекс-таблиць (див. табл. 7.2):

Таблиця 7.2

i	x_b	c_b	b_b	1	3	1	-5	0	0	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$a_{ik}>0$
1	x_3	1	30	-3	5	1	-1	0	1	
2	x_5	0	28	2	4	0	'2	1	0	14
3	x_6	0	32	4	2	0	8	0	0	8
4			30	-4	2	0	0	0	0	
1	x_3	1	52	0		1		0		
2	x_5	0	12	0		0		1		
3	x_1	1	8	1	1/2	0	2	0	1/4	
4			62	0	4	0	8	0	1	

Проаналізуємо одержаний результат. Запишемо послідовність планів вихідної та двоїстої задач. У вихідній таблиці одиничну матрицю утворювали вектори стовпці A_3, A_5, A_6, отже, розв'язки двоїстої задачі обчислюються за допомогою $\Delta_3, \Delta_5, \Delta_6$ та c_3, c_5, c_6:

$$x^0 = (0, 0, 30, 0, 28, 32),$$

$$y^0 = \left(\Delta_3 + c_3, \Delta_5 + c_5, \Delta_6 + c_6\right) = (1+0, 0+0, 0+0);$$

$$x^1 = (8, 0, 54, 0, 12, 0),$$

$$y^1 = \left(\Delta_3' + c_3, \Delta_5' + c_5, \Delta_6' + c_6\right) = (1+0, 0+0, 0+1).$$

Перевіримо значення цільової функції двоїстої задачі в знайденій точці $y^1 = 30 \cdot 1 + 28 \cdot 0 + 32 \cdot 1 = 62 = z^1$. Таким чином знайдені плани прямої і двоїстої задач є оптимальними планами цих задач.

Враховуючи те, що вихідна задача сформульована для чотирьох змінних, запишемо відповідь у такій формі:

Відповідь. $x^* = (8, 0, 54, 0)$, $y^* = (1, 0, 1)$, $z^* = 62$.

7.3. Економічна інтерпретація двоїстих задач

Задачу максимізації: $cx \to max$, якщо $Ax \le b$, $x \ge 0$, у симетричній двоїстій парі задач можна інтерпретувати як задачу планування виробництва : потрібно знайти інтенсивності технологічних процесів, що задовольняють обмеженням на ресурси, планові завдання тощо і максимізують загальний прибуток виробництва.

Двоїсту до неї задачу: $by \to min$, якщо $yA^T \ge b$, $y \ge 0$, можна інтерпретувати так: y_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ відносна оцінка i-го інгредієнту в тих же одиницях, у яких вимірюється прибуток (збиток) від виробництва за кожною технологією, тоді $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge b$ – це загальна оцінка всіх затрат, пов'язаних із роботою за j-ю технологією з інтенсивністю 1. Обмеження $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$ показують, що результат виробництва (прибуток або збиток) не може бути менше витрат. Цільова функція by – сумарна двоїста оцінка всіх інгредієнтів.

Таким чином, можна дати таку економічну інтерпретацію задачі, двоїстої до задачі планування виробництва: це задача пошуку таких двоїстих оцінок усіх інгредієнтів, які використовуються у виробництві, для яких сумарна оцінка мінімальна. При цьому оцінки повинні бути такими, щоб загальна оцінка кожної технології при одиничній інтенсивності була б не менше відповідного прибутку або збитку використання даної технології.

Першу теорему двоїстості можна інтерпретувати так: якщо задача планування виробництва має розв'язок, то існують також оптимальні оцінки всіх інгредієнтів, і максимальний можливий прибуток від виробництва збігається з мінімальною сумарною двоїстою оцінкою всіх інгредієнтів.

Приклад 7.6. Підприємство має 4 види устаткування A_1, A_2, A_3, A_4 , на якому може вироблятися продукція трьох видів B_1, B_2, B_3, збут якої забезпечено в необмеженій кількості. Можливості виробництва обмежує лише час використання устаткування за виробничий цикл (витрати часу на виробництво продукції кожного виду, час роботи устаткування за цикл виробництва наведено в таблиці 7.3).

Таблиця 7.3

Устаткування	Час використання обладнання	Витрати часу на 1-цю продукції (хв.)		
		B_1	B_2	B_3
A_1	2	1	0	2
A_2	1	2	3	1
A_3	3	2	1	0
A_4	4	1	1	3
Ціна одиниці продукції		64	39	35

Скласти план виробництва продукції, щоб загальна вартість продукції була максимальна, оцінити кожен з видів обладнання, які використовується у виробництві. Оцінки, що приписуються кожному з видів сировини, повинні бути такими, щоб оцінка обладнання, що використовується, була мінімальною, а сумарна оцінка, що використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду, була не менше ціни одиниці продукції даного виду.

Позначимо x_j – кількість вироблених виробів виду B_j ($j = \overline{1,3}$).

Для визначення оптимального плану виробництва треба максимізувати функцію $64x_1 + 39x_2 + 35x_3$, тобто розв'язати задачу:

$$F = 64x_1 + 39x_2 + 35x_3 \to max \qquad (7.26)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \le 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 1; \\ 2x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4; \\ x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,3} \right). \end{cases}$$

Припишемо кожному виду устаткування двоїсту оцінку y_i ($i = \overline{1,4}$). Тоді загальна оцінка устаткування, що використовується у виробництві продукції, складає:

$$F^* = 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4$$

Саме цю величину треба максимізувати.

Згідно умові двоїсті оцінки повинні бути такими, щоб загальна оцінка устаткування, що використовується на виробництво продукції кожного виду, була не менше ціни одиниці продукції даного виду, тобто y_i $(i = \overline{1,4})$ повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 64; \\ 3y_2 + y_3 + y_4 \ge 39; \\ 2y_1 + y_2 + 3y_4 \ge 35; \\ y_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4} \right). \end{cases} \qquad (7.28)$$

і треба знайти розв'язок задачі:

$$F^* = 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 \to min \qquad (7.29)$$

при обмеженнях (7.28).

Як видно, задачі (7.26)-(7.27) і (7.28)-(7.29) утворюють симетричну двоїсту пару задач.

Розв'яжемо (7.26)-(7.27) симплекс-методом. З цією метою перейдемо до канонічного вигляду системи (7.27):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_7 = 4; \\ x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,7} \right). \end{cases}$$

Розширена матриця така:

$$\left(A | b \right) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Вона містить базис одиничних векторів стовпців, тобто початковий допустимий план $x^0 =$ (0, 0, 0, 2, 1, 3, 4) знайдено ($f_0 = 0$).

Складаємо послідовність симплекс-таблиць (див. табл. 7.4).

Таблиця 7.4

i	x_b	c_b	b_b	1	2	-3	1	-2	0	0	b_i/a_{ik}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$a_{ik}>0$
1	x_4	0	2	1	0	2	1	0	0	0	2
2	x_5	0	1	2	3	1	0	1	0	0	0,5
3	x_6	0	3	2	1	0	0	0	1	0	
4	x_7	0	4	1	1	3	0	0	0	1	4
5			0	-64	-39	-35	0	0	0	0	
1	x_4	0	3/2	0	-3/2	3/2	1	-1/2	0	0	1
2	x_1	64	1/2	1	3/2	1/2	0	1/2	0	0	1
3	x_6	0	2	0	-2	-1	0	-1	1	0	
4	x_7	0	7/2	0	-1/2	5/2	0	-1/2	0	1	7/5
5			32	0	57	11/2	0	0	0	0	
1	x_3	35	1	0	-1	1	2/3	-1/3	0	0	
2	x_1	64	0	1	1	0	-1/3	2/3	0	0	
3	x_6	0	3	0	-3	0	2/3	-1/3	1	0	
4	x_7	0	1	0	2	0	-5/3	2	0	1	
5			35	0	54	0	2	31	0	0	

Одержано послідовність із трьох планів x^0, x^1, x^2, де

$$x^0 = (0, 0, 0, 2, 1, 3, 4); \; x^1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 2, \frac{7}{2}\right)$$

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, 3, 1),$$

останній з яких є оптимальним, отже, $x^* = (0, 0, 1, 0, 0, 3, 1)$.

З таблиці 7.4 видно, що оптимальний план виробництва є таким, при якому буде зроблено 1 виріб виду B_3, а вироби виду B_1, B_2 не випускається. При цьому устаткування видів A_1, A_2 повністю використовується, а саме, залишається невикористаним *3* години роботи A_3, 1 година роботи A_4. При цьому загальна вартість виробів складає *35* умовних грошових одиниць. З цієї ж таблиці видно, що, оскільки двоїсті задачі складають симетричну пару, розв'язок двоїстої задачі можна знайти з останнього рядка останньої таблиці $y^* = (2, 31, 0, 0)$.

Змінні y_1^*, y_2^* позначають умовні двоїсті оцінки години роботи обладнання видів A_1, A_2. Ці оцінки ненульові, і обладнання видів A_1, A_2 повністю використовується в оптимальному плані виробництва. Двоїста оцінка обладнання видів A_3, A_4 нульова, і ці види сировини не повністю використовується в оптимальному плані.

Таким чином, наслідком другої теореми двоїстості є те, що додатну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини (у даному випадку сировина - це час роботи устаткування), які повністю використовуються у виробництві. Тому двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини (устаткування), що використовується підприємством. Більш того, величина двоїстої оцінки показує, наскільки зросте максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості відповідного виду сировини (часу роботи устаткування) на одну одиницю. Так у даному випадку, збільшення кількості часу роботи устаткування A_1 на 1 годину призведе до того, що з'явиться можливість знайти новий план виробництва виробів, при якому загальна вартість виробленої продукції зросте на 2 грошові одиниці. При цьому числа, що стоять у стовпці A_4, показують, що вказане збільшення загальної вартості продукції може бути досягнуте за рахунок збільшення випуску виробу B_1 на $\frac{2}{3}$, зменшення випуску виробу B_2 на $\frac{1}{3}$, при цьому буде використано додаткові $\frac{2}{3}$ години роботи устаткування B_3 , і $\frac{5}{3}$ годин роботи устаткування B_4 ще залишиться, але це неможливо, оскільки оптимальний план виробництва не включає виробництво продукції B_2. Це означає, що збільшення лише часу роботи устаткування A_1 не дає можливості збільшення вартості продукції. Таким же самим чином можна сказати, що при збільшенні часу роботи устаткування B_2 є можливість збільшити вартість зробленої продукції на 31 грошову одиницю. Як це може бути досягнуто, дізнаємося з стовпця A_5. З нього видно, що треба випустити продукції B_1 на $\frac{2}{3}$ більше, скоротити випуск B_3 на $\frac{1}{3}$; при цьому устаткування A_3 буде працювати на $\frac{1}{3}$ години більше, а устаткування A_4 – на $\frac{4}{3}$ години менше. Нова точка така $x^{**} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 0, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$ не є допустимою точкою вихідної задачі. Але видно, що якщо, наприклад, збільшити час роботи A_1 на півгодини, то дані останньої симплекс-таблиці дозволяють вказати, за рахунок чого може бути збільшено вартість продукції на $\frac{31}{2}$ грошову одиницю, новий допустимий розв'язок:

$$x^{*\prime} = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right),\ z^* = 35 + 15.5 = 40.5 .$$

Обчислимо мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі: $F^* = 2 \cdot 2 + 31 = 35$. Бачимо, що воно збігається з максимальним значенням цільової функції прямої задачі.

При підстановці оптимальних двоїстих оцінок в систему обмежень двоїстої задачі одержуємо:

$$\begin{cases} 2+2\cdot 31=64; \\ 3\cdot 31>39; \\ 2\cdot 2+31=35; \\ y_i \ge 0\ \left(i=\overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Друге обмеження виконується як строга нерівність. Це означає, що двоїста оцінка обладнання, що використовується у виробництві одного виробу виду B_2, вище за ціну цього виробу, отже випускати цей виріб недоцільно. Його виробництво і не передбачено оптимальними планами вихідної задачі (див. x^*) і допоміжної задачі (див. $x^{*\prime}$). Перше і третє обмеження виконуються як рівність, і це означає, що двоїсті оцінки обладнання, яке використовується у виробництві виробів B_1 і B_2 відповідно, точно дорівнюють їх вартості. Тому випускати ці два види продукції згідно двоїстих оцінок економічно доцільно. І хоча оптимальний план вихідної задачі і не передбачає випуск продукції B_1, але ми бачимо, що це пояснюється лише обмеженістю ресурсів обладнання і щойно час роботи обладнання A_2 хоч трохи збільшується, в оптимальному плані виробництва передбачено випуск продукції A_1.

ТЕМА 8

Питання:
8.1 Двоїстий симплекс-метод

8.1 Двоїстий симплекс-метод

Симплекс-метод (СМ), який ми розглянули вище, на практиці показує сильну залежність від кількості додаткових обмежень m і значно помірніше – від вимірності задачі n. Тому для розв'язування задач великої вимірності пропонується застосовувати не симплекс-метод у його чистому вигляді, а різноманітні його модифікації, які враховують специфіку конкретних задач.

Так, наприклад, модифікований СМ (МСМ), дозволяє на кожному кроці перераховувати тільки частину коефіцієнтів симплекс-таблиць. Це суттєво зменшує обсяг обчислень при реалізації СМ на ЕОМ, а тому, за рахунок значно меншої кількості заокруглень результатів обчислень, це з меншою ймовірністю дає розв'язок, який не є допустимим розв'язком вихідної задачі. Тому цей СМ застосовується для розв'язування ЗЛП великої вимірності на ЕОМ.

Двоїстий симплекс-метод (ДСМ), як і симплекс-метод, використовується для знаходження розв'язку ЗЛП, записаної в канонічній формі. На відміну від СМ, для того, щоб застосувати ДСМ, система додаткових обмежень може бути записана "майже" в канонічному вигляді, а саме: з векторів умов можна скласти одиничний базис m-вимірного простору, але вільні члени рівнянь можуть мати довільні знаки (тобто вектор b не обов'язково задовольняє умову невід'ємності компонент: $b \geq 0$). Це дозволяє в окремих випадках значно зменшити кількість змінних порівняно, наприклад, із задачею, яка розв'язується методом штучного базису.

Так наприклад, двоїста до задачі максимізації з симетричної пари двоїстих задач, за рахунок того, що всі нерівності мають знак "≥", у кононічній формі має $m + 2n$ змінних, у той час, як пряма задача, за рахунок того, що всі нерівності мають знак "≤", розв'язується в просторі з лише $m + n$-ма змінними, що може бути суттєво менше за число $m + 2n$. Треба також зауважити, що, коли така двоїста задача приводиться до канонічного вигляду, останні n стовпців матриці обмежень утворюють одиничну матрицю з точністю до знаку, і в точності одиничну матрицю, якщо поміняти знаки всіх рівнянь. Таким чином пряма і двоїста задачі симетричної пари розв'язуються в просторі $m + n$ змінних, якщо запропонувати модифікацію симплекс-методу, для якого несуттєво, які знаки мають вільні члени системи обмежень.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що m перших стовпців матриці коефіцієнтів утворюють одиничну матрицю (інакше координати можна перенумерувати), тобто розглядається така задача:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{8.1}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b, \tag{8.2}$$

$$x_j \ge 0 \;\; j = \overline{1, n+m}, \tag{8.3}$$

де $\left(A_1,...,A_m\right) = E$, серед b_i $(i = \overline{1,m})$ є і від'ємні, тобто виконано:

$$\exists 1 \le i' \le m : b_{i'} < 0. \tag{8.4}$$

В цьому випадку

$$x^0 = \left(b_1,...,b_m,0,...,0\right) \tag{8.5}$$

є розв'язком системи (8.2), тобто x^0 – допустимий розв'язок (8.1)-(8.2), але не є допустимим розв'язком (8.1)-(8.3), оскільки серед його компонент є також від'ємні.

<u>Означення</u>. Розв'язок x^0 вигляду (8.5) системи лінійних рівнянь (8.2), що визначається базисом $\left\{A_1,...,A_m\right\}$, називається <u>*псевдопланом*</u> задачі (8.6)-(8.8), якщо

$$\Delta_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \tag{8.6}$$

ДСМ здійснює перехід від одного псевдоплану до іншого, тобто при переді до нової точки умова невід'ємності відносних оцінок зберігається. Це означає, згідно критерію оптимальності ЗЛП, що щойно буде знайдено псевдоплан, усі компоненти якого невід'ємні, то знайдена точка план задачі (8.1)-(8.3), для якого виконана умова оптимальності (8.6), тобто ЗЛП розв'язано. Треба зауважити, що кожному псевдоплану задачі (8.1)-(8.3) відповідає план двоїстої задачі (це знову ж таки забезпечується виконанням умови (8.6)). Таким чином, при переході від одного псевдоплану прямої задачі до іншого здійснюється перехід від однієї вершини багатогранної області двоїстої задачі, яка є задачею пошуку мінімуму відповідної цільової функції, до суміжної. Цим пояснюється той факт, що, на відміну від СМ, ДСМ дає на кожній ітерації наближення до z^* у напрямку від більшого до меншого, тобто наближення зверху.

Теорема 8.1. Якщо у псевдоплані вигляду (8.5), що визначається базисом $\{A_1,...,A_m\}$, є хоч одна від'ємна i-а компонента ($i=\overline{1,m}$): $a_{ij} \ge 0$ $j=\overline{1,n}$, то задача (8.1)-(8.3) зовсім не має планів.

Теорема 8.2. Якщо у псевдоплані вигляду (8.5), що визначається базисом $\{A_1,...,A_m\}$, є від'ємні компоненти $x_i^0 < 0$ ($i=\overline{1,m}$), такі, що для будь-якої з них $\exists 1 \le j \le n : a_{ij} < 0$, то можна перейти до псевдоплану, при якому значення цільової функції не зменшиться.

Сформульовані теореми є базою для побудови алгоритму ДСМ. Нехай x^0 вигляду (8.5) – псевдоплан. Складаємо симплекс-таблицю, в якій деякі з компонент стовпця b_b від'ємні. Якщо таких компонент нема, то ЗЛП розв'язано в силу виконання для довільного псевдоплану умови (8.6). Якщо є від'ємні координати стовпця вільних членів, то задача – переходити від однієї симплекс-таблиці до іншої доти, доки з стовпця b_b не будуть виключені всі від'ємні компоненти.

Перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої здійснюється за таким правилом: обирається найбільший за модулем від'ємний елемент стовпця b_b . Вибір числа l визначає номер вектору, який виключається з базису (це вектор A_l). Якщо вибір рядка неоднозначний, то беруть довільний з них, наприклад, l. Для визначення вектору, який потрібно ввести в базис, знаходиться k з умови:

$$-\frac{\Delta_k}{a_{lk}} = \min_{a_{lj}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right). \qquad (8.7)$$

Число a_{lk} – розв'язувальний елемент. Перехід до нової симплекс-таблиці здійснюють за звичайними правилами симплекс-методу. Ітераційний процес продовжують до тих пір, поки в стовпці b_b є від'ємні числа. При цьому знаходять оптимальний план вихідної задачі, а, отже, і двоїстої. Якщо на деякому кроці виявиться, що в i-му рядку симплекс-таблиці стоїть $b_i < 0$ і серед інших елементів цього рядка нема від'ємних, то вихідна задача не має розв'язку.

Приклад 8.1. За допомогою двоїстого симплекс-методу розв'язати задачу (це задача (7.28), (7.29))

$$z = 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 \to min, \tag{8.8}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 64; \\ 3y_2 + y_3 + y_4 \geq 39; \\ 2y_1 + y_2 + 3y_4 \geq 35; \\ y_i \geq 0, \left(i = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Канонічна форма задачі – це (8.8) при обмеженнях:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 - y_5 = 64; \\ 3y_2 + y_3 + y_4 - y_6 = 39; \\ 2y_1 + y_2 + 3y_4 - y_7 = 35; \\ y_i \geq 0, \left(i = \overline{1,7}\right). \end{cases}$$

Система обмежень має такий вигляд, що початковий план вказати досить важко. Але для задачі, двоїстої до даної (це задача (7.26), (7.27)), яка в канонічній формі має вигляд:

$$64x_1 + 39x_2 + 35x_3 \to max\ ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_7 = 4; \\ x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,7}\right), \end{cases} \tag{8.10}$$

одразу можна вказати початковий базисний розв'язок $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3,\ 4)$. Знайдемо відповідний йому псевдоплан вихідної задачі: в точці x^0 на рівності обертаються всі чотири рівняння (8.10), тобто в псевдоплані y^0, у відповідності з другою теоремою двоїстості, змінні y_i ($i = \overline{1,4}$) можуть набувати додатніх значень. Водночас, у точці x^0 останні 4 змінні додатні ($x_i^0 > 0$, $i = \overline{4,7}$), а це, у відповідності з тією ж теоремою, означає, що в точці y^0 на рівність обертаються всі 3 нерівності (8.8), тобто змінні y_i ($i = \overline{5,7}$) у системі (8.9) нульові ($y_i = 0$, $i = \overline{5,7}$), тобто не можуть бути базисними.

Тепер можемо зробити висновок: псевдоплан y^0 вихідної задачі одержується, якщо за базисні змінні взяти $y_b = \left(y_5, y_6, y_7\right)$.

Вектори стовпці A_5, A_6, A_7 утворюють одиничну матрицю з точністю до знаку. Для того, щоб ці вектори в точності складали одиничну матрицю помножимо всі рівняння (8.9) на –1:

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 + y_5 = -64; \\ -3y_2 - y_3 - y_4 + y_6 = -39; \\ -2y_1 - y_2 - 3y_4 + y_7 = -35; \\ y_i \ge 0, \left(i = \overline{1,7}\right). \end{cases}$$

Можна не переходити від задачі мінімізації до задачі максимізації, тоді в ході реалізації двоїстого симплекс-методу значення цільової функції на наступній ітерації буде більше, ніж на попередній. Складаємо послідовність симплекс-таблиць.

Таблиця 8.1

i	y_b	c_b	b_b	-2	-1	-3	-4	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	y_5	0	-64	-1	-2	-2	-1	1	0	0
2	y_6	0	-39	0	-3	-1	-1	0	1	0
3	y_7	0	-35	2	-1	0	-3	0	0	1
4			0	2	1	3	4	0	0	0
	$-\Delta_j / a_{lj}$			2/1	1/2	3/2	4/1			
1	y_2	-1	32	1/2	1	1	1/2	-1/2	0	0
2	y_6	0	57	3/2	0	2	1/2	-3/2	1	0
3	y_7	0	-3	-3/2	0	1	-5/2	-1/2	0	1
4			-32	3/2	0	2	7/2	1/2	0	0
	$-\Delta_j / a_{lj}$			1			7/5	1		
1	y_2	-1	31	0	1	1	1/2	-1/2	0	0
2	y_6	0	54	0	0	2	1/2	-3/2	1	0
3	y_1	-2	2	1	0	-2/3	5/3	1/3	0	-2/3
4			-35	0	0	3	1	0	0	1

Проаналізуємо процес одержання розв'язку задачі. У першій симплекс-таблиці спочатку перевіряємо, чи в кожному її рядку, якому відповідає від'ємна компонента вектору b_b, є від'ємний елемент. Дійсно, це виконується. Визначимо розв'язувальний елемент. Напрямний стовпець визначається найбільшим за модулем від'ємним елементом b_b : $max\{64, 39, 35\} = 64 = b_5$, тобто $l=5$. Для визначення напрямного стовпця доповнимо симплекс-таблицю (m+2)-м рядком, в якому для від'ємних елементів заноситься відношення $\dfrac{\Delta_j}{|a_{lj}|}$. Номер напрямного стовпця визначається найменшим із цих відношень ($min\left\{2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},4\right\} = \frac{1}{2} = \frac{\Delta_2}{|a_{25}|}$), тобто $k = 2$.

Перехід до нової симплекс-таблиці здійснюється за звичайними правилами. На другій ітерації вибір напрямного рядка однозначний: $l = 7$, а вибір напрямного стовпця - ні: ($min\left\{1,\frac{7}{5},1\right\} = 1 = \frac{\Delta_1}{|a_{71}|} = \frac{\Delta_5}{|a_{75}|}$).

У даному випадку було обрано $k = 1$. Після заповнення елементів стовпця b_b бачимо, що новий вектор вільних членів не містить від'ємних координат, тобто, згідно з теоремою 8.1, знайдена точка є не тільки псевдопланом, але і планом вихідної задачі, тобто є її розв'язком. Тому нема потреби заповнювати решту елементів таблиці.

Випишемо одержану послідовність псевдопланів вихідної задачі і відповідних планів двоїстої задачі, і з цією метою заповнимо останній рядок таблиці.

Оскільки двоїсті задачі в даному випадку складають симетричну пару, розв'язки двоїстої задачі можна знайти в останніх трьох компонентах (m+1)-го рядка таблиць.

$$y^0 = (0, 0, 0, 0{,}64{,}39{,}35);\ x^0 = (0, 0, 0);$$

$$y^1 = (0, 32, 0, 0, 0, 57,\ 3);\ x^1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right);$$

$$y^2 = (2, 31, 0, 0, 0, 54, 0);\ x^2 = (0, 0, 1).$$

Запишемо відповідь, враховуючи, що вихідна задача сформульована для трьох змінних, яка, як видно, повністю збігається з результатом, отриманим при розв'язуванні прикладу 7.6.

<u>Відповідь</u>. $y^* = (2, 31, 0),\ z^* = 35$.

<u>Приклад 8.2</u>. Двоїстим симплекс-методом розв'язати задачу:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to max\ ;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18; \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right). \end{cases}$$

Матриця обмежень системи

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

містить лише один одиничний стовпець. З метою виділення одиничного базису, помножимо перше і третє рівняння системи на –1:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -8; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = -18; \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5} \right). \end{cases}$$

Матриця даної системи:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

містить одиничний базис $\{A_3, A_4, A_5\}$.

З метою пошуку початкового псевдоплану складемо задачу, двоїсту до даної.

$$-8y_1 + 10y_2 - 18y_3 \to min \ ;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 2; \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3; \\ -y_1 \ge 0; \\ y_2 \ge 5; \\ -y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Неважко бачити, що точка y^0 = (0, 5, 0) задовольняє останню систему нерівностей, причому останні три нерівності справджуються як рівності, тобто y^0 – вершина багатогранної області двоїстої задачі, їй відповідає псевдоплан вихідної задачі, в якому за базисні змінні треба обрати x_3, x_4, x_5.

Складемо послідовність симплекс-таблиць:

Таблиця 8.2

i	x_b	c_b	b_b	2	1	3	4	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	x_3	0	-8	2	-1	1	0	0
2	x_5	5	10	1	2	0	1	0
3	x_6	0	-18	-3	2	0	0	1
4			50	3	7	0	0	0
4	$-\Delta_j / a_{lj}$			3/3				
1	x_3	0	-16	0	1/3	1	0	2/3
2	x_4	5	4	0	2	0	1	1/3
3	x_1	2	6	1	-2/3	0	0	-1/3
4			32	0	9	0	0	1

Проаналізуємо отриманий результат. При аналізі першої симплекс-таблиці видно, що є два від'ємних елемента в стовпці b_b, тобто початкова точка x^0 = (0, 0, 8, 10, -18) є псевдопланом, і кожному з таких елементів відповідає рядок симплекс-таблиці, який містить від'ємні елементи. Обираємо розв'язувальний елемент і переходимо до нової симплекс-таблиці, у якій в стовпці b_b стоїть від'ємний елемент, але у відповідному йому першому рядку симплекс-таблиці більше немає від'ємних компонент. Згідно з теоремою 8.2, це означає, що система обмежень задачі несумісна, тобто ЗЛП не має розв'язків.

Відповідь. Задача не має розв'язків.

Зауваження. Для застосування двоїстого симплекс-методу потрібно знати початковий псевдоплан, а це задача, яку за складністю можна порівняти з задачею пошуку початкового плану ЗЛП, тому важливо відокремити ті класи задач, коли легко знайти початкові вершини багатогранних областей. Так, наприклад, для симетричної пари двоїстих задач, у випадку, коли коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі мінімізації невід'ємні, при розв'язанні такої задачі можна одразу вказати початковий псевдоплан, отже і застосувати до неї двоїстий симплекс-метод. Дійсно, в даному випадку, помноживши всі рівняння на –1, одержуємо одиничний базис із останніх m векторів стовпців. Таким чином, обравши за початкові базисні змінні множину

$\{y_n, ..., y_{n+m}\}$, ми одразу маємо початковий псевдоплан, оскільки вектор відносних оцінок в даному випадку має властивість:

$$\Delta = c,$$

і за умовою також $c \ge 0$, звідки $\Delta \ge 0$, і точка $y = (0, ..., 0, b_1, ..., b_m)$ – псевдоплан.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Виславский М.Н. Линейная алгебра и линейное программирование / М.Н. Виславский. – Минск : Высш. школа, 1966. – 223 с.
2. Костарчук В.М. Векторні простори і розв’язування задач лінійного програмування / В.М. Костарчук, Л.М. Вивальнюк Л.М. – К. : Радянська школа, 1972. – 208 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1975. – 320 с.
4. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. — Киев: Вища школа, 1975. – 372 с.
5. Матряшин М.П. Математическое программирование / М.П. Матряшин, В.К. Макеева. – Х. : Вища школа, 1978. – 160 с.
6. Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций : Учеб. пособие для вузов / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.С. Михалевич, В.И. Тюптя. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.
7. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование: Учеб. пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М. : Высш. школа, 1980. – 300 с.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов / Ф.П. Васильев. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
9. Деордица Ю.С. Исследование операций в планировании и управлении / Ю.С. Деордица, Ю.М. Нефедов. — Киев: Вища школа, 1991. – 212 с.
10. Григорків В.С. Практикум з математичного програмування: Учбовий посібник для студентів економічних спеціальностей вузів / В.С. Григорків, М.В. Бойчук. – Чернівці: Прут, 1995. – 244 с.
11. Богаєнко І.М. Математичне програмування: Навчальний посібник / І.М. Богаєнко, В.С. Григорків, М.В. Бойчук, М.О. Рюмшин – К.: Логос, 1996. – 266 с.

12. Попов Ю.Д. Методи оптимізації. Навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей “Прикладна математика”, “Інформатика”, “Соціальна інформатика” / Ю.Д. Попов, В.І. Тюптя, В.І. Шевченко – К.: Електронне видання. Ел. бібліотека ф-ту кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка, 2003.−215 с.

13. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : навч. посіб. / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.

14. Українець А. І. Задачі лінійного та нелінійного програмування: навч. посібник / А. І. Українець, А. М. Гуржій, В. В. Самсонов та ін. – К.: НУХТ, 2007. – 208 с.

15. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – СПб. : Лань, 2011. – 352 с.

16. Нефьодов Ю.М. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навч. посіб. / Ю.М. Нефьодов, Т.Ю. Балицька. – К. : Кондор, 2011. – 324 с.

17. Юдин Д.Б. Линейное программирование (теория, методы и приложения) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

18. Абрамов Л.М. Математическое программирование / Л.М. Абрамов, В.Ф. Капустин. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 184 с.

19. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. – М. : Наука, 1977. – 352 с.

20. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

21. Монахов В.М. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике. Пособие для учителей / В.М. Монахов, Э.С. Беляева, Н.Я Краснер. – М. : Просвещение, 1978. – 175 с.

22. Мину М. Математическое программирование : теория и алгоритмы / М. Мину. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

ЗМІСТ