МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ:
ПРАКТИКУМ З ДИСЦИПЛІНИ «МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 113 Прикладна математика,
спеціалізацією «Наука про дані та математичне моделювання»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензенти: *Яблонський П. М., к.т.н., доцент*

Відповідальний редактор *Мальчиков В.В., ст.викладач*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 1.04 2019 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол №7 від 25.02 2019 р.)
Електронне мережне навчальне видання

Ладогубець Тетяна Сергіївна, ст. викладач
Фіногенов Олексій Дмитрович, канд. техн. наук, доц.

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ:

ПРАКТИКУМ З ДИСЦИПЛІНИ «МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Лінійне програмування: практикум з дисципліни «Методи оптимізації»[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «*Наука про дані та математичне моделювання*» / Т. С. Ладогубець, О. Д. Фіногенов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 600 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 61 с.

У навчальному посібнику представлені необхідні дані для виконання практичних робіт з дисципліни «Методи оптимізації»: теоретичні відомості, приклади, завдання для самостійного рішення, рекомендована література. Розглянуті такі питання лінійного програмування (ЛП), як побудова лінійних моделей, геометрична інтерпретація та графічний спосіб розв'язування задач ЛП, застосування симплекс-методу та методу штучного базису для розв'язування задач ЛП.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика», спеціалізацією «Наука про дані та математичне моделювання» факультету прикладної математики НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Ефективність роботи сучасних підприємств, які є складними системами, залежить від якості організаційного управління. Процеси прийняття рішень лежать в основі будь-якої цілеспрямованої діяльності. При формуванні стратегічних і тактичних рішень керівник повинен враховувати безліч часом суперечливих міркувань, спиратися на складні критерії ефективності шляхів досягнення кінцевих цілей. У зв'язку з цим виникла необхідність застосовувати для аналізу і синтезу економічних ситуацій і систем математичні методи і сучасну обчислювальну техніку. Такі методи об'єднуються під загальною назвою – математичне програмування.

Завдання математичного програмування знаходять застосування в різних областях людської діяльності, де необхідний вибір одного з можливих варіантів дій, наприклад при вирішенні багаточисельних проблем управління і планування виробничих процесів, в задачах проектування та перспективного планування, при організації функціонування та розвитку соціальних процесів, їх координації з господарськими та економічними процесами. Оптимальні (ефективні) рішення дозволяють досягати мети при мінімальних витратах трудових, матеріальних і сировинних ресурсів.

Найбільш розробленим в теперішній час розділом математичного програмування є лінійне програмування яке застосовується при розробці методів відшукання екстремуму (максимуму або мінімуму) лінійних функцій декількох змінних при лінійних обмеженнях, накладених на змінні. За типом вирішуваних завдань його методи можна розділити на універсальні і спеціальні. За допомогою універсальних методів (наприклад, симплекс-метод) можуть вирішуватися будь-які завдання лінійного програмування. Спеціальні методи враховують особливості цільової функції і системи обмежень.

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методи і моделі лінійного програмування широко застосовуються при оптимізації процесів у всіх галузях народного господарства: при розробці виробничої програми підприємства, розподілі її по виконавцях, при розміщенні замовлень між виконавцями і по тимчасових інтервалах, при визначенні найкращого асортименту продукції, що випускається, в задачах перспективного, поточного та оперативного планування і управління; при плануванні вантажопотоків, визначенні плану товарообігу і його розподіл; в задачах розвитку і розміщення продуктивних сил, баз і складів матеріальних ресурсів і т.д.

Задача про оптимальний план випуску продукції

На кожному підприємстві при плануванні виробництва виникає задача розробки планів випуску продукції.

Нехай для виготовлення кожного з n видів продукції використовується m видів ресурсів, причому витрата i-го виду ресурсів на одиницю j-го виду продукції становить a_{ij} одиниць. Нехай прибуток від виробництва і реалізації одиниці j-го виду продукції становить c_j. Запаси ресурсів обмежені і становлять відповідно b_i одиниць. x_j – планований обсяг випуску продукції j-го виду.

Потрібно встановити такий план X=(x_1, x_2,..., x_n) випуску продукції, який при заданих обсягах ресурсів забезпечує найбільший сумарний прибуток підприємству.

$$\max\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,...,m, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,...,n.$$

Задача о сумішах

Задача визначення оптимального складу сумішей виникає тоді, коли з наявних видів сировини потрібно отримати шляхом змішування новий вид сировини з заданими характеристиками. При цьому вартість такої суміші повинна бути мінімальною. До даної групи задач відносяться задачі вибору дієти, складання кормового раціону в тваринництві, створення та отримання різних сумішей і сплавів в будівництві, металургії і т.д.

Нехай потрібно скласти суміш з n різних видів сировини, кожен з яких містить m видів елементів (речовин). Нехай a_{ij} - кількість i-ї речовини в одиниці j-го виду сировини, вартість якого дорівнює c_j ($j = 1,...,n$). Позначимо через b_i^m і b_i^B відповідно найменшу та найбільшу допустиму кількість i-ї речовини в суміші, а через d_i - запас або обсяг, яким володіємо на даний планований період часу, сировини j-го виду. Нехай x_j - кількість сировини j-го виду, яку планується використовувати для складання суміші.

Потрібно визначити такий план X=(x_1, x_2,..., x_n) змішування вихідної сировини, при якому досягається мінімальна вартість суміші.

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i^m \quad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i^B \quad i = 1,...,m,$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \quad j = 1,...,n.$$

Задача про розкрій матеріалів

Задача про оптимальний розкрій полягає в розробці таких технологічно допустимих планів розкрою, при яких виходить необхідних комплект заготовок, а відходи (по довжині, площі, обсягу, масі або вартості) зводяться до мінімуму.

Нехай є N штук вихідного матеріалу, довжина кожної штуки дорівнює L. Потрібні заготовки m видів, довжини яких дорівнюють l_i $(i = 1,\dots,m)$. Потреба в заготовках кожного виду дорівнює b_i. При побудові технологічних карт розкрою було виділено n прийнятних варіантів розкрою вихідного матеріалу довжиною L на заготовки довжиною l. Позначимо через a_{ij} кількість заготовок i-го виду, що отримується при розкрої одиниці вихідного матеріалу по j -му ($j = 1,\dots,n$) варіанту, c_j - відходи при розкрої одиниці вихідного матеріалу по j -му ($j = 1,\dots,n$) варіанту.

Потрібно визначити такий план X=(x_1, x_2,..., x_n), де x_j- кількість одиниць вихідного матеріалу, яке планується до розкрою по j -му ($j = 1,\dots,n$) варіанту, при якому досягається найменша кількість відходів.

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le N,$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n.$$

Задача про використання потужностей (завантаження обладнання)

Підприємство має план виробництва продукції за часом і за номенклатурою: потрібно за час T випустити $n_1, n_2, ..., n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2, ..., P_k$. Продукція виробляється на верстатах $S_1, S_2, ..., S_m$. Для кожного верстата відомі продуктивність a_{ij} (тобто число одиниць продукції P_j, яке можна зробити на верстаті S_i) і витрати c_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i в одиницю часу. Позначимо x_{ij} - час, протягом якого верстат S_i $(i = 1, ..., m)$ буде зайнятий виробництвом продукції P_j $(j = 1, ..., k)$.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто так розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

$$\min f(x) = \sum_{i}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = n_i \quad j = 1, ..., k,$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le T \quad i = 1, ..., m,$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., k$$

.

ВПРАВИ

Побудувати математичні моделі для наступних задач лінійного програмування.

Задача 1. Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна на добу споживати білків не менше 120 умовних одиниць (ум. од.), Жирів - не менше 70 і вітамінів - не менше 10 ум. од. Зміст їх в кожній одиниці продуктів П1 і П2 дорівнює відповідно (0,2; 0,075; 0) і (0,1; 0,1; 0,1) ум. од. Вартість 1 од. продукту П1 - 2 грн., П2 -3 грн. Потрібно так організувати харчування, щоб організм отримав необхідну кількість поживних речовин при мінімальній вартості продуктів.

Задача 2. З пункту А в пункт В щодня відправляються пасажирські і швидкі поїзди. Дані про організацію перевезень наступні:

Поїзди	**Кількість вагонів в поїзді**				
	багажний	**поштовий**	**плацкарт**	**купе**	**СВ**
швидкий	1	1	5	6	3
пасажирский	1	-	8	4	1
кількість пасажирів	-	-	58	40	32
парк вагонів	12	8	81	70	26

Потрібно визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських поїздів, для перевезення максимального кількість пасажирів.

Задача 3. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в господарствах відповідно витрачається по 1, 6 та 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити на продаж відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Задача 4. Фермерське господарство спеціалізується на вирощуванні озимої пшениці і має три ділянки землі площею $S_1 = 40$ га, $S_2 = 90$ га, $S_3 = 55$ га. Враховуючи наявну кількість посівного матеріалу, є можливість засіяти всю площу озимою пшеницею трьох сортів. Кількість пшениці сорту «Миронівська-808» забезпечить посів на 80 га, «Безоста-1» — 60 га та «Одеська — 51» — 45 га. Урожайність сорту «Миронівська-808» на даних ділянках становить відповідно 41 ц/га, 40 ц/га, 46 ц/га. Аналогічно для сорту «Безоста-1» маємо: 38 ц/га, 41 ц/га, 45 ц/га, а для «Одеської-51»—30ц/га, 28 ц/га, 40 ц/га. Необхідно розподілити посівний матеріал за земельними ділянками так, щоб отримати максимальний урожай (валовий збір) озимої пшениці.

Задача 5. При відгодівлі кожна тварина має отримати не менше 9 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два виду корму, представлених в таблиці нижче.

Поживні речовини	**Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг**	
	корм 1	**корм 2**
білки	3	1
вуглеводи	1	2
протеїн	1	6

Вартість 1 кг корму першого виду – 4 грн., другого – 6 грн. Потрібно скласти денний раціон годування, що має мінімальну вартість.

Задача 6. Цех випускає трансформатори двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовуються залізо і дріт. Загальний запас заліза - 3 тонни, дроту - 18 тонн. На один трансформатор першого виду витрачаються 5 кг заліза і 3 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачаються 3 кг заліза і 2 кг дроту. За кожний реалізований трансформатор першого виду завод отримує прибуток 300 грн., другого – 400 грн. Потрібно скласти план випуску трансформаторів, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Задача 7. Нафтопереробний завод отримує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкилата, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентона. В результаті змішування цих чотирьох компонентів в різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: бензин А - 2: 3: 5: 2, бензин В - 3: 1: 2: 1, бензин С - 2: 2: 1: 3. Вартість 1 тис. л зазначених сортів бензину характеризується числами 120 гр.од., 100 гр.од., 150 гр.од. Потрібно скласти план випуску різних сортів авіаційного бензину з умови отримання максимальної вартості всієї продукції.

Задача 8. Звіроферма вирощує чорно-бурих лисиць і песців. На звіроферми є 10 000 клітин. В одній клітці можуть бути або 2 лисиці, або 1 песець. За планом на фермі має бути не менше 3000 лисиць і 6000 песців. В одну добу необхідно видавати кожної лисиці корми - 4 од., а кожному песцеві - 5 од. Ферма щодня може мати не більше 200 000 одиниць корму. Від реалізації однієї шкурки лисиці ферма отримує прибуток 100 гр.од., а від реалізації однієї шкурки песця - 50 гр.од. Визначити яку кількість лисиць і песців потрібно тримати на фермі, щоб отримати найбільший прибуток.

Задача 9. У фермерському господарстві є дві грунтово-кліматичні зони, площі яких відповідно рівні 0,8 і 0,6 млн. Га. Дані про врожайність зернових культур наведені в наступній таблиці.

Зернові культури	**Урожайність (ц / га)**		**Вартість 1 ц, гр.од.**
	1-га зона	**2-га зона**	
озимі	20	25	8
ярові	25	20	7

Визначте розміри посівних площ озимих і ярих культур, необхідні для досягнення максимального виходу продукції у вартісному вираженні.

Задача 10. При виготовленні виробів П1 і П2 використовуються сталь і кольорові метали, а також токарні та фрезерні верстати. За технологічними нормами на виробництво одиниці виробу П1 потрібно 300 і 200 станко-годин відповідно токарного і фрезерного обладнання, а також 10 і 20 кг відповідно сталі і кольорових металів. Для виробництва одиниці виробу П2 потрібно 400, 100, 70 та 50 відповідних одиниць тих же ресурсів. Цех має 12400 і 6800 станко-години відповідно токарного і фрезерного обладнання і 640 і 840 кг відповідно сталі і кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці виробу П1 становить 6 грн. і від одиниці виробу П2 – 16 грн. Потрібно скласти план випуску виробів П1 і П2, щоб забезпечити заводу максимальний прибуток, враховуючи, що час роботи фрезерних верстатів повинно бути використано повністю.

Задача 11. З трьох продуктів - I, II, III складається суміш. До складу суміші має входити не менше 6 од. хімічної речовини А, 8 од. - речовини В і не менше 12 од. речовини С. Структура хімічних речовин приведена в таблиці нижче.

Продукт	**Зміст хімічної речовини в 1 од. продукції**			**Вартість 1 од. продукції**
	А	**В**	**С**	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Потрібно визначити склад суміші, яка має найменшу вартість.

Задача 12. Завод повинен переслати замовнику 1100 деталей. Деталі для пересилання упаковуються в ящики. В наявності є ящики трьох типів. Ящик першого типу вміщує 70 деталей, другого типу - 40 деталей, третього типу – 25 деталей. Вартість пересилання ящика першого типу 20 грн., 2-го типу 10 грн., 3- го типу, 7 грн. Потрібно визначити які ящики повинні використовуватися, щоб вартість пересилки була найменшою. Недовантаження ящиків не допускається.

Задача 13. Для участі в змаганнях спортклуб повинен виставити команду, що складається зі спортсменів I і II розрядів. Змагання проводяться по Бузі, пряжкам в висоту, стрибках в довжину. У бігу повинні брати участь 5 спортсменів, в стрибках в довжину - 8 спортсменів, а в стрибках у висоту - не більше 10. кількість очок, гарантованих спортсмену кожного розряду за кожним видом, зазначено в таблиці.

Розряд	**Біг**	**Стрибки у висоту**	**Стрибки в довжину**
I	4	5	5
II	2	3	3

Потрібно розподілити спортсменів в команди так, щоб сума очок команди була найбільшою, якщо відомо, що в команді I розряд мають тільки 10 спортсменів.

Задача 14. На заводі випускають вироби чотирьох типів. Від реалізації 1 од. кожного виробу завод отримує прибуток відповідно 2, 1, 3, 5 гр.од. На виготовлення виробів витрачаються ресурси трьох видів: енергія, матеріали, праця. Дані про технологічний процес наведені в наступній таблиці.

Ресурси	**Витрати ресурсів на одиницю виробу**				**Запаси ресурсів, од.**
	I	**II**	**III**	**IV**	
енергія	2	3	1	2	30
матеріали	4	2	1	2	40
праця	1	2	3	1	25

Визначити план виробництва виробів, щоб отриманий прибуток від їх реалізації був найбільшим.

Задача 15. Відомо, що 1 кг вишні містить 150 мг вітаміну С, а 1 кг абрикосів - 75 мг вітаміну С. Потрібно визначити кількість вишні і абрикосів, яку слід включити в денний раціон, щоб при мінімальних витратах в ньому виявилося 75 мг вітаміну С і не менше 0,25 кг вишні, якщо 1 кг вишні коштує 30 грн., а 1 кг абрикосів 40 грн.

Задача 16. Меблева фабрика випускає крісла двох видів. На виготовлення крісла першого типу витрачається 2 м дошки стандартного перерізу, 0,8 $м^2$ оббивної тканини і витрачається 2 людино-години, а на виготовлення крісла другого типу відповідно 4 м, 1,25 $м^2$ і 1,75 людино-годин. Фабрика має в наявності 400 м дощок, 1500 м2 оббивної тканини і може витратити 3200 осіб-годин робочого часу на виготовлення цієї продукції. Відомо, що ціна одного крісла першого типу дорівнює 15 гр.од., а другого типу - 20 гр.од. Потрібно визначити план виробництва крісел, який забезпечить фабриці максимальний прибуток.

Задача 17. Фермерському господарству виділено для обробітку кормових культур 100 га ріллі. Цю ріллю передбачається зайняти кукурудзою і буряками, причому буряком вирішено зайняти не менше 40 га. При цьому повинно бути враховано наступне: 1 ц кукурудзяного силосу містить 0,2 ц кормових одиниць, 1 ц буряків 0,26 ц кормових одиниць; на обробіток 1 га кукурудзяного і бурякового поля витрачається відповідно, 43 і 158 людино-годин; очікуваний урожай кукурудзи 500 ц з 1 га, а буряка 200 ц з 1 га; всього на обробіток кормових культур можна витратити 4000 чоловік-годин праці. Потрібно визначити розподіл площі ріллі по культурам, щоб отримати найбільшу кількість кормових одиниць.

Задача 18. Меблевий цех має 1 $м^3$ дощок, з яких треба виготовити табуретки і столи. Відомо, що на виготовлення табуретки витрачається 0,0125 $м^3$, а на виготовлення стола - 0,05 $м^3$ дощок. При цьому на виготовлення табуретки витрачається 2 людино-години, а столу - 3 людино-години, продаються вони за ціною, відповідно, 90 і 400 грн. Цех має резерв в 90 людино-годин. Потрібно визначити план виробництва табуреток і столів для отримання максимального прибутку.

Задача 19. На велосипедному заводі випускаються гоночні і дорожні велосипеди. Виробництво побудовано так, що замість двох дорожніх велосипедів завод може випустити один гоночний велосипед, який приносить в 1,5 рази більше прибутку, ніж один дорожній велосипед. Завод може призвести 700 дорожніх велосипедів в день, проте, склад може прийняти не більше 500 велосипедів в день. Потрібно визначити план виробництва гоночних і дорожніх велосипедів для отримання максимального прибутку.

Задача 20. Сільськогосподарському підприємству потрібно не більше 10 тритонних автомашин і не більше 8 п'ятитонних. Відпускна ціна машини першої марки 2000 гр.од., другий марки 4000 гр.од. Підприємство може виділити для придбання машин 40 000 гр.од. Потрібно визначити яку кількість автомашин кожної марки треба придбати, щоб їх загальна (сумарна) вантажопідйомність була максимальною.

Задача 21. Фермерське господарство відвело три земельні масиви розміром 5000, 8000 і 9000 га на посіви жита, пшениці та кукурудзи. Середня врожайність в центнерах на 1 га по масивах вказана в таблиці нижче.

Посіви	**Массивы**		
	I	**II**	**III**
жито	12	14	15
пшениця	14	14	22
кукурудза	30	35	25

За 1 центнер жита господарство отримує 2 гр.од., за 1 центнер пшениці - 2,8 гр.од., за 1 центнер кукурудзи - 1,4 гр.од. Господарство за планом зобов'язано здати не менше 1900 тонни жита, 158 000 тонни пшениці і 30 000 тонн кукурудзи. Потрібно визначити план посіву (скільки гектарів і на яких масивах відвести на кожну культуру) для отримання максимального прибутку.

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В загальному випадку задача лінійного програмування (ЗЛП) формулюється наступним чином :

$$\min\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = 1,\dots,m,$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n. \tag{2}$$

Рішенням (планом) ЗЛП називається вектор x^*, для якого виконуються всі обмеження (2). Тоді оптимальним рішенням (планом) ЗЛП є таке допустиме рішення, яке оптимізує (мінімізує або максимізує) цільову функцію (1).

Рішення ЗЛП базується на наступних теоремах:

<u>Теорема 1.</u>

Множина всіх допустимих значень опукла.

<u>Теорема 2.</u>

Множина допустимих значень ЗЛП з умовами (2) завжди містить в собі кінцеву кількість крайніх точок.

<u>Теорема 3.</u>

Цільова функція (1) ЗЛП (1)–(2) досягає свого екстремуму в крайній точці опуклої області, що є множиною допустимих рішень цієї задачі.

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ТА ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кожне з лінійних рівнянь визначає в n-вимірному просторі деяку гіперплощину Кожна лінійна нерівність визначає в цьому же просторі опуклу множину – півпростір. Сукупність всіх допустимих рішень системи обмежень (2) є перетин гіперплощин та на півпросторів, тобто опуклий простір. Таким чином, рішення ЗЛП (1)–(2) полягає в визначенні екстремуму на деякій опуклій множині. Якщо ця множина обмежена, то вона представляє собою багатогранник в n-вимірному просторі. В загальному випадку сукупність допустимих рішень ЗЛП може бути площиною, півпростором, необмеженим або обмеженим багатогранником, прямою, напівпрямою, відрізком, точкою, пустою множиною.

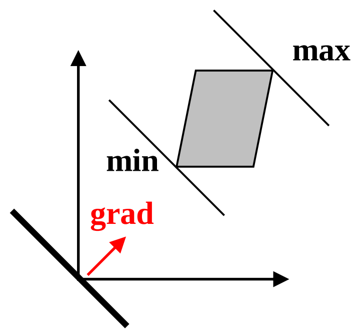
З’ясуємо геометричну суть цільової функції. Усі лінії рівня лінійної функції $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ прямі, або площини, або гіперплощини ($n \geq 4$). Екстремальні точки допустимих рішень ЗЛП є кутовими точками цієї області. Це підтверджується властивістю градієнта лінійної цільової функції (1), котрий вказує напрям найшвидшого зростання цієї функції (антиградієнт функції в цій точці вказує напрям найшвидшого спадання функції).

В кожній точці площини градієнт постійний та співпадає з вектором, який складається з коефіцієнтів функції при змінних $grad(z)=(c_1, c_2, \ldots, c_n)=\bar{c}$. Вектор - градієнт лінійної функції перпендикулярний кожній її лінії (площині) рівня.

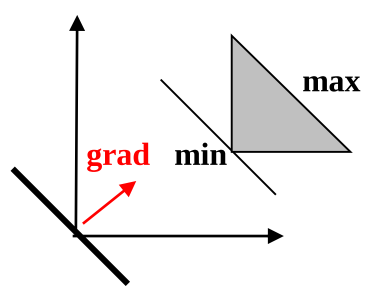
Для знаходження кутових точок треба побудувати яку-небудь лінію (площину) рівня цільової функції: наприклад, $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$, та, пересуваючи її паралельно до самої себе в напрямку області допустимих рішень, визначити екстремальні точки цільової функції. Кутова точка, знайдена за допомогою паралельного пересування в напрямку градієнта, відповідає максимальному значенню цільової функції, а в напрямку антиградієнту – мінімальному значенню цільової функції.

Розглянемо можливі випадки:

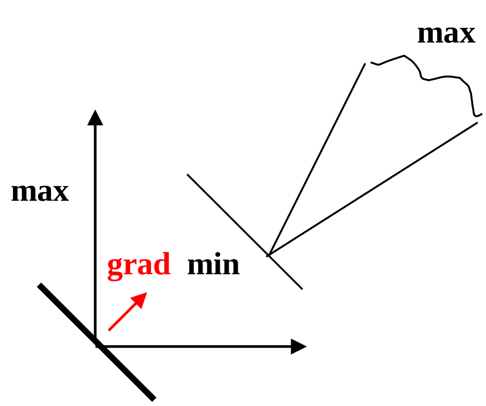
1. Єдине оптимальне рішення.



2. Неєдине оптимальне рішення.



3. Якщо безліч даних рішень необмежено, то цільова функція може мати необмежений екстремум.



Обмеженість на невід'ємність змінних завжди гарантує обмеженість одного з екстремумів лінійної цільової функції.

З геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування отримаємо графічний метод розв'язування цієї задачі:

1. побудувати графіки граничних прямих на площині;
2. виділити область рішення нерівностей системи;
3. побудувати область допустимих розв'язків;
4. побудувати вектор-градієнт та лінію рівня цільової функції;
5. визначити екстремальні точки;
6. обчислити значення цільової функції в отриманих точках.

У разі обмеженості області допустимих рішень можна обчислити значення цільової функції у всіх вершинах області: мінімальне значення - мінімум цільової функції, максимальне значення - максимум цільової функції.

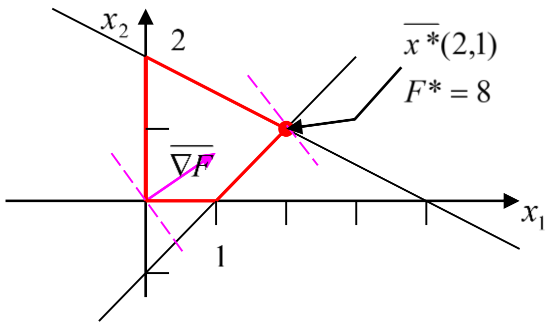
Приклад.

$$F(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розглянемо пряму $x_1 + 2x_2 = 4$. При $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, а при $x_1 = 4,\ x_2 = 0$. Таким чином, ця пряма проходить через точки (0,2) і (4,0). Беручи $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ отримаємо, що 0+0<4 і тому напівплощина, що цікавить нас, лежить нижче прямої $x_1 + 2x_2 = 4$.

Розглянемо пряму $x_1 - x_2 = 1$. При $x_1 = 0,\ x_2 = -1$, а при $x_1 = 1,\ x_2 = 0$. Таким чином, ця пряма проходить через точки (0,-1) і (1,0). Беручи $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ отримаємо, що 0-0<1 і тому напівплощина, що цікавить нас, лежить нижче прямої $x_1 - x_2 = 1$.



Додаючи умови $x_1, x_2 \geq 0$, отримаємо область (опуклий багатокутник), в якій виконуються одночасно всі обмеження.

Побудуємо вектор-градієнт (3,2) та пряму лінії рівня цільової функції. Пересуваємо цю пряму паралельно самій собі в напрямку градієнта, вказаному стрілкою. Остання точка дотику з областю відповідає точці з максимальним значенням цільової функції.

Виділена вершина лежить на перетині двох прямих, її координати знаходимо як розв'язок системи двох лінійних рівнянь, що відповідають цим прямим:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}.$$

Отримаємо єдиний оптимальний розв'язок - точку з координатами (2,1). При цьому значення цільової функції $F^* = 8$.

Якщо оптимальне рішення не єдине, тоді множина оптимальних розв'язків нескінченна; вона складається із всіх точок деякої сторони багатогранника, яка паралельна лінії рівня цільової функції. В даному випадку для обчислення значення цільової функції можна використовувати координати будь-якої точки з цієї множини оптимальних розв'язків.

ВПРАВИ

Розв'язати графічно наступні задачі лінійного програмування:

1. $$\begin{cases} z = 5x_1 + 8x_2 \to \max \\ 9x_1 + 4x_2 \le 108 \\ -4x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} z = 9x_1 + 6x_2 \to \max \\ 9x_1 + 3x_2 \le 54 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} z = 6x_1 + 9x_2 \to \max \\ 8x_1 + 7x_2 \le 112 \\ -3x_1 + 7x_2 \le 84 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} z = x_1 + 8x_2 \to \max \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ -x_1 + 9x_2 \le 27 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} z = 5x_1 + 6x_2 \to \max \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} z = 8x_1 + 7x_2 \to \max \\ 5x_1 + 4x_2 \le 60 \\ -x_1 + 7x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} z = 4x_1 + 7x_2 \to \max \\ 5x_1 + 6x_2 \le 90 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} z = 3x_1 + 6x_2 \to \max \\ 9x_1 + x_2 \le 36 \\ -7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} z = 4x_1 + 7x_2 \to \max \\ 7x_1 + 9x_2 \le 252 \\ -2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} z = x_1 + 7x_2 \to \max \\ 6x_1 + 5x_2 \le 120 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} z = 7x_1 + 6x_2 \to \max \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ -9x_1 + 4x_2 \le 36 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} z = x_1 + 6x_2 \to \max \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40 \\ -7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

13. $\begin{cases} z = 6x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 8x_1 + x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} z = 6x_1 + 6x_2 \to \max \\ 9x_1 + 2x_2 \le 18 \\ -5x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} z = 3x_1 + 7x_2 \to \max \\ 3x_1 + 3x_2 \le 18 \\ -x_1 + 7x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} z = 3x_1 + 7x_2 \to \max \\ 3x_1 + 3x_2 \le 18 \\ -x_1 + 7x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} z = 5x_1 + 9x_2 \to \max \\ 9x_1 + 3x_2 \le 27 \\ -2x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} z = 9x_1 + 8x_2 \to \max \\ 9x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 6x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} z = 5x_1 + 2x_2 \to \max \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} z = 9x_1 + 8x_2 \to \max \\ 9x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 6x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} z = 2x_1 + 7x_2 \to \max \\ 9x_1 + 4x_2 \le 36 \\ -2x_1 + 6x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} z = 3x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + 8x_2 \le 24 \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} z = 7x_1 + 9x_2 \to \max \\ 7x_1 + x_2 \le 7 \\ -x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} z = 3x_1 + 9x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -2x_1 + 9x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У випадку обмеженості області допустимих рішень можна обчислити значення цільової функції у всіх вершинах області і перебором усіх вершин знайти таку вершину, у якій цільова функція приймає екстремальне значення. Але такий метод може виявитися надто трудомістким при великий кількості змінних та обмежень. Тому для розв'язання задачі лінійного програмування використовується симплекс-метод, в основі якого лежить цілеспрямований рух по суміжним вершинам області допустимих рішень.

Симплекс-метод

Підготовчим етапом для розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-методу є перетворення загальної ЗЛП в канонічну ЗЛП в стандартній формі. Канонічна форма ЗЛП має наступний вигляд:

$$\min\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\dots,m, \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n. \end{gathered} \qquad (2)$$

Задачу максимізації лінійної функції завжди можна звести до задачі мінімізації лінійної функції при тих самих обмеженнях:

$$\max(f(x)) = -\min(-f(x)).$$

Перетворення нерівностей в рівність виконується шляхом введення допоміжних невід'ємних змінних:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad b_i \ge 0, \quad x_{n+1} \ge 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad b_i \ge 0, \quad x_{n+1} \ge 0.$$

Рішення будь-якої лінійної системи нерівностей і рівнянь завжди можна звести до рішення деякої системи лінійних рівнянь з невід'ємними змінними. Будь-яке дійсне число завжди можна представити в вигляді різниці двох невід'ємних чисел:

$$x_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)},$$

де $x_j^{(1)} \ge 0, \quad x_j^{(2)} \ge 0$.

В канонічній системі рівнянь кожному рівнянню відповідає рівно одна базисна змінна. Змінні $x_1, \ldots, x_m$, які входять з одиничними коефіцієнтами тільки в одне з рівнянь системи і з нульовими коефіцієнтами в інші, називається базисними або залежними. Інші $n-m$ змінних називаються небазисними або незалежними (вільними) змінними.

Базисним рішенням системи в канонічному вигляді називається рішення, отримане при нульових значеннях вільних змінних.

Базисне рішення називається допустимим базисним рішенням, якщо значення змінних, котрі входять нього невід'ємні.

Суміжне допустиме базисне рішення відрізняється від поточного рішення тільки однією базисною змінною.

Оптимальні рішення ЗЛП знаходяться на поверхні області допустимих рішень, яка являє собою опуклий багатогранник. В основі симплекс-методу лежить цілеспрямований перебір вершин даного багатограника. При цьому рух до оптимальної вершині здійснюється по суміжних вершинах області.

Загальна схема розв'язування ЗЛП за допомогою симплексного методу полягає в наступній послідовності дій:

- приведення загальної ЗЛП до канонічної ЗЛП,
- вибір початкового допустимого базисного рішення,
- перехід від початкового базисного рішення до суміжного допустимому базисного розв'язку з кращим значенням цільової функції,
- продовження пошуку допустимих базисних рішень, що поліпшують значення цільової функції. Якщо існуюче допустиме базисне рішення поліпшити не можна воно є оптимальним.

Приклад.

Мінімізувати функцію $f(x) = -x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

<u>Вирішення.</u>

Перетворюємо обмеження типу нерівності в рівності за допомогою введення додаткових невід'ємних змінних:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

Виділяємо базисні змінні і висловлюємо їх через вільні змінні. Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням (ДБР).

$$\begin{cases} x_3 = 7\text{-}2x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 2 + x_1 - x_2 \\ x_5 = 8\text{-}x_1 - 2x_2 \end{cases} \rightarrow \quad \text{ДБР:} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 8 \end{cases}$$

Дане базисне рішення не є оптимальним, оскільки значення цільової функції може бути зменшено за рахунок збільшення x_1. Зробимо x_1 базисною змінною помінявши її з однією з вільних змінних.

$$\begin{cases} x_3 = 0 \quad x_1 = 3.5 \\ x_5 = 0 \quad x_1 = 8 \end{cases}$$

але при x_1=8 $\rightarrow$ x_3<0, тому поміняємо $x_1 \leftrightarrow x_3$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 2 + x_1 - x_2 = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_5 = 8\text{-}x_1 - 2x_2 = \frac{9}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{11}{2} \\ x_5 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням.

Запишемо вираз цільової функції через вільні змінні і обчислимо її значення:

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$\min\ f(x) = -\frac{7}{2}.$$

Обидва коефіцієнта при вільних змінних у виразі цільової функції ≥ 0, значить, цільову функцію $f(x)$ зменшити не можна, отже це рішення є оптимальним. Якщо в цільової функції один з коефіцієнтів при вільних змінних дорівнює 0, це означає, що дане оптимальне рішення не єдине, тобто існує безліч оптимальних рішень.

Альтернативні оптимальні рішення

Коли пряма або площина (гіперплоскость), що представляє лінію рівня цільової функції, паралельна прямій або площині (гіперплощині), що відповідає активному обмеженню, цільова функція приймає одне і теж оптимальне значення в деякій сукупності точок області рішень. Такі рішення називаються альтернативними оптимальними рішеннями. При цьому зазвичай існує безліч альтернативних оптимальних рішень. За допомогою симплекс-методу вдається ідентифікувати лише кутові точки. Але при вирішенні задачі буде отримана ознака того, що це рішення є не єдиним.

Приклад.

Максимізувати функцію $f(x) = 2x_1 + 4x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вирішення.

Від задачі максимізації перейдемо до задачі мінімізації: :

$$\min(-f(x)) = -2x_1 - 4x_2$$

Перетворюємо обмеження типу нерівності в рівності за допомогою введення додаткових невід'ємних змінних:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Виділяємо базисні змінні і висловлюємо їх через вільні змінні. Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням (ДБР).

$$\begin{cases} x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 4 - x_1 - x_2 \end{cases} \quad \rightarrow \qquad \text{ДБР:} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Дане базисне рішення не є оптимальним, оскільки значення цільової функції може бути зменшено за рахунок збільшення x_1 або x_2, але змінна x_2 має найбільший по абсолютній величині коефіцієнт, тому збільшення змінної x_2 забезпечить якнайшвидше зменшення значення цільової функції. Тому зробимо x_2 базисною змінною, помінявши її зі змінною x_3.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 4 - x_1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням.

Запишемо вираз цільової функції через вільні змінні і обчислимо її значення:

$$-f(x) = -2x_1 - \frac{20}{2} + 2x_1 + 2x_3 = -10 + 2x_3 + 0*2x_1$$

min(- $f(x)$) = -10, отже max $f(x)$ = 10.

Розглянемо значення коефіцієнтів при вільних змінних в рівнянні цільової функції. Нульове значення коефіцієнта при вільної змінної x_1 свідчить про те, що її включення в базис не змінить значення цільової функції, хоча і призведе до зміни значень інших змінних, тобто є ознакою наявності альтернативних оптимальних рішень.

Необмежений екстремум

При наявності необмеженої області допустимих розв'язків ЗЛП цільова функція може мати необмежений екстремум. В такому випадку в задачі максимізації цільова функція прагне до + ∞, а в задачі мінімізації цільова функція прагне до -∞.

Приклад.

Мінімізувати функцію $f(x) = -2x_1 - x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вирішення.

Перетворюємо обмеження типу нерівності в рівності за допомогою введення додаткових невід'ємних змінних:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_4 = 40 \end{cases}$$

Виділяємо базисні змінні і висловлюємо їх через вільні змінні. Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням (ДБР).

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 40 - 2x_1 \end{cases} \quad \to \quad \text{ДБР:} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 10 \\ x_4 = 40 \end{cases}$$

Дане базисне рішення не є оптимальним, оскільки значення цільової функції може бути зменшено за рахунок збільшення x_1. Зробимо x_1 новою базисною змінною помінявши її змінною x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - x_3 + x_2 \\ x_4 = 40 - 2x_1 = 40 - 20 - 2x_2 + 2x_3 = 20 + 2x_3 - 2x_2 \end{cases}$$

Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 20 \end{cases}$$

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням:

Запишемо вираз цільової функції через вільні змінні і обчислимо її значення:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 = 20 - 3x_2 + 2x_3,$$
$$f(x) = 20.$$

Загальне правило виявлення необмеженого розв’язку: якщо на деякій ітерації вільна змінна має в обмеженнях типу « $\leq$ » від’ємний коефіцієнт, (наприклад, змінна x_2) простір рішень задачі в даному напрямку не обмежено. Якщо крім цього коефіцієнт при цій змінній в рівнянні цільової функції також від’ємний (в задачі мінімізації), то цільова функція також необмежена, тобто має необмежений мінімум.

Виродженість і зациклення

Задача лінійного програмування є невиродженою, якщо базисне рішення містить рівно m додатних компонент, де m - число обмежень у задачі. У виродженому рішенні число додатних компонент виявляється менше числа обмежень: деякі базисні змінні, відповідні даному рішенню, приймають нульові значення. Використовуючи геометричну інтерпретацію можна легко відрізнити вироджену задачу від невиродженої. У виродженої задачі в одній вершині багатогранника допустимої області перетинається більше двох прямих, Якщо задача лінійного програмування виявляється виродженою, то при поганому виборі змінної, що виводиться з базису, може виникнути зациклення, тобто повернення до вихідного рішення. Для того, щоб уникнути зациклення, необхідно в будь-якій вершині пройденого шляху, де при виборі напрямку руху існують кілька варіантів допустимих напрямків, вибрати той напрямок, який не вибирався раніше.

Приклад.

Мінімізувати функцію $f(x) = -3x_1 - 9x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вирішення.

Перетворюємо обмеження типу нерівності в рівності за допомогою введення додаткових невід'ємних змінних:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Виділяємо базисні змінні і висловлюємо їх через вільні змінні. Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, отже, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням (ДБР).

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 4 - x_1 - 2x_2 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{ДБР:} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 8 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Дане базисне рішення не є оптимальним, оскільки значення цільової функції може бути зменшено за рахунок збільшення x_2. Зробимо x_2 новою базисною змінною помінявши її зі змінною x_3:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 = 2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_4 = 4 - x_1 - 4 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо базисне рішення.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Оскільки всі змінні базисного рішення є невід'ємними, дане базисне рішення є допустимим базисним рішенням але замість двох додатних компонентів вектора рішень маємо тільки один x_2. Отже це базисне рішення є виродженим.

Запишемо вираз цільової функції через вільні змінні і обчислимо її значення:

$$f(x) = -3x_1 - 18 + \frac{9}{4}x_1 + \frac{9}{4}x_3 = -18 - \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{4}x_3,$$
$$f(x) = -18$$

Дане базисне рішення не є оптимальним, оскільки значення цільової функції може бути зменшено за рахунок збільшення x_1. Зробимо x_1 новою базисною змінною помінявши її зі змінною x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 = 2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_4 = 4 - x_1 - 4 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Привласнюючи вільним змінним нульове значення, отримуємо таке ж саме вироджене базисне рішення.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишемо вираз цільової функції через вільні змінні і обчислимо її значення:

$$f(x) = -18 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{9}{4}x_3 = -18 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4,$$
$$f(x) = -18.$$

Оскільки дане базисне рішення поліпшити неможливо, отже воно є оптимальним. Останні два базисних рішення є виродженими і хоча в базис входять різні змінні, значення цільової функції при цих рішеннях залишилося незмінним.

Табличний симплекс-метод

Симплекс-метод використовує так звані симплекс-таблиці. Для заповнення симплекс-таблиці необхідно записати канонічну ЗЛП в такій стандартній формі:

$$\min_{x_j} f(x) = c_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \right),$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \right), \\ \ldots \\ x_{n+m} = b_m - \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \right), \end{cases}$$

де ($x_1 - x_n$) – вільні змінні, ($x_{n+1} - x_{n+m}$) – базисні змінні, $j = 1(1)n$.

В симплекс-таблицю (табл. 1) записуються старі та нові значення змінних. Старі значення змінних розміщуються в верхньому лівому куту кожної клітинки, а нові значення (після проведення ітерації симплекс-методу) - в нижньому правому куту клітинки.

Алгоритм симплекс-методу включає в себе такі кроки:

1) перевірка базисного рішення на допустимість тобто $b_j \geq 0$, якщо що всі значення $b_j \geq 0$, перейти до п.2, інакше перейти до п.5;

2) перевірка оптимальності цільової функції. Умова оптимальності: $\gamma_i \leq 0$ (коефіцієнти при вільних змінних в цільовій функції не додатні). Виконання умови оптимальності вказує на одержання оптимального розв’язку задачі. Наявність нульових значень коефіцієнтів при вільних змінних в рівнянні цільової функції ідентифікує наявність нескінченної множини альтернативних оптимальних рішень. Якщо умова оптимальності не виконується, перейти до п.3;

Таблиця 1. **Симплекс-таблиця**

Базисні змінні	**Вільні члени**	**Вільні змінні**			
		x_1	x_2	**…**	x_n
x_{n+1}	b_1 b_1/α_{12}	α_{11} $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}$	α_{12} $\dfrac{1}{\alpha_{12}}$	…	α_{1n} $\dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}$
…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m $b_m+\dfrac{b_1}{\alpha_{12}}\cdot\left(-\dfrac{\alpha_m}{\alpha_{12}}\right)$		α_{m2} $-\dfrac{\alpha_{m2}}{\alpha_{12}}$	…	
z	c_0	j_1	j_2 $-\dfrac{j_2}{\alpha_{12}}$	…	j_n

3) стовпчик з максимальним додатним значенням γ вибирається як генеральний стовпчик (цю вільну змінну будемо вводити в базис). Після вибору генерального стовпчика вибирається генеральний рядок (вибирається базисна змінна, яка буде змінюватися з вибраною вільною змінною). Вона вибирається по мінімальному відношенню вільного члена до коефіцієнта в генеральному стовпчику, причому вільний член та коефіцієнт в генеральному стовпчику повинні бути додатними. Якщо всі елементи відповідного стовпчика від’ємні або нульові, тобто не можна вибрати генеральний стовпчик, задача не має оптимального рішення (випадок необмеженого мінімуму). Елемент, який стоїть на перетині генерального рядка та генерального стовпчика називається генеральним елементом (наприклад α_{12});

4) перерахунок нових значень змінних виконується наступним чином:

4.1) новим значенням в клітці генерального елемента буде значення, обернене до старого, тобто $1/\alpha_{12}$;

4.2) нове значення змінних в генеральному рядку дорівнює старому значенню, поділеному на значення генерального елементу;

4.3) в генеральному стовпчику значення нових змінних дорівнюють старому значенню, поділеному на значення генерального елементу з протилежним знаком;

4.4) інші елементи таблиці обчислюються по наступній схемі: до старого значенню елемента додається добуток відповідного йому нового елемента генерального стовпчика та відповідного йому старого значення генерального рядка.

Заповнюється нова симплекс-таблиця, в котрій нові значення записуються на місце старих значень – в верхній лівий кут кожної клітки. Перейти до п.1;

5) рядок з максимальним (по модулю) від’ємним значенням γ вибирається як генеральний рядок. Генеральний стовпчик вибирається по мінімальному відношенню вільного члена до коефіцієнта в генеральному рядку, причому вільний член та коефіцієнт в генеральному стовпчику повинні бути від’ємними. Елемент, який стоїть на перетині генерального рядка та генерального стовпчика називається генеральним елементом.

Перейти до п.4.

Приклади розв’язування ЗЛП

Приклад 1. Допустиме початкове базисне рішення

Мінімізувати функцію $f(x) = -3x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вирішення.

Виконується перетворення загальної задачі в канонічну задачу лінійного програмування.

Мінімізувати функцію $f(x) = -3x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$$

Виконується перетворення канонічної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0 - (3x_1 - x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_3 = 7 - (2x_1 - 3x_2), \\ x_4 = 2 - (-x_1 + x_2), \\ x_5 = 8 - (x_1 + 2x_2). \end{cases}$$

Заповнюється вихідна симплекс-таблиця.

	b_i	x_1	x_2
x_3	7	**2**	–3
x_4	2	–1	1
x_5	8	1	2
$f(x)$	0	3	–1

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_1 в цільовій функції є додатним. Тому змінна x_1 вводиться в базис, змінна x_3 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_3	x_2
x_1	7/2	1/2	–3/2
x_4	11/2	1/2	–1/2
x_5	9/2	–1/2	**7/2**
$f(x)$	–21/2	–3/2	7/2

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \leq 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_2 в цільовій функції є додатним. Тому змінна x_2 вводиться в базис, змінна x_5 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_3	x_5
x_1	38/7	2/7	3/7
x_4	43/7	3/7	1/7
x_2	9/7	–1/7	2/7
$f(x)$	–15	–1	–1

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, умова оптимальності: $\gamma_i \leq 0$ виконується, отже, отримаємо оптимальний розв’язок задачі:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{38}{7} \\ x_2 = \dfrac{9}{7} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{43}{7} \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\min f(x) = -15$$

Приклад 2. Альтернативний оптимальний розв'язок

Мінімізувати функцію $f(x) = -2x_1 - 4x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вирішення.

Виконується перетворення загальної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0 - (2x_1 + 4x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_3 = 5 - (x_1 + 2x_2) \\ x_4 = 4 - (x_1 + x_2) \end{cases}$$

Заповнюється вихідна симплекс-таблиця.

	b_i	x_1	x_2
x_3	5	1	**2**
x_4	4	1	1
$f(x)$	0	2	4

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнти при вільних змінних x_1 та x_2 в цільовій функції є додатними. Стовпчик з максимальним додатним коефіцієнтом вибирається як генеральний стовпчик, тому змінна x_2 вводиться в базис, змінна x_3 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_1	x_3
x_2	5/2	1/2	1/2
x_4	3/2	1/2	–1/2
$f(x)$	–10	0	–2

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, умова оптимальності: $\gamma_i \le 0$ виконується, отже, отримаємо оптимальний розв’язок задачі:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\min f(x) = -10$$

Оскільки в рядку цільової функції оптимальної таблиці при вільній змінній x_1 знаходиться 0, отже, знайдене оптимальне рішення є тільки одним з нескінченної кількості альтернативних оптимальних рішень.

Приклад 3. Необмежений екстремум

Мінімізувати функцію $f(x) = -2x_1 - x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Вирішення.</u>

Виконується перетворення загальної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0 - (2x_1 + x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - (x_1 - x_2) \\ x_4 = 40 - (2x_1) \end{cases}$$

Заповнюється вихідна симплекс-таблиця.

	b_i	x_1	x_2
x_3	10	**<u>1</u>**	-1
x_4	40	2	0
$f(x)$	0	2	1

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності

$\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнти при вільних змінних x_1 та x_2 в цільовій функції є додатними. Стовпчик з максимальним додатним коефіцієнтом вибирається як генеральний стовпчик, тому змінна x_1 вводиться в базис, змінна x_3 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_1	x_2
x_3	10	1	-1
x_4	20	-2	**2**
$f(x)$	-20	-2	3

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_2 в цільовій функції є додатним. Стовпчик з додатним коефіцієнтом вибирається як генеральний стовпчик, тому змінна x_2 вводиться в базис, змінна x_4 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_1	x_4
x_3	20	0	1/2
x_2	10	-1	1/2
$f(x)$	-50	1	-3/2

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_1 в цільовій функції є додатним. Стовпчик з додатним коефіцієнтом вибирається як генеральний стовпчик (змінну x_2 треба ввести в базис), але вибрати генеральний рядок неможливо, оскільки всі коефіцієнти в генеральному стовпці не є додатними. Це є ознакою необмеженого мінімуму.

Приклад 4. Недопустиме початкове базисне рішення

Мінімізувати функцію $f(x) = -x_1 - 2x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

Вирішення.

Виконується перетворення загальної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0 - (x_1 + 2x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - (2x_1 + x_2) \\ x_4 = -1 - (-x_1 - x_2) \\ x_5 = 4 - (x_2) \end{cases}$$

Заповнюється вихідна симплекс-таблиця.

	b_i	x_1	x_2
x_3	8	2	1
x_4	-1	-1	-1
x_5	4	0	1
$f(x)$	0	1	2

Базисне рішення не є допустимим оскільки не всі $b_i > 0$. В такому випадку алгоритм симплексного методу починається з вибору генерального рядку, тобто рядку з від'ємним вільним членом. Отже змінну x_4 виводимо з базису і замість неї вводимо до базису змінну x_1, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_4	x_2
x_3	6	**2**	-1
x_1	1	-1	1
x_5	4	0	1
$f(x)$	-1	1	1

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнти при вільних змінних x_1 та x_2 в цільовій функції є додатними. В базис вводиться змінна x_4, а змінна x_3 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_3	x_2
x_4	3	1/2	-1/2
x_1	4	1/2	1/2
x_5	4	0	**1**
$f(x)$	-4	-1/2	3/2

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_3 в цільовій функції є додатним. В базис вводиться змінна x_2, а змінна x_5 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_3	x_5
x_4	5	1/2	1/2
x_1	2	1/2	-1/2
x_2	4	0	1
$f(x)$	-10	-1/2	-3/2

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, умова оптимальності: $\gamma_i \le 0$ виконується, отже, отримаємо оптимальний розв'язок задачі:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 5 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\min f(x) = -10$$

Приклад 5. ЗЛП зі змішаними обмеженнями

Мінімізувати функцію $f(x) = -3x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

<u>Вирішення.</u>

Якщо в умові завдання крім обмежень типу нерівності є обмеження типу рівності, то при перетворенні загальної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі в цих обмеженнях замість базисної змінної вводяться штучні змінні, фактично замінюючи 0.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0-(3x_1 - x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_3 = 7\text{-}(2x_1 - 3x_2) \\ x_4 = 2-(-x_1 + x_2), \\ g = 8-(x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

де g – штучна змінна.

Заповнюється вихідна симплекс-таблиця.

	b_i	x_1	x_2
x_3	7	2	-3
x_4	2	-1	1
g	8	1	**2**
$f(x)$	0	3	-1

Базисне рішення не є допустимим оскільки штучна змінна g не дорівнює 0. В цьому випадку алгоритм симплексного методу починається з виведення штучної змінної з базису до вільних змінних, отже змінну g виводимо з базису і замість неї вводимо до базису змінну x_2, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_1	g
x_3	19	7/2	-3/2
x_4	-2	-3/2	-1/2
x_2	4	1/2	1/2
$f(x)$	4	7/2	1/2

Оскільки штучна змінна стала вільною змінною, тобто рівною 0, і більше в обчисленнях брати участь не буде, то відповідний їй стовпець можна викреслити з таблиці.

	b_i	x_1
x_3	19	7/2
x_4	-2	**-3/2**
x_2	4	1/2
$f(x)$	4	7/2

Базисне рішення не є допустимим оскільки не всі $b_i > 0$. Починаємо з вибору генерального рядку, тобто рядку з від'ємним вільним членом. Отже змінну x_4 виводимо з базису і замість неї вводимо до базису змінну x_1, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_4
x_3	43/3	**7/3**
x_1	1/3	-4/3
x_2	10/3	1/3
$f(x)$	-2/3	7/3

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, але умова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнт при вільній змінній x_4 в цільовій функції є додатним. В базис вводиться змінна x_4, а змінна x_3 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_3
x_4	43/7	3/7
x_1	34/7	2/7
x_2	9/7	-1/7
$f(x)$	-15	-1

Базисне рішення є допустимим оскільки всі $b_i > 0$, умова оптимальності: $\gamma_i \leq 0$ виконується, отже, отримаємо оптимальний розв’язок задачі:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{34}{7} \\ x_2 = \dfrac{9}{7} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{43}{7} \end{cases}$$

$$\min f(x) = -15.$$

ВПРАВИ

Розв'язати симплексним методом наступні задачі лінійного програмування з допустимим початковим базисним рішенням:

1. $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. $\min z = -2\,x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 6x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $\max z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. $\max z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 14 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $\max z = -3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. $\max z = 3\,x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $\max z = x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язати симплексним методом наступні задачі лінійного програмування з недопустимим початковим базисним рішенням:

1. $\max z = 4x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. $\max z = x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. $\max z = x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. $\max z = -x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $\max z = 2x_1 + x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. $\max z = x_1 + 4x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. $\max z = -3x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. $\max z = -x_1 - x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. $\max z = 3x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 13 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. $\min z = 3x_1 - x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Методи штучного базису застосовуються в тих випадках, коли базисні змінні існують не в усіх обмеженнях задачі, приведеної до канонічної формі. Принцип роботи методів штучного базіза полягає в наступному. У всі обмеження, в яких відсутні базисні змінні, вводяться штучні змінні. Вони використовуються для побудови початкового базисного рішення. Потім виконується пошук оптимального рішення за допомогою стандартних процедур симплексного методу.

Основні методи штучного базису - це двоетапний метод і метод великих штрафів.

Двоетапний метод штучного базису застосовується для вирішення канонічної ЗЛП в разі, коли задача не має початкового допустимого базисного рішення.

На першому етапі ведеться пошук початкового допустимого базисного рішення. Якщо таке рішення знайдено, то на другому етапі вирішується вихідна завдання.

Етап 1. Задача лінійного програмування записується в стандартній формі, а в обмеження додаються необхідні штучні змінні для отримання початкового базисного рішення. Вирішується задача лінійного програмування мінімізації суми штучних змінних з вихідними обмеженнями. Якщо мінімальне значення цієї нової цільової функції більше нуля, отже, вихідна задача не має допустимого рішення, і процес обчислень закінчується. Якщо нова цільова функція дорівнює нулю, переходимо до другого етапу.

Етап 2. Оптимальне базисне рішення, отримане на першому етапі, використовується як початкова допустиме базисне рішення вихідної задачі. Видалення штучних змінних в кінці першого етапу має сенс тільки тоді, коли всі вони є небазисними. Однак можлива ситуація, коли в кінці першого етапу штучні змінні залишаться в базисі, але матимуть нульові значення. У цьому випадку такі змінні при необхідності будуть формувати частину початкового базисного рішення для другого етапу. При цьому необхідно так змінити обчислення, що виконуються на другому етапі, щоб штучні змінні ніколи не змогли прийняти додатні значення ні в яких ітераціях симплекс-методу.

Існує правило, яке гарантує, що нульова базисна штучна змінна на другому етапі ніколи не стане позитивною.

Якщо в генеральному стовпці коефіцієнт, що відповідає нульовій базисної штучної змінної, додатний, тоді генеральний елемент визначається автоматично (оскільки йому відповідає мінімальне відношення, рівне нулю) і штучна змінна на наступній ітерації стає вільною.

Якщо генеральний елемент дорівнює нулю, на наступній ітерації штучна змінна не змінюється. У випадку від'ємного генерального елемента мінімальне відношення не асоціюється з базисною (нульовою) штучною змінною. Якщо мінімальне відношення буде додатним, то на наступній ітерації штучна змінна прийме додатне значення. Щоб виключити цю можливість, ми примушуємо штучну змінну завжди залишатися в базисному рішенні. Оскільки штучна змінна дорівнює нулю, її видалення з базисного рішення не впливає на допустимість рішення.

Правило для другого етапу полягає в тому, щоб штучні змінні залишати в базисі завжди, коли коефіцієнт в генеральному стовпці додатний або від'ємний. Фактично це правило застосовується в кінці першого етапу, коли видаляємо нульові штучні змінні з базисного рішення, перед тим як приступити до другого етапу.

Симплекс-таблиця, яка складається в процесі рішення, використовуючи метод штучного базису, називається розширеною. Вона відрізняється від звичайної тим, що містить два рядки для цільових функцій: один - для цільової функції першого етапу $S(y) = \sum_{i}^{k} y_i$, а другий - для цільової функції другого етапу $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Алгоритм двоетапного методу штучного базису складається з:

1. Знаходження початкового допустимого рішення вихідної ЗЛП:
   - введення штучних змінних в обмеження, які не містять базисних змінних,
   - складання цільової функції, яка дорівнює сумі штучних змінних $S(y) = \sum_{i}^{k} y_i$,
   - рішення задачі мінімізації функції *S*. Для зменшення обсягів обчислень при вирішенні даної задачі, при виведенні штучної змінної з числа базисних в вільні змінні, відповідний стовпець в наступних симплексних таблицях не записується.
2. Знаходження оптимального рішення вихідної ЗЛП.

   Оптимальна таблиця першого етапу перетворюється в вихідну таблицю другого етапу. Для пошуку оптимального рішення отриманої задачі застосовується стандартна процедура симплексного методу.

Приклад.

Мінімізувати функцію $f(x) = +x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

Вирішення.

Виконується перетворення загальної задачі лінійного програмування в стандартну форму канонічної задачі.

Мінімізувати функцію $f(x) = 0 - (-x_1 - 3x_2)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -5 \end{cases}$$

Оскільки початкове базисне рішення не є допустимим, для знаходження допустимого рішення використаємо метод штучного базису. Введемо штучні змінні:

$$\begin{cases} y_1 = 2\text{-}(\text{-}3x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 = 5 - (x_1 + x_2 - x_4) \end{cases}.$$

Складемо цільову функцію *S(y)* для симплекс-таблиці першого етапу методу штучного базису.

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	2	-3	**1**	-1	0
y_2	5	1	1	0	-1
$f(x)$	0	-1	-3	0	0
S(y)	7	-4	2	-1	-1

Базисне рішення в даному методі завжди є допустимим. Оптимальність рішення перевіряємо відносно функції *S(y). У*мова оптимальності $\gamma_i \le 0$ не виконується: коефіцієнти при вільній змінній x_2 в цільовій функції є додатним. В базис вводиться змінна x_2, а змінна y_1 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	x_1	y_1	x_3	x_4
x_2	2	-3	1	-1	0
y_2	3	4	-1	1	-1
$f(x)$	6	-10	3	-3	0
S(y)	3	4	-2	2	-1

Оскільки штучна змінна y_1 стала вільною змінною, відповідний їй стовпець в наступну таблицю не записується:

	b_i	x_1	x_3	x_4
x_2	2	-3	-1	0
y_2	3	**<u>4</u>**	1	-1
$f(x)$	6	-10	-3	0
S(y)	3	4	2	-1

Отримане базисне рішення не є оптимальним: коефіцієнти при вільних змінних x_1 та x_3 в цільовій функції є додатними. В базис вводиться змінна x_1, а змінна y_2 стає вільною змінною, виконується перерахунок таблиці.

	b_i	y_2	x_3	x_4
x_2	17/4	3/4	-1/4	0
x_1	3/4	1/4	1/4	-1
$f(x)$	6/4	10/4	-22/4	-10/4
S(y)	0	-1	1	0

Шучна змінна y_2 стала вільною змінною, тому відповідний їй стовпець в наступну таблицю не записується: Оскільки всі штучні змінні дорівнюють 0, то і значення цільової функції також дорівнює 0. Отже перший етап методу штучного базису закінчився, тому рядок, відповідний цільовой функції *S(y)* в наступну таблицю не вписується.

	b_i	x_3	x_4
x_2	17/4	-1/4	0
x_1	3/4	1/4	-1
$f(x)$	6/4	-22/4	-10/4

В даному випадку на початку другого етапу відразу отримано оптимальне рішення:

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 17/4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\min f(x) = 6/4.$$

ВПРАВИ

Розв'язати методом штучного базису наступні задачі лінійного програмування:

1. $\max z = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. $\min z = -x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. $\max z = -2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 13 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. $\min z = -x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $\max z = 5x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. $\max z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. $\min z = -x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. $\min z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. $\max z = 4x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11. $z = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12. $z = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

13. $z = -2x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

14. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \ge 36 \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

15. $z = 10x_1 + 14x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \ge 35 \\ 2x_1 \ge 4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

16. $z = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

17. $z = 6x_1 + 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 1{,}5 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

18. $z = 10x_1 + 6{,}2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ 7x_1 + 9x_2 \le 63 \\ 0 \le x_1 \le 6 \\ 0 \le x_2 \le 5 \end{cases}$$

19. $z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

20. $z = 2x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Акоф Р. Основы исследования операций / Акоф Р., Сасиени М. [пер. с англ.]. — М. : Мир, 1971. — 534 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И.Л. — СПб : Лань, 2009. — 352 с.
3. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / Ашманов С.А., Тимохов А.В. − М.: Наука, 1991.− 447 с.
4. Банди Б. Основы линейного программирования / Банди Б.; [пер. с англ.]. — М.: Радио и связь, 1989.— 176 с.
5. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3-х книгах. / Вагнер Г.; [пер. с англ.]. — М. : Мир, 1972. — 372 с.
6. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач.− К.: Вища шк., 1990. − 239 с
7. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию / Калихман И.Л. — М.: Высшая школа, 1975. — 270 с.
8. Матряшин Н. П. Математическое программирование / Н. П. Матряшин, В. К. Макеева. — Харьков : Вища школа, 1978. — 160 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха; [пер. с англ.]. — Вильямс, 2007. — 912 с.
10. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов [Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман Н.М.]. — М. : ЮНИТИ, 2002. — 407с.