О. О. Набока

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Харків
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИУКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. О. Набока

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Рекомендовано
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 25.06.2020 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2020

УДК 512.643+512.644
Н 141

Рецензенти:
О. В. Воропай, д-р техн. наук, проф. ХНАДУ
Т. С. Полянська, канд. фіз.-мат. наук, доц. НТУ "ХПІ"

Набока О. О.

Н 141 Лінійна алгебра: навч.-метод. посіб. / Набока О. О. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – 64 с.

ISBN 978-617-7602-90-2

Навчально-методичний посібник містить базовий теоретичний матеріал і приклади розв'язання типових задач за темою «Лінійна алгебра», а також завдання для самостійного розв'язання та варіанти контрольних робіт з відповідями.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Бібліогр.: 5 назв.

УДК 512.643+512.644

ISBN 978-617-7602-90-2

Зміст

Вступ

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (далі СЛАР) знаходять широке застосування у багатьох прикладних задачах фізики, хімії, економіки тощо. Навчити студента розв'язувати СЛАР є основною задачею розділу «Лінійна алгебра» у курсі вищої математики технічного ВНЗ.

В навчально-методичному посібнику запропоновано три методи розв'язання СЛАР: матричний метод та метод Крамера, які застосовуються для розв'язання квадратних СЛАР, а також універсальний метод Гаусса. Викладено математичний апарат, яким оперують ці методи: матриці, визначники, обернена матриця та ранг матриці. Кожному з цих понять відведено окремий розділ посібника, де міститься основний теоретичний матеріал за темою, приклади розв'язання типових завдань, а також задачі для самостійного розв'язання з відповідями. У кінці посібника читач знайде варіанти контрольних робіт за темою «Лінійна алгебра».

Навчально-методичний посібник призначено для студентів технічних вищих навчальних закладів, які вивчають розділ «Лінійна алгебра» у курсі вищої математики.

Тема 1.
Матриці. Дії над матрицями

1.1. Основні означення

Означення 1.1. ***Матрицею розміру*** *$n \times m$ називається сукупність $(n \cdot m)$ чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що містить n рядків і m стовпців.*

Числа, які утворюють матрицю, називаються її ***елементами****.*

Позначатимемо довільну матрицю великими літерами латинського алфавіту (наприклад, A), а її елементи – відповідними малими літерами з подвійним індексом a_{ij}, де перший індекс i відповідає *номеру рядка*, у якому розташовано цей елемент, а другий індекс j – *номеру стовпця*.

Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 24 \\ 0 & 13 & 0,5 \end{pmatrix}$$

складається із двох рядків и трьох стовпців. Тому матриця A має розмір 2×3.

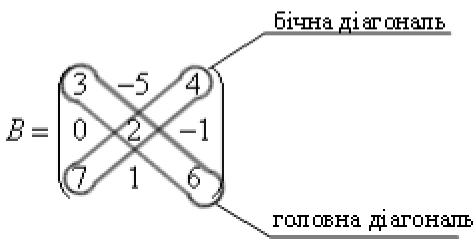
Випишемо деякі елементи матриці A:

$$a_{11} = 7,\ a_{12} = -12,\ a_{21} = 0,\ a_{23} = 0,5.$$

Означення 1.2. *Матриця, що має рівну кількість рядків і стовпців, називається* ***квадратною матрицею****. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називають її* ***порядком****.*

У квадратної матриці виділяють її *головну* і *бічну діагоналі*.

Наведемо приклад квадратної матриці порядку три:



Означення 1.3. ***Діагональною матрицею*** *називається квадратна матриця, у якої всі елементи, розташовані поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.*

Означення 1.4. ***Одиничною матрицею*** *називається діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.*

Одиничну матрицю порядку n позначатимемо I_n. Наприклад:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.5. *Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають* ***нульовою матрицею****.*

Позначатимемо нульову матрицю $\emptyset$.

1.2. Лінійні операції із матрицями

До лінійних операцій із матрицями відносять множення матриці на число та суму (або різницю) матриць.
Множення матриці на число. Будь-яку матрицю A довільного розміру $n \times m$ можна помножити на довільне число α. Для цього кожен елемент матриці A треба помножити на α. У результаті отримаємо матрицю B, що має той самий розмір, що і матриця A:

$$B = \alpha \cdot A, \qquad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

Приклад 1.1. Обчислити $\alpha \cdot A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 3.$$

Розв'язок:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 0 \\ 9 & 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

□

Означення 1.6. *Матрицю $-A = -1 \cdot A$ називають* ***протилежною до матриці*** *A.*

Сума матриць. Нехай A і B – матриці однакового розміру $n \times m$. Тоді сумою матриць $A + B$ є матриця C розміру $n \times m$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Приклад 1.2. Обчислити $A + B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-2) & 6 + 4 \\ 2 + 3 & -4 + 7 \\ -3 + 8 & 9 + (-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Аналогічно, *різницею* $A - B$ є матриця C того самого розміру, що й матриці A і B, елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць A і B.

Властивості лінійних операцій із матрицями. Нехай A і B – дві матриці однакового розміру, α і β – довільні числа. Тоді:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + (-A) = \emptyset$;
4. $A + \emptyset = A$;
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;
6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
7. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
8. $1 \cdot A = A$.

1.3. Добуток матриць

Нехай задано матрицю A розміру $n \times m$ і матрицю B розміру $m \times l$, тобто кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Тоді існує добуток матриць $A \cdot B$. У результаті множення отримаємо матрицю C розміру $n \times l$, елементи якої можна обчислити за формулою:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj},$$

тобто елемент c_{ij}, розташований на перетині i-го рядка і j-го стовпця матриці-добутку C, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Приклад 1.3. Для матриць A і B:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

обчислити ті добутки, що існують:

1. $A \cdot B = ?$,
2. $B \cdot A = ?$

Розв'язок:

1. Перша матриця добутку A має розмір 3×2, а друга матриця добутку B – 2×2. Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості строк матриці B, тому добуток $A\cdot B$ існує. Позначимо матрицю, що дорівнює цьому добутку, через C:

$$\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underset{3\times 2}{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

   Обчислимо елементи матриці C:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2\cdot 3 + 1\cdot 2 = -4; \\ c_{12} &= -2\cdot 0 + 1\cdot 5 = 5; \\ c_{21} &= 4\cdot 3 + 5\cdot 2 = 22; \\ c_{22} &= 4\cdot 0 + 5\cdot 5 = 25; \\ c_{31} &= 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2 = -6; \\ c_{32} &= 0\cdot 0 + (-3)\cdot 5 = -15. \end{aligned}$$

   Отримуємо відповідь:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 22 & 25 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

2. У добутку $B\cdot A$ перша матриця B має два стовпці, а друга матриця A – три рядки:

$$\underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{3\times 2}{A}.$$

   Оскільки ці кількості різняться, то добуток $B\cdot A$ не існує.

$\square$

Наголосимо ще раз:

Зауваження: Добуток матриць $A \cdot B$ існує лише в тому випадку, коли кількість стовпців першої матриці добутку A співпадає з кількістю рядків другої матриці B.
Для операції множення матриць не має місця комутативний закон. Тобто із існування дубутку $A \cdot B$ загалом не витікає існування добутку $B \cdot A$. Якщо обидва добутки $A \cdot B$ і $B \cdot A$ існують, то, скоріш за все, їх значення не є рівними: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Приклад 1.4. Обчислити $(2A - B) \cdot C$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок: Керуючись пріоритетом операцій, обчислимо спочатку вираз у дужках:

$$2A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix};$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Помножимо отриману матрицю на матрицю C:

$$\underset{2\times3}{(2A - B)} \cdot \underset{3\times2}{C} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \underset{2\times2}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= -4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 0, \\ d_{12} &= -4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -5, \\ d_{21} &= 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 3, \\ d_{22} &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) = -7. \end{aligned}$$

Отже,

$$(2A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Властивості добутку матриць. Нехай $A,\ B,\ C$ – матриці відповідного розміру, α – довільне число. Тоді:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, а також $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
3. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

1.4. Транспонування матриць

Означення 1.7. *Матриця A^T, що отримана з матриці A шляхом виписування елементів її рядків у стовпці з відповідним номером, називається* ***транспонованою до матриці*** *A.*

Якщо A – матриця розміру $n \times m$, то транспонована до неї матриця A^T має розмір $m \times n$.

Приклад 1.5. Наприклад,

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \text{тоді} \qquad \underset{2\times 3}{A^T} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонованої матриці. Нехай $A,\ B$ – матриці відповідного розміру. Тоді:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.5. Степінь матриці. Многочлен від матриці

Зауваження: Операція зведення матриці у степінь визначена лише для квадратних матриць.

Нехай A – квадратна матриця порядку n, I_n – одинична матриця того ж самого порядку.

Цілий невід'ємний степінь матриці A визначається рекурентно за формулами:

$$A^0 = I_n; \quad A^1 = A; \quad A^2 = A \cdot A; \quad A^3 = A \cdot A^2; \quad \ldots \quad A^n = A \cdot A^{n-1}.$$

Нехай задано довільний многочлен степеня r:

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де a_k – числові коефіцієнти многочлена.

Многочленом від матриці A називається матриця:

$$f(A) = a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Приклад 1.6. Знайти значення мноночлена $f(A)$ від матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = 3x^2 - x + 2.$$

Розв'язок: Відповідно до визначення многочлена від матриці:

$$f(A) = 3A^2 - A + 2I_2,$$

де I_2 – одинична матриця другого порядку: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо спочатку A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}.$$

□

Завдання для самостійного розв'язання

Задачі:

1. Для заданих матриць **1)** визначити їх розмір; **2)** назвати, чому дорівнюють вказані елементи:

(а) $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 24 \\ 0 & 13 & 0,5 \end{pmatrix}$, $a_{11} =?, a_{12} =?, a_{21} =?, a_{23} =?$;

(б) $B = \begin{pmatrix} -16 & 21 \\ 8 & 14 \\ -9,3 & -16 \end{pmatrix}$, $b_{12} =?, b_{22} =?, b_{31} =?$;

(в) $C = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 14 \\ 25 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, елементи головної і бічної діагоналі.

2. Виконати операції над заданими матрицями A і B:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -3 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 15 & -1 \\ 13 & 22 & 16 \end{pmatrix};$$

(а) $2A$;
(в) $A + B$;
(д) $5A + 0,5B$;
(б) $-3B$;
(г) $B - A$;
(е) $A - 2B$.

3. Для заданих матриць A і B обчислити ті добутки, що існують:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

(а) $A \cdot B$,
(г) $B^T \cdot A$,
(б) $B \cdot A$,
(д) $B \cdot A^T$,
(в) $A \cdot B^T$,
(е) $B^T \cdot A^T$.

4. Обчислити задані вирази, де $A,\ B,\ C$ – задані матриці:

(а) $3 \cdot A + B \cdot C =?$,

$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(б) $(2 \cdot A - B) \cdot C^T =?$,

$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

(в) $5A \cdot (B+C)^T = ?$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -11 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & -7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix};$$

(г) $A \cdot B \cdot C = ?$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A, якщо задані матриця A і многочлен $f(x)$:

(а) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(б) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

1. (а) 2×3, $a_{11} = 7,\ a_{12} = -12,\ a_{21} = 0,\ a_{23} = 0,5$;

(б) 3×2, $b_{12} = 21,\ b_{22} = 14,\ b_{31} = -9,3$;

(в) 3×3, чи квадратна матриця третього порядку. Елементи головної діагоналі: $0,\ 4,\ 7$; елементи бічної діагоналі: $14,\ 4,\ -1$.

2. (а) $\begin{pmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -6 & 20 & 10 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} 12 & -45 & 3 \\ -39 & -66 & -48 \end{pmatrix}$;

(в) $\begin{pmatrix} 3 & 14 & -1 \\ 10 & 32 & 21 \end{pmatrix}$;

(г) $\begin{pmatrix} -11 & 16 & -1 \\ 16 & 12 & 11 \end{pmatrix}$;

(д) $\begin{pmatrix} 33 & 2,5 & -0,5 \\ -8,5 & 61 & 33 \end{pmatrix}$;

(е) $\begin{pmatrix} 15 & -31 & 2 \\ -29 & -34 & -27 \end{pmatrix}$.

3. (а) $\begin{pmatrix} 20 & -7 \\ 39 & -14 \\ 27 & -43 \end{pmatrix}$;

(б) не існує;

(в) не існує;

(г) $\begin{pmatrix} -20 & 34 & 61 \\ 13 & -28 & -27 \end{pmatrix}$;

(д) не існує;

(е) $\begin{pmatrix} 20 & 39 & 27 \\ -7 & -14 & -43 \end{pmatrix}$.

Примітка: $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$.

4. (а) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 30 & -20 & -30 \\ 5 & 20 & 5 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} 15 & -11 \\ 4 & 15 \\ -17 & -4 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 15 & -24 & 1 \\ -27 & 48 & -5 \\ 18 & 12 & -26 \end{pmatrix}$.

5. (а) $\begin{pmatrix} 37 & 6 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 19 & 2 & 5 \\ -2 & 9 & -2 \\ 16 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

Тема 2.
Визначник

2.1. Визначники другого і третього порядків та методи їх обчислення

Визначником (або детермінантом) квадратної матриці називається число, що однозначно визначається за елементами цієї матриці згідно визначеному правилу. Розглянемо правило обчислення визначників другого та третього порядків.

Нехай A – квадратна матриця *другого порядку*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці позначатимемо наступним чином:

$$det\ A \qquad \text{або} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Визначник квадратної матриці A другого порядку можна обчислити за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \qquad (2.1)$$

тобто від добутку елементів, які утворюють його головну діагональ, потрібно відняти добуток елементів, що стоять на його бічній діагоналі.

Приклад 2.1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =?$$

Розв'язок: За формулою (2.1):

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = -17.$$

□

Визначник *третього порядку* зводиться до суми трьох визначників другого порядку за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Якщо, застосувавши формулу (2.1), розписати усі визначники другого порядку, то у правій частині нашої рівності отримаємо алгебраїчну суму шести доданків:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \tag{2.2}$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Формула (2.2) задає правило обчислення визначника третього порядку. Її зручно подавати у вигляді схеми:

$$\begin{vmatrix} \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \\ * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \\ * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \\ * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \\ \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \\ \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \\ * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \end{vmatrix} - \tag{2.3}$$

$$- \begin{vmatrix} * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \\ * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \\ \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \\ \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \\ * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \colorbox{lightgray}{$*$} & * & * \\ * & * & \colorbox{lightgray}{$*$} \\ * & \colorbox{lightgray}{$*$} & * \end{vmatrix},$$

де виділені елементи треба помножити. Схема (2.3) носить назву **правила трикутника** обчислення визначника третього порядку.

Приклад 2.2. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Розв'язок: Застосуємо правило трикутника (2.3) для обчислення заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) -$$

$$-(-2) \cdot (-1) \cdot 6 - 3 \cdot 7 \cdot 1 - 4 \cdot 5 \cdot 0 = 173.$$

□

Аналогічно до формули (2.2), визначник довільного порядку n можна представити як суму $n!$ доданків. Загальний метод обчислення визначників буде розглянуто у розділі 2.3.

2.2. Властивості визначника

Нехай A – квадратна матриці порядку n. Тоді її визначник $detA$ має такі властивості:

1. Визначник матриці не змінюється при транспонуванні: $detA = detA^T$.

2. Якщо поміняти місцями два рядка матриці, то її визначник змінить знак на протилежний.

3. Якщо матриця має нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю.

4. Якщо матриця має два однакових або пропорційних рядка, то її визначник дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи довільного рядка матриці помножить на одне й те саме число, то й визначник матриці помножиться на це число.

   Цю властивість визначника матриці можна переформулювати наступним, зручним у застосуванні, чином: спільний множник елементів рядка матриці можна виносити за знак визначника.

6. Якщо до усіх елементів деякого рядка матриці додати відповідні елементи її іншого рядка, помножені на одне й те саме число, то визначник матриці не зміниться.

Зазначимо, що усі властивості визначника матриці, сформульовані вище для її рядків, мають місце і для стовпців матриці.

2.3. Розкладання визначника за елементами його довільного рядка чи стовпця

Нехай A – квадратна матриця порядку n з елементами $a_{ij},\ i, j = 1, 2, \dots n$.

Означення 2.1. ***Мінором елемента*** a_{ij} ***матриці*** *A називається визначник матриці порядку $n-1$, отриманої з матриці A викреслюванням її i-го рядка і j-го стовпця.*

Мінор елемента a_{ij} матриці A позначатимемо M_{ij}.

Означення 2.2. ***Алгебраїчним доповненням елемента*** a_{ij} ***матриці*** A *називається число, що визначається за формулою:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Тобто алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці A співпадає з його мінором у випадку, коли сума індексів $i+j$ є парною, і дорівнює мінору, взятому з протилежним знаком, якщо число $i+j$ є непарним.

Приклад 2.3. Випишемо декілька мінорів та алгебраїчних доповнень елементів матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так, наприклад:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 26, \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 26 = 26;$$
$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2;$$
$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -19, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-19) = 19;$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4) = 4.$$

Зауваження: загалом, зв'язок між знаками мінорів елементів матриці третього порядку та відповідних алгебраїчних доповнень можна записати у вигляді таблиці:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

Теорема 2.1. *Сума добутків елементів довільного рядка (або стовпця) квадратної матриці A на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номеру рядка (або стовпця) і дорівнює визначнику матриці A:*

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \cdot A_{lj}, \ \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) дає можливість звести визначник n-го порядку до суми декількох визначників нижчого порядку $n-1$, що зручно при розв'язанні задач.

Приклад 2.4. Обчислити визначник із прикладу 2.2, розкладаючи його за елементами довільного рядка або стовпця.

Розв'язок: Розкладемо заданий визначник третього порядку за елементами його *першого рядка*. У цьому випадку формула (2.5) набуває вигляду:

$$detA = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

або

$$detA = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}.$$

Застосуємо отриману формулу до заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot (-1 \cdot 1 - 0 \cdot 5) - 7 \cdot (3 \cdot 1 - 6 \cdot 5) + (-2) \cdot (3 \cdot 0 - 6 \cdot (-1)) =$$
$$= 173.$$

Тепер розкладемо той самий визначник за елементами його *другого стовпця*. Згідно таблиці (2.4), при розкладанні визначника третього порядку за елементами його другого стовпця чергування знаків відбувається за схемою $\begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}$, отже:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -7 \cdot (3 \cdot 1 - 6 \cdot 5) + (-1) \cdot (4 \cdot 1 - 6 \cdot (-2)) - 0 = 173.$$

Звернемо увагу, що останній визначник другого порядку у отриманному розкладенні обчислювати не має сенсу, тому що перед ним стоїть множник нуль, тому:

Зауваження: розкладаючи визначник за елементами строки чи стовпця, краще обирату ту його строку або стовпець, що містить найбільше нулів.

Наостанок відзначимо, що усі розглянуті методи обчислення заданого визначника дали один й той самий результат, бо *визначник має єдине значення*. □

Приклад 2.5. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

Розв'язок: Застосуємо формулу (2.5) до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладення проводитимо за елементами *третьої строки* визначника, бо вона містить найбільшу кількість нульових елементів:

$$\begin{aligned} detA = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + +a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} = \\ = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} M_{32} + \\ +a_{33} \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^{3+4} M_{34}, \end{aligned}$$

тобто,

$$detA = a_{31} \cdot M_{31} - a_{32} \cdot M_{32} + a_{33} \cdot M_{33} - a_{34} \cdot M_{34}.$$

У нашому випадку $a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$, тому розкладення визначника матиме лише один ненульовий доданок:

$$detA = a_{33} \cdot M_{33},$$

отже,

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник третього порядку, використовуючи один із запропонованих вище методів, наприклад, метод трикутника:

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \cdot 8 -$$
$$-5 \cdot (-1) \cdot 0 - (-3) \cdot 2 \cdot (-3) - (-4) \cdot 1 \cdot 8 = 12.$$

Тоді

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 = 36.$$

□

Приклад 2.6. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Розв'язок: На жаль, заданий визначник не має рядка чи стовпця з великою кількістю нулів, тому безпосереднє розкладання його за елементами довільного рядка чи стовпця приведе нас до необхідності обчислювати принаймні три визначника третього порядку, що є можливим, але громізким завданням.

Спростимо наші обчислення. Змінимо елементи нашого визначника так, щоб у деякому його стовпці ми мали три нулі, але значення визначника залишилося незмінним. Для цього використовуватимемо відомі властивості визначника.

Поперше, визначимося з номером стовпця, де отримуватимемо нулі. Доречно вибрати той стовпець, де вже маємо принаймні один нуль, наприклад, третій стовпець заданого визначника. Для подальших обчислень зручно буде переставити цей стовпець на місце першого. Тому міняємо перший і третій стовпець місцями, не забуваючи при цьому поставити знак "$-$" перед отриманим визначником (дивиться властивість 2):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер наша задача полягатиме в тому, щоб отримати нулі на двох нижніх позиціях першого стовпця визначника.

Занулимо елемент -1, який розташовано на перетині першого стовпця і третього рядка нашого визначника. Для цього використовуватимемо елемент 1, що стоїть на першій позиції. Очевидно, щоб отримати нуль із двох чисел 1 та -1 треба їх додати. Ми не маємо права додавати два довільних елементи визначника, бо це, загалом, змінить його значення. Але ми можемо додати усі елементи першого рядка визначника до відповідних елементів його третього рядка. Це, згідно властивості 6 визначника, не змінить його значення, але змінить другий рядок визначника так, що на першому місці в ньому стоятиме нуль. Запропоновану операцію позначимо скорочено $[R_3 + R_1 \to R_3]$, тобто ми додаємо елементи першого рядка до відповідних елементів третього рядка і результат записуємо у третій рядок, залишаючи перший рядок незмінним:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = [R_3 + R_1 \to R_3] = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Елемент, розташований на останній позиції першого стовпця заданого визначника, – число 3. Очевидно, ми не зможемо занулити цей елемент простим додаванням елементів відповідних рядків. У цьому випадку до елементів першого рядка ми маємо застосувати множник. Наприклад, ми можемо вибрати множник $(-\mathbf{3})$, бо $1 \cdot (-\mathbf{3}) + 3 = 0$. Помножимо всі елементи першого рядка визначника на число (-3) і додамо їх до відповідних елементів його четвертого рядка:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = [R_4 + (-3)R_1 \to R_4] = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

У результаті наших перетворень ми отримали визначник, що має три нульові елементи у першому стовпці, але значення якого (з точністю до знаку) дорівнює значенню вихідного визначника. Обчислимо отриманий визначник, розкладаючи його за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 63.$$

Отже, значення заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -63.$$

□

Завдання для самостійного розв'язання

Задачі:

1. Обчислити визначники:

(а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; (б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$; (в) $\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники за правилом трикутника:

(а) $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$; (б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; (в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначники, розкладаючи їх за елементами рядка чи стовпця:

(а) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$;

(б) $\begin{vmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$;

(в) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(г) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(д) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповіді:

1. (а) 10; (б) -23; (в) 42.

2. (а) -51; (б) 87; (в) 2.

3. (а) 50; (б) -21; (в) -23; (г) -108. (д) -52.

Тема 3.
Обернена матриця та матричні рівняння

3.1. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку.

Означення 3.1. *Матриця A^{-1} є **оберненою до матриці** A, якщо:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n, \tag{3.1}$$

де I_n – одинична матриця n-го порядку.

Очевидно, матриця, обернена до квадратної матриці n-го порядку, сама є квадратною матрицею порядку n.

Означення 3.2. *Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник є відмінним від нуля: $detA \neq 0$.*

Теорема 3.1. *Якщо квадратна матриця A порядку n є невиродженою, то існує єдина обернена до неї матриця A^{-1}, яку можна знайти за формулою:*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

де $A_{ij},\ i,\ j = 1, 2, \dots, n$ – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A.

Приклад 3.1. Знайти матрицю, обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок: Обчислимо визначник заданої матриці:

$$detA = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = -10 \neq 0,$$

отже задана матриця є невиродженою і має єдину обернену матрицю. Знайдемо цю матрицю.

Почнемо з алгебраїчних доповнень:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4, \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2,$$
$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1, \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot (-3) = -3.$$

Тоді за формулою (3.2):

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що побудована матриця дійсно є оберненою до заданої матриці A. Для цього, згідно з визначенням оберненої матриці, обчислимо добутки $A \cdot A^{-1}$ та $A^{-1} \cdot A$ і переконаємося, що вони дійсно дорівнюють одиничній матриці другого порядку $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно,

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матрицю, обернену до заданої матриці A, відшукано правильно. □

Аналізуючи структуру побудованої оберненої матриці до заданої квадратної матриці другого порядку, можна зробити наступне:

Зауваження: для невиродженої квадратної матриці другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обернену матриці можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

тобто елементи головної діагоналі треба поміняти місцями, а у елементів бічної діагоналі змінити знаки на протилежні.

Приклад 3.2. Знайти матрицю, обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Розв'язок: Обчислимо визначник заданої матриці, використовуючи будь-який з відомих вам методів, наприклад, правило трикутника:

$$detA = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 4\cdot 1-$$

$$-0\cdot(-1)\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-2) - (-3)\cdot 2\cdot 4 = 22 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення заданої матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 42 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

За формулою (3.2) виписуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи перевірку, переконуємося, що обернену матрицю знайдено правильно:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = I_3.$$

Аналогічно,

$$A^{-1} \cdot A = I_3.$$

Отже обернену матрицю обчислено правильно. $\Box$

3.2. Матричні рівняння

Означення 3.3. ***Матричним рівнянням*** *називається рівняння виду:*

$$A \cdot X \cdot B = C, \tag{3.5}$$

де A, B *і* C *– задані, а* X *– шукана матриці.*

Якщо одна з матриць A або B є одиничною, то матричне рівняння (3.5) набуває вид:

$$A \cdot X = C, \text{ або } X \cdot B = C. \tag{3.6}$$

Шукатимемо розв'язок матричних рівнянь (3.5) та (3.6) у випадку, коли матриці A і B є квадратними та невиродженими. Тоді розв'язки цих рівнянь можна обчислити за формулами:

$$A \cdot X \cdot B = C, \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}; \tag{3.7}$$

$$A \cdot X = C, \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C; \tag{3.8}$$

$$X \cdot B = C, \Rightarrow X = C \cdot B^{-1}. \tag{3.9}$$

Приклад 3.3. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Розв'язок: Матричне рівняння (3.10) має вид:

$$A \cdot X = C, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

тому його розв'язок шукатимемо за формулою (3.8).

Обчислимо матрицю, обернену до матриці A, використовуючи формулу (3.3):

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) = 2 \neq 0;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді шукана матриця X матиме вид:

$$X = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що знайдена матриця дійсно є розв'язком вихідного матричного рівняння. Для цього підставимо її в рівняння (3.10):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перемножуючи матриці в лівій частині рівності, отримуємо тотожність:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

отже, розв'язок рівняння обчислено правильно. $\square$

Завдання для самостійного розв'язання

Задачі:

1. Знайти обернену матрицю до заданої матриці:

   (а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$;

   (б) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = ?$;

   (в) $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = ?$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = ?$;

(б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X = ?;$

(в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X = ?.$

Відповіді:

1. (а) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

   (б) $B^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & 7 \\ 18 & 12 & -3 \end{pmatrix};$

   (в) $C^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 17 & 5 & -35 \\ 1 & 2 & -14 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

2. (а) $X = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix};$

   (б) $X = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 6 \\ -55 & 40 & -33 \end{pmatrix};$

   (в) $X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 54 & -7 \\ -46 & 3 \\ 27 & 4 \end{pmatrix}.$

Тема 4.
Ранг матриці

4.1. Поняття лінійної незалежності

Означення 4.1. *Матриці, які мають лише один стовпець, називаються* ***вектор-стовпцями****, а ті, що мають лише один рядок, –* ***вектор-рядками****.*

Розглянемо сукупність n вектор-стовпців, кожен з яких складається з m елементів:

$$R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ \vdots \\ r_{m1} \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ \vdots \\ r_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \ R_n = \begin{pmatrix} r_{1n} \\ r_{2n} \\ \vdots \\ r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Лінійною комбінацією стовпців $R_1, \ R_2, \ \ldots, \ R_n$ називається сума:

$$\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2 + \ldots + \lambda_n \cdot R_n, \tag{4.1}$$

де $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_n$ – довільні числові коефіцієнти.

Означення 4.2. *Сукупність вектор-стовпців $R_1, \ R_2, \ \ldots, \ R_n$ називається* ***лінійно незалежною****, якщо їх лінійна комбінація (4.1) дорівнює нулю в тому і тільки тому випадку, коли усі числові коефіцієнти $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_n$ дорівнюють нулю. У супротивному випадку сукупність вектор-стовпців $R_1, \ R_2, \ \ldots, \ R_n$ називається* ***лінійно залежною****.*

Аналогічно вводиться поняття лінійно незалежних / залежних вектор-рядків.

Приклад 4.1. Визначити, чи є задані сукупності вектор-стовпців (рядків) лінійно незалежними. Відповідь обґрунтувати.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Розв'язок:

1. Позначимо $R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ і запишемо лінійну комбінацію цих вектор-стовпців з довільними числовими коефіцієнтами:

$$\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   Перевіримо умову лінійної незалежності вектор-стовпців:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0,$$

   що, очевидно, можливо лише в тому випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Отже, згідно визначенню, задані вектор-стовпці є *лінійно незалежними*.

2. Перевіримо умову лінійної незалежності для вектор-стовпців

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   Маємо:

$$\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2 + \lambda_3 \cdot R_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

   Зрівнюючи записану лінійну комбінацію вектор-стовпців з нульом, отримуємо систему рівнянь відносно невідомих числових коефіцієнтів $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

   Система рівнянь містить три невідомі і лише два рівняння для їх визначення. Як ми дізнаємося із наступних розділів лінійної алгебри, системи рівнянь такого виду мають нескінченну кількість розв'язків. Ми навчимося знаходити усі розв'язки такої системи. Але зараз спробуємо знайти один довільний набір із трьох чисел, при підстановці яких у нашу систему рівняння системи обернуться на тотожності.

Виключимо одну із невідомих системи, надаючи їй довільне значення. Нехай $\lambda_1 = 1$. При такому виборі λ_1 система рівнянь відносно невідомих числових коефіцієнтів набуває вигляду:

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = -2, \\ 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Із отриманої системи рівнянь знаходимо значення коефіцієнтів $\lambda_2,\ \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 - 2, \\ 6\left(\lambda_3 - 2\right) + 9\lambda_3 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 - 2, \\ 15\lambda_3 = 15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, при виборі числових коефіцієнтів $\lambda_1 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_2 = -1$, лінійна комбінація заданих вектор-стовпців дорівнює нулю:

$$R_1 - R_2 + R_3 = 0,$$

і ці стовпці є *лінійно залежними*.

Зауваження: якщо вектор-стовпці є лінійно залежними, то принаймні один з них можна представити як лінійну комбінацію інших вектор-стовпців системи.

Наприклад, для лінійно залежних вектор-стовпців $R_1,\ R_2,\ R_3$ виконується рівність:

$$R_1 = R_2 - R_3.$$

Дійсно,

$$R_2 - R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = R_1.$$

Зауваження: значення числових коефіцієнтів, при яких лінійна комбінація лінійно залежних вектор-стовпців дорівнює нулю, визначаються неоднозначно. Сукупність вектор-стовпців є лінійно залежною, якщо ми можемо вказати принаймні один набір коефіцієнтів лінійної комбінації, хоч би один з яких є відмінним від нуля, при якому зазначена лінійна комбінація вектор-стовпців дорівнює нулю.

Так лінійна комбінація вектор-стовпців $R_1,\ R_2,\ R_3$ із нашого прикладу дорівнює нулю, якщо обрати числові коефіцієнти $\lambda_1 = \lambda_3 = -2,\ \lambda_2 = 2$ (можете придумати інші значення коефіцієнтів самостійно).

Проаналізуємо причину того, що нам вдалося підібрати відмінні від нуля коефіцієнти $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, за яких занулювалась лінійна комбінація заданих вектор-стовпців $R_1,\ R_2,\ R_3$. Як було зазначено вище, це відбулося внаслідок того, що кількість невідомих системи для визначення коефіцієнтів $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ перевищувала кількість її рівнянь, що, в свою чергу, сталося, бо кількість вектор-стовпців перевищувала їх висоту.

Загалом є справедливим наступне:

> **Зауваження:** якщо кількість вектор-стовпців сукупності перевищує кількість елементів у кожному з них, то сукупність є лінійно залежною.

Зазначимо, що всі факти, сформульовані вище для сукупності вектор-стовпців, є вірними і для сукупності вектор-рядків.

3. Покажемо, що сукупність вектор-рядків:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

є лінійно незалежною.

Обчислимо значення числових коефіцієнтів, за яких лінійна комбінація цих вектор-рядків дорівнює нулю:

$$\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2 + \lambda_3 \cdot R_3 = 0, \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, отримана система рівнянь має єдиний розв'язок: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а значить задана сукупність вектор-рядків є *лінійно незалежною*.

4. Сукупність вектор-рядків

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є лінійно залежною, бо для будь-якого набору числових коефіцієнтів виду: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, λ_3 – довільне число, що є відмінним від нуля, лінійна комбінація цих вектор-рядків дорівнює нулю:

$$0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2 + \lambda_3 \cdot R_3 = 0.$$

Загалом,

Зауваження: якщо принаймні один із вектор-стовпців (рядків) сукупності є нульовим, то задана сукупність є лінійно залежною.

Якщо із заданої сукупності ми відкинемо нульовий вектор-рядок R_3, то отримає сукупність лінійно незалежних вектор-рядків $R_1, \; R_2$ (перевірте цей факт самостійно).

□

4.2. Ранг матриці і метод його обчислення

Нехай A – довільна матриця, що має n рядків і m стовпців. Розглянемо сукупність m вектор-стовпців, що є стовпцями матриці A, та сукупність n вектор-рядків – рядків матриці A. Ми казатимемо, що стовпці (рядки) матриці A є лінійно незалежними (залежними), якщо є лінійно незалежними (залежними) сукупності відповідних вектор-стовпців (рядків).

Теорема 4.1. *Максимальна кількість лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальній кількості її лінійно-незалежних рядків.*

Означення 4.3. ***Рангом матриці*** *називається максимальна кількість її лінійно незалежних стовпців або рядків.*

Ранг матриці A позначатимемо $Rank\ A$.

Очевидно, ранг матриці не може перевищувати загальної кількості її стовпців або рядків.

Означення 4.4. *Лінійно незалежні стовпці (рядки) матриці називаються її* ***базисними стовпцями (рядками)****.*

Найпростіше визначити ранг трапецеподібної матриці.

Означення 4.5. *Матриця називається **трапецеподібною**, якщо:*

- *перший елемент у першому рядку матриці є відмінним від нуля;*
- *у кожному наступному рядку перший ненульовий елемент розташовано строго на одну позицію правіше за перший ненульовий елемент у попередньому рядку;*
- *усі нульові строки розташовані унизу матриці.*

Наприклад, трапецеподібними є матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не є трапецеподібною у сенсі нашого визначення, бо має нульовий елемент на другій позиції другого рядка, тоді як елементи, що розміщуються на третій і четвертій позиціях цього ж рядка, є відмінними від нуля.

Приклад 4.2. Обчислити ранги матриць A, B і C.

Розв'язок: Визначимо максимальну кількість лінійно незалежних рядків кожної матриці.

Розглянемо сукупність рядків матриці A:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як було показано в прикладі 4.1, пункт 3, ця сукупність вектор-рядків є лінійно незалежною, тобто максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці A – три, отже,

$$Rank\ A = 3.$$

Згідно пункту 4 прикладу 4.1, сукупність рядків матриці B:

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

є лінійно залежною, але перші два з них R_1, R_2 є лінійно незалежними. Отже, максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці B – два і

$$Rank\ B = 2.$$

Загалом:

> **Зауваження:** ранг трапецеподібної матриці дорівнює кількості її ненульових строк.

Тому легко обчислити ранг трапецеподібної матриці $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$Rank\ C = 2.$$

□

Елементарні перетворення матриці:

1. перестановка рядків або стовпців матриці;
2. множення усіх елементів рядка або стовпця матриці на одне й те саме число, відмінне від нуля;
3. додавання до всіх елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів його іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те саме число.

Теорема 4.2. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Означення 4.6. *Дві матриці називаються еквівалентними, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень.*

Відношення еквівалентності двох матриць A і B позначатимемо наступним чином:

$$A \sim B.$$

Очевидно,

Теорема 4.3. *Еквіналетні матриці мають рівні ранги.*

> **Зауваження:** Для будь-якої матриці існує еквівалентна трапецеподібна матриця.

Використаємо це зауваження, для того, щоб обчислити ранг матриці довільного виду.

Приклад 4.3. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок: Виконуючи елементарні перетворення над *рядками* матриці A, знайдемо еквівалентну їй трапецеподібну матрицю. Зазначимо, що трапецеподібна матриця матиме нульові елементи на місцях, розташованих *нижче її діагоналі*:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перший елемент першого рядка матриці A є відмінним від нуля, що задовольняє визначенню трапецеподібної матриці. Тому перший рядок матриці A залишаємо незмінним.

Отримаємо нуль на перетині першого стовпця і другого рядка матриці A. Для цього застосуємо наступні елементарні перетворення: помножимо елементи першого рядка матриці A на число 2 та віднімемо отримані добутки від відповідних елементів її другого рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [R_2 - 2R_1 \to R_2] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Для того, щоб занулити перший елемент третього рядка, достатньо від усіх його елементів відняти відповідні елементи першого рядка матриці:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [R_3 - R_1 \to R_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

У результаті застосованих перетворень перший стовпець матриці набув бажаного виду і в подальших перетвореннях ми його більш не змінюватимемо. Перейдемо до занулювання елементів у другому стовпці матриці. Другий елемент другого рядка матриці A є відмінним від нуля і розташований строго на одну позицію правіше першого ненульового елемента у її першому рядку, тому другий рядок матриці A задовольняє визначенню трапецеподібної матриці і ми його не змінюватимемо.

Отримаємо нуль на перетині другого стовпця і третього рядка матриці A. Для цього ми не можемо використовувати її перший рядок, бо інакше зіпсуємо нулі у першому стовпці. Щоб занулити елемент, що стоїть на перетині другого стовпця і третього рядка матриці A, застосовуватимемо елементарні перетворення до другого і третього рядків матриці. А саме, помножимо елементи другого рядка матриці на 2, елементи його третього рядка – на 3 (множники визначаються по першим ненульовим елементам обраних рядків, множимо "хрест-навхрест"), та віднімемо отриманні добутки. Результат обчислення запишемо у третю строку:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \sim [3R_3 - 2R_2 \to R_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали трапецеподібну матрицю, що є еквівалентною до вихідної матриці A. Кількість ненульових рядків цієї трапецеподібної матриці – два, отже:

$$Rank\ A = 2.$$

□

Завдання для самостійного розв'язання

Задачі:

1. Обчислити ранг матриць:

(а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; (в) $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

(б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; (г) $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

1. (а) $RankA = 3$; (в) $RankC = 3$;
   (б) $RankB = 2$; (г) $RankD = 1$.

Тема 5.
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та деякі методи їх розв'язання

5.1. Основні означення і теореми

Означення 5.1. ***Системою*** m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з*** n ***невідомими*** *називається система виду:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

де $a_{ij},\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots,\ m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ *– задані числа, причому* a_{ij} *називаються* ***коефіцієнтами СЛАР****, а* b_i *– її* ***правими частинами*** *або* ***вільними членами****; а* $x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ *–* ***невідомі СЛАР****.*

Означення 5.2. ***Розв'язком СЛАР*** *(5.1) називається сукупність* n *чисел, яка при подстановці в СЛАР замість невідомих обертає всі рівняння СЛАР на тотожності.*

Кажуть, що СЛАР є ***сумісною****, якщо вона має принаймні один розв'язок, і* ***несумісною****, якщо вона не має жодного розв'язку.*

Якщо СЛАР має декілька розв'язків, то кожен окремий розв'язок СЛАР називається її **частинним розв'язком**, а сукупність усіх частинних розв'язків називається **загальним розв'язком** СЛАР.

Кажуть, що дві СЛАР є **еквівалентними**, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

Введемо наступні матриці:

- *основна матриця* СЛАР (5.1) – це матриця, елементами якої є коефіцієнти СЛАР:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{рівняння 1} \\ \leftarrow \text{рівняння 2} \\ \\ \leftarrow \text{рівняння m} \end{array} \tag{5.2}$$

Рядок матриці заповнюють коефіцієнти одного рівняння СЛАР, а стовпець – коефіцієнти при одній тій самій невідомій.

- *вектор-стовпець правих частин*: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$;

- *вектор-стовпець невідомих*: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Використовуючи матриці A, B та X, СЛАР (5.1) можна переписати у вигляді еквівалентного матричного рівняння:

$$A \cdot X = B. \tag{5.3}$$

Розширеною матрицею СЛАР (5.1) називається матриця, що отримана з матриці A дописуванням справа вектор-стовпця B. Елементи матриць A і B у складі розширеної матриці СЛАР зазвичай відокремлюються вертикальною лінією:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \tag{5.4}$$

Теорема 5.1 (Кронекера – Капеллі)**.** *СЛАР є сумісною в тому і тільки тому випадку, якщо ранг її розширеної матриці дорівнює рангу її основної матриці:*

$$Rank(A|B) = RankA.$$

Нехай СЛАР є сумісною. Позначимо n – кількість невідомих СЛАР, $r = RankA = Rank(A|B)$ – спільний ранг її основної і розширеної матриць. Тоді:

- *якщо $n = r$, то СЛАР має єдиний розв'язок;*

- *якщо $n > r$, то СЛАР має нескінченно багато розв'язків.*

Зауваження: для СЛАР можливі лише наступні три ситуації:

- або СЛАР є несумісною;
- або СЛАР сумісна і має єдиний розв'язок (такі СЛАР називають *визначеними*);
- або СЛАР сумісна і має нескінченну множину розв'язків (такі СЛАР називають *невизначеними*).

5.2. Квадратні СЛАР

Означення 5.3. *СЛАР, у якої кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих: $n = m$, називається* ***квадратною****.*

Очевидно, основна матриця A квадратної СЛАР з n невідомими є квадратною порядку n. Якщо матриця A є невиродженою, то СЛАР є сумісною і має єдиний розв'язок, який можна знайти, застосовуючи один із наступних методів:

Матричний метод. Якщо матриця A є невиродженою, то єдиний розв'язок матричного рівняння (5.3), еквівалентного СЛАР (5.1), можна обчислити за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

де A^{-1} – матриця, обернена до A. Елементи вектор-стовпця X складатимуть розв'язок вихідної СЛАР.

Приклад 5.1. Використовуючи матричний метод, розв'яжемо СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Розв'язок: Запишемо матричне рівняння, що є еквівалентним до заданої СЛАР (5.5):

$$A \cdot X = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A, використовуючи будь-який з відомих методів, наприклад, метод трикутника:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 0 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot (-5) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -2 \neq 0.$$

Матриця A є невиродженою, отже можна побудувати обернену до неї матрицю A^{-1} (дивиться розділ 3.1):

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо розв'язок матричного рівняння, домножуючи матрицю A^{-1} справа на вектор-стовпець правих частин B:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а єдиний розв'язок СЛАР (5.5) має вигляд:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$$

Перевіримо, що отриманий набір чисел задовольняє усім рівнянням системи (5.5). Дійсно:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + (-1) = 3, \\ 2 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -1, \\ 2 - 0 = 2, \end{cases}$$

значить наш розв'язок є вірним. □

Правило Крамера. Введемо позначення:

Δ – визначник основної матриці СЛАР:

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$\Delta_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ – визначник, отриманий із визначника Δ заміною його i-го стовпця на вектор-стовпець правих частин B:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5.2 (Крамера)**.** *Якщо основна матриця СЛАР є невиродженою (*$\Delta \neq 0$*), то СЛАР має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.6}$$

Приклад 5.2. Розв'яжемо СЛАР (5.5) із прикладу 5.1, використовуючи теорему Крамера.

Розв'язок: Обчислимо чотири визначника:
визначник основної матриці СЛАР було обчислено у прикладі 5.1:

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

Визначники $\Delta_i,\ i = 1, 2, 3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Згідно з формулами (5.6) отримуємо розв'язок заданої СЛАР:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Розв'язки СЛАР (5.5), отримані двома різними методами, збігаються, бо

Зауваження: розв'язок СЛАР не залежить від того, який метод було застосовано для його отримання.

□

5.3. Метод Гаусса розв'язання СЛАР

Метод Гаусса розв'язання СЛАР є універсальним методом, що можна застосовувати як для знаходження єдиного розв'язку визначених СЛАР, так і для побудови загального розв'язку невизначених СЛАР. Ідея методу полягає у тому, щоб звести задану довільну СЛАР до еквівалентної *трикутної* або, в загальному випадку, *трапецеподібної* системи, розв'язок якої легко обчислити. Пояснимо основні кроки метода Гаусса на прикладі.

Приклад 5.3. Розв'яжемо СЛАР (5.5) із прикладу 5.1, використовуючи метод Гаусса.

Розв'язок:

Крок 1. Випишемо розширену матрицю СЛАР (5.5) і зведемо її до еквівалентної трапецебодібної матриці, виконуючи *елементарні перетворення над її рядками* (дивиться тему 4). Зауважимо, що елементарні перетворення слід застосовувати до рядка розширеної матриці цілком, тобто як до елементів, що відповідають основній матриці СЛАР A і розташовані зліва від вертикальної відокремлювальної лінії, так і до елементів, які відповідають вектор-стовпцю правих частин B і розміщуються справа від неї:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{l} 2R_2 - R_1 \to R_2 \\ 2R_3 - R_1 \to R_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{l} -6R_3 - 2R_2 \to R_3 \\ \text{або} \\ R_2 + 3R_3 \to R_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right). \tag{5.7}$$

Визначимо, чи є задана СЛАР сумісною, і, якщо так, то скільки розв'язків ця СЛАР може мати. Для цього обчислимо ранги основної і розширеної матриці СЛАР. Нам буде простіше визначити ранг трапецеподібної матриці (5.7), яку ми отримали як результат елементарних перетворень розширеної матриці заданої СЛАР. Очевидно, ранг цієї матриці дорівнює трьом, тому

$$Rank(A|B) = 3. \tag{5.8}$$

Якщо відкинути елементи отриманої трапецеподібної матриці, розташовані справа від вертикальної лінії, то отримаємо трапецеподібну матрицю, еквівалентну основній матриці заданої СЛАР A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці – три, тому:

$$Rank A = 3.$$

Ранги основної і розширеної матриць СЛАР (5.5) є рівними:

$$Rank A = Rank(A|B) = 3, \tag{5.9}$$

тому, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі 5.1, задана СЛАР є сумісною. Окрім цього, ранги матриць співпадають з кількістю невідомих у системі: $n = 3$, а значить, СЛАР є визначеною.

Крок 2. Знайдемо єдиний розв'язок СЛАР (5.5). Для цього випишемо СЛАР, що відповідає трапецеподібній матриці (5.7). Нагадаємо, що елементи кожного рядка цієї матриці відповідають коефіцієнтам і правим частинам відповідного рівняння СЛАР. А саме, елементи, розташовані справа від вертикальної лінії, дорівнюють правим частинам рівнянь, а елементи стовпців, розташованих зліва від цієї лінії, відповідають коефіцієнтам при невідомих СЛАР.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad -6x_2 + 5x_3 = -5, \\ \qquad\qquad 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Очевидно, отриману СЛАР легко розв'язати, якщо починати з її останнього рівняння. Так

$$2x_3 = -2 \;\Rightarrow\; x_3 = -1.$$

Підставляючи отримане значення x_3 у друге рівняння системи, знаходимо x_2:

$$-6x_2 + 5 \cdot (-1) = -5 \;\Rightarrow\; x_2 = 0.$$

Знаючи значення x_2 і x_3, знаходимо x_1 з першого рівняння системи:

$$2x_1 - 4 \cdot 0 + (-1) = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 2.$$

Отже, єдиний розв'язок заданої СЛАР має вигляд:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$$

□

Приклад 5.4. Розв'язати СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases} \tag{5.10}$$

Розв'язок: Запишемо розширену матрицю, що відповідає СЛАР (5.10), і зведемо її до трапецеподібної:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \tag{5.11}$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} 2R_2 - R_1 \to R_2 \\ 2R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ 2R_4 - R_1 \to R_4 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} R_3 - R_2 \to R_3 \\ R_4 + R_2 \to R_4 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Обчислимо ранги матриць і зробимо висновки про існування розв'язків у заданої СЛАР:

$$Rank(A|B) = RankA = 3,$$

що є меншим за кількість невідомих СЛАР: $n = 4$, отже, за теоремою Кронекера-Капеллі 5.1 СЛАР є сумісною але невизначеною.

Побудуємо загальний розв'язок заданої СЛАР.

Для цього випишемо СЛАР по отриманій трапецеподібній матриці:

$$\begin{array}{c} \overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}^{\text{базисні}} \quad \overbrace{x_4}^{\text{вільна}} \qquad \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \tag{5.12}$$

Ми маємо чотири невідомі й лише три рівняння для їх визначення. Кількістю невідомих і рівнянь різниця на один. Тому значення однієї невідомої системи можна вибрати довільним чином – вона буде *вільною невідомою* або *параметром* в загальному розв'язку СЛАР, а інші три невідомі ми виражатимемо через цей параметр, використовуючи рівняння СЛАР (5.12), – ці невідомі називають *базисними*.

У якості базисних невідомих оберемо невідомі, що відповідають першим трьом стовпцям трапецеподібної матриці, отриманої у результаті елементарних перетворень матриці $(A|B)$: $x_1,\ x_2$ та x_3. Тоді вільною невідомою, що набуватиме довільних значень, буде x_4. Виразимо $x_1,\ x_2$ та x_3 через x_4 із рівнянь системи (5.12). Починаючи з останнього рівняння, маємо:

$$
\begin{gathered}
2x_3 + 2x_4 = 4 \ \Rightarrow \ x_3 = 2 - x_4, \\
x_2 + 3(2 - x_4) + x_4 = 7 \ \Rightarrow \ x_2 = 1 + 2x_4, \\
2x_1 - (1 + 2x_4) + (2 - x_4) - 3x_4 = -1 \ \Rightarrow \ x_1 = -1 + 3x_4.
\end{gathered}
$$

Таким чином, загальний розв'язок СЛАР (5.10) має вигляд:

$$
\begin{cases}
x_1 = -1 + 3x_4, \\
x_2 = 1 + 2x_4, \\
x_3 = 2 - x_4, \\
x_4,
\end{cases}
\tag{5.13}
$$

де x_4 – параметр, що може приймати довільні значення.

Зауваження: загальний розв'язок СЛАР виписується неоднозначно. Все залежить від того, до якої еквівалентної трапецеподібної матриці ви звели розширену матрицю СЛАР та які невідомі прийняли за базисні, а які – за вільні.

Зауваження: загальний розв'язок СЛАР – це, фактично, формула, за якою можна знайти будь-який з її частинних розв'язків. Для цього необхідно надавати відповідні значення параметрам.

Випишемо, наприклад, декілька частинних розв'язків СЛАР (5.10):

$$
\text{якщо } x_4 = 0, \ \begin{cases}
x_1 = -1, \\
x_2 = 1, \\
x_3 = 2, \\
x_4 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\text{якщо } x_4 = 1, \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{тощо.}
$$

Ви можете самостійно переконатися, що отримані за формулами (5.13) набори чисел є розв'язками СЛАР (5.10), підставивши їх у відповідні рівняння цієї системи. □

Приклад 5.5. Розв'язати СЛАР:

$$
\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases} \tag{5.14}
$$

Розв'язок: Запишемо розширену матрицю, що відповідає СЛАР (5.14), і зведемо її до трапецеподібної:

$$
(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \tag{5.15}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{c} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right).
$$

Отримана у результаті запропонованих елементарних перетворень матриця не є трапецеподібною, бо має нульовий елемент на перетині другого рядка і стовпця. Щоб звести її до трапецеподібної, поміняємо місцями другий і третій стовпці нашої матриці. При цьому зміниться порядок невідомих у рівняннях СЛАР:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \end{array} \sim
$$

$$
\sim [R_3 - R_2 \to R_3] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}.
$$

Маємо:

$$
Rank(A|B) = RankA = 2 < n = 4,
$$

отже, за теоремою Кронекера-Капеллі 5.1 СЛАР є сумісною але невизначеною. Різниця між кількістю невідомих і рівнянь – два. Тому для заданої СЛАР матимемо дві базисні і дві вільні невідомі. У якості базисних оберемо невідомі, що відповідають першим двом стовпцям трапецеподібної матриці, отриманої у результаті елементарних перетворень матриці $(A|B)$: $x_1,\ x_3$. Тоді вільними невідомими будуть $x_2,\ x_4$.

Випишемо СЛАР по отриманій трапецеподібній матриці:

$$\begin{array}{c} \overbrace{x_1 \quad x_3}^{\text{базисні}} \quad \overbrace{x_2 \quad x_4}^{\text{вільні}} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_3 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 1. \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Виразимо x_1 та x_3 через x_2 та x_4 із рівнянь системи (5.16). Починаючи з останнього рівняння, маємо:

$$x_3 + x_4 = 1 \ \Rightarrow\ x_3 = 1 - x_4,$$
$$x_1 - 3(1 - x_4) - 2x_2 - x_4 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 3 + 2x_2 - 2x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок СЛАР (5.14) має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 + 2x_2 - 2x_4, \\ x_2, \\ x_3 = 1 - x_4, \\ x_4. \end{array} \right. \tag{5.17}$$

□

Приклад 5.6. Розв'язати СЛАР:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Розв'язок: Запишемо розширену матрицю СЛАР (5.18) і зведемо її до трапецеподібної:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} R_3 - R_2 \to R_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

У цьому випадку ранг розширеної матриці СЛАР: $Rank(A|B) = 3$, а ранг основної матриці: $Rank A = 2$, отже,

$$Rank(A|B) \neq Rank A,$$

і, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі 5.1, СЛАР (5.18) є несумісною. □

5.4. Однорідні СЛАР

Означення 5.4. *СЛАР, всі праві частини якої дорівнюють нулю, називається **однорідною СЛАР**:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Будь-яка однорідна СЛАР є сумісною. Дійсно, легко перевірити, що СЛАР (5.19) має принаймні один нульовий розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

який іноді називають *тривіальним розв'язком* однорідної СЛАР.

Зауваження: оскільки СЛАР (5.19) є сумісною, то ранги її розширеної і основної матриці є рівними і не перевищують кількості невідомих СЛАР n:

$$Rank(A|B) = RankA = r \leq n.$$

У випадку $r = n$ СЛАР (5.19) має єдиний тривіальний розв'язок. Якщо $r < n$, то СЛАР (5.19) має нескінченно багато розв'язків, у їх числі і тривіальний.

Теорема 5.3 (властивості розв'язків однорідної СЛАР)**.** *Якщо* $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n$ *та* $\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n$ *– два розв'язки однорідної СЛАР (5.19), то їх лінійна комбінація:*

$$\lambda \cdot \alpha_1 + \gamma \cdot \beta_1, \ \lambda \cdot \alpha_2 + \gamma \cdot \beta_2, \ \ldots, \ \lambda \cdot \alpha_n + \gamma \cdot \beta_n,$$

де $\lambda, \ \gamma$ *– довільні числові множники, теж є розв'язком тієї самої однорідної СЛАР.*

Нехай нам відомі k розв'язків однорідної СЛАР (5.19):

$$\alpha_1^i, \ \alpha_2^i, \ \ldots, \ \alpha_n^i, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

де верхнім індексом позначено номер нашого розв'язку. Побудуємо із цих розв'язків k вектор-стовпців висоти n:

$$X_i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \vdots \\ \alpha_n^i \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ми казатимемо, що k розв'язків однорідної СЛАР є *лінійно незалежними*, якщо є лініно незалежною сукупність вектор-стовпців X_i (дивиться відповідні визначення із теми 4).

Нехай однорідна СЛАР з n невідомими має нескінченно багато розв'язків, тобто ранг її основної матриці: $RankA = r < n$.

Означення 5.5. ***Фундаментальною системою розв'язків*** *однорідної СЛАР із* n *невідомими називається сукупність її лінійно незалежних розв'язків, взятих у кількості* $(n - r)$.

Теорема 5.4. *Будь-який розв'язок однорідної СЛАР можна записати у вигляді лінійної комбінації її фундаментальної системи розв'язків.*

Приклад 5.7. Побудувати фундаментальну систему розв'язків однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок: Зведемо задану СЛАР до трапецеподібної (дивиться розділ 5.3). Зауважимо, що елементарні перетворення, застосовані до рядків розширеної матриці однорідної СЛАР, не змінюватимуть її стовпець, що відповідає правим частинам (цей стовпець є нульовим), тому працюватимемо лише із основною матрицею заданої СЛАР:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim [R_2 - R_1 \to R_2] \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim [R_3 + R_2 \to R_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для заданої однорідної СЛАР:

$$r = Rank(A|B) = RankA = 2, \; n = 4,$$

$r < n$, отже СЛАР є невизначеною. Випишемо її загальний розв'язок. Нехай $x_1, \; x_2$ – базисні невідомі заданої СЛАР, а $x_3, \; x_4$ – її вільні невідомі, тоді:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок заданої однорідної СЛАР має вид:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4, \\ x_3, \\ x_4. \end{cases}$$

Випишемо частинні розв'язки заданої СЛАР, обираючи значення параметрів $x_3,\ x_4$ спеціальним чином:

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 0; \end{cases} \qquad x_3 = 0,\ x_4 = 1\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Отримані розв'язки є лінійно незалежними (можете перевірити це самостійно) і кількість їх дорівнює $n - r = 4 - 2 = 2$. Отже, ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої однорідної СЛАР.

Зауваження: фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР визначається не єдиним чином. Для заданої однорідної СЛАР можна побудувати нескінченно багато фундаментальних систем розв'язків, але всі вони складатимуться із однакової кількості лінійно незалежних розв'язків цієї СЛАР.

Наприклад, ми можемо помножити кожен з розв'язків побудованої фундаментальної системи на довільне число, відмінне від нуля, і знов отримаємо два лінійно незалежні розв'язки тієї самої однорідної СЛАР – тобто, ще одну фундаментальну систему цієї СЛАР.

Пояснимо на нашому прикладі значення теореми 5.4. Для цього запишемо загальний розв'язок нашої однорідної СЛАР спеціальним чином. Позначимо наші параметри:

$$x_3 = C_1,\ x_4 = C_2,$$

тоді

$$\begin{cases} x_1 = & C_1 & (-3) & + & C_2 & (-4) & , \\ x_2 = & C_1 & (-1) & + & C_2 & (-1) & , \\ x_3 = & C_1 & 1 & + & C_2 & 0 & , \\ x_4 = & C_1 & 0 & + & C_2 & 1 & . \end{cases} \tag{5.20}$$

Числа, що виділені сірим, є розв'язками фундаментальної системи нашої однорідної СЛАР, записаними у стовпець. Із запису (5.20) видно, що довільний розв'язок $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ заданої однорідної СЛАР можна представити як лінійну комбінацію розв'язків її фундаментальної системи із відповідними коефіцієнтами $C_1,\ C_2$. $\square$

Завдання для самостійного розв'язання

Задачі:

1. Розв'язати задані системи лінійних алгебраїчних рівнянь **1)** матричним методом; **2)** за правилом Крамера:

(а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 7; \end{cases}$

(б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12; \end{cases}$

(в) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

(г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

2. Дослідити СЛАР на сумісність та розв'язати ті з них, що мають розв'язок:

(а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

(б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad = -5, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -5; \end{cases}$

(в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$

(г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4; \end{cases}$

(д) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \qquad = 0. \end{cases}$

3. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідних СЛАР:

(а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 12x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0; \end{cases}$

(б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Відповіді:

1. (а) $x_1 = 2,\ x_2 = 1;$ (в) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2;$

   (б) $x_1 = -2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4;$ (г) $x_1 = -\frac{8}{7},\ x_2 = \frac{16}{7},\ x_3 = 1.$

2. (а) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1;$

   (б) $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1;$

   (в) $x_1 = \frac{7}{18} + \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2,\ x_2 = C_1,\ x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2,\ x_4 = C_2;$

   (г) $x_1 = C,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = C;$

   (д) несумісна.

3. (а) загальний розв'язок:
   $x_1 = -\frac{1}{2}C_1 + C_2,\ x_2 = C_1 + C_2,\ x_3 = C_1,\ x_4 = C_2.$

   Фундаментальна система розв'язків: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

   (б) загальний розв'язок:
   $x_1 = C,\ x_2 = 2C,\ x_3 = C,\ x_4 = C.$

   Фундаментальна система розв'язків: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

ДОДАТКИ

Додаток А. Самостійна робота: Дії над матрицями. Визначник

Варіант 1

1. Обчислити задані вирази, де $A,\ B,\ C$ – задані матриці:

$$(A-3B)\cdot C^T = ?$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = ?.$$

Відповіді:

1. $\begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -9 & -13 \\ 19 & 32 \end{pmatrix}$;
2. 155.

Варіант 2

1. Обчислити задані вирази, де $A,\ B,\ C$ – задані матриці:

$$A\cdot(2B+C)^T = ?$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -7 & 9 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix} = ?.$$

Відповіді:

1. $\begin{pmatrix} -3 & 8 & 31 \\ -8 & -4 & 32 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$;

2. 15.

Додаток Б. Контрольна робота: Обернена матриця. Ранг матриці. СЛАР

Варіант 1

1. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad X = ?$$

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad RankA = ?$$

3. Розв'язати СЛАР

   (a) за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$$

   (б) за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 \qquad = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Відповіді:

1. $X = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -18 & 29 \\ -16 & -17 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$;

2. $RankA = 3$;

3. (а) $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -2;$
   (б) $x_1 = \frac{2}{3}C_1,\ x_2 = 3 - \frac{7}{3}C_1 - C_2,\ x_3 = C_1,\ x_4 = C_2.$

Варіант 2

1. Розв'язати матричне рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X = ?$$

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad RankA = ?$$

3. Розв'язати СЛАР

   (а) за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = 1; \end{cases}$$

   (б) за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Відповіді:

1. $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 36 & -47 & 27 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix};$

2. $RankA = 2;$

3. (а) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1;$
   (б) $x_1 = \frac{-35C+37}{2},\ x_2 = -4C + 4,\ x_3 = \frac{15C-13}{2},\ x_4 = C.$

Додаток В. Тестові завдання з лінійної алгебри

1.	Задано матриці A розміру 2×3 і B розміру 3×2. Тоді матриця A^T-B матиме розмір 1. 2×2; 2. 3×2; 3. 2×3.
2.	Задано матриці A розміру 2×3 і B розміру 3×5. Тоді матриця $A\cdot B$ матиме розмір 1. 3×3; 2. 2×5; 3. не існує.
3.	Якщо транспонувати квадратну матрицю, то її визначник: 1. не зміниться: $detA=detA^T$; 2. змінить знак на протилежний: $detA=-detA^T$; 3. обернеться на нуль: $detA^T=0$.
4.	Якщо поміняти місцями два довільних рядка матриці, то її визначник: 1. не зміниться; 2. змінить знак на протилежний; 3. обернеться на нуль.
5.	Задано матрицю A розміру 3×3, $detA=5$. Матрицю B отримали із матриці A множенням усіх елементів її першого рядка на число 2. Тоді визначник матриці B дорівнюватиме: 1. 40; 2. 10; 3. 5.
6.	Нехай A – квадратна матриця порядку n, A^{-1} – матриця, обернена до A, I_n – одинична матриця порядку n, O – нульова матриця того самого порядку. Яке з наступних тверджень є вірним: 1. $A^{-1}=\frac{1}{A}$; 2. $A+A^{-1}=O$; 3. $A\cdot A^{-1}=I_n$.

7.	Якщо матриці A і B є еквівалентними, то: 1. вони є рівними: $A = B$; 2. їх визначники є рівними: $detA = detB$; 3. їх ранги є рівними: $RankA = RankB$.
8.	Які з перерахованих нижче операцій не змінюють рангу матриці: 1. множення елементів рядка матриці на одне й те саме число; 2. додавання до усіх елементів рядка матриці одне й те саме число; 3. додавання до усіх елементів рядка матриці відповідних елементів її іншого рядка, помножених на одне й те саме число.
9.	Серед записаних систем рівнянь вибрати ту, яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР): 1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = 1; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \sin x_1 + x_2 = 0,5, \\ x_1 - \cos x_2 = 0. \end{cases}$
10.	СЛАР називається сумісною, якщо: 1. має принаймні один розв'язок; 2. має єдиний розв'язок; 3. не має розв'язків.

11.	Нехай ранги основної і розширеної матриць СЛАР є рівними: $RankA = Rank(A\|B) = 3$, а кількість невідомих СЛАР $n = 4$. Тоді: 1. СЛАР є визначеною; 2. СЛАР є невизначеною; 3. СЛАР є несумісною.
12.	Нехай ранги основної і розширеної матриць СЛАР: $RankA = 2$, $Rank(A\|B) = 3$, а кількість невідомих СЛАР $n = 3$. Тоді: 1. СЛАР є визначеною; 2. СЛАР є невизначеною; 3. СЛАР є несумісною.

Література

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. -– М.: Наука, 1980.

[2] Высшая математика в примерах и задачах Т. 1./ Под ред. Ю.Л. Геворкяна. -– Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.–448с.

[3] Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л., Чикина Н.А. Краткий курс высшей математики. -– Ч.1. Харьков: НТУ «ХПІ», 2009.– 324с.

[4] Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л., Чикина Н.А. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001.

[5] Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики. Частина 1./ За ред. Н.О. Чікіної. – Харків: Підручник НТУ «ХПИ», 2014. – 224 с.

Навчальне видання

НАБОКА Олена Олексіївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

Відповідальний за випуск проф. Ю. Л. Геворкян
Роботу до видання рекомендувала доц. Г. В. Руднєва

В авторській редакції

План 2020 р., поз. 89.

Підп. до друку 19.10.2020 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний. Друк — цифровий. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,8. Наклад 20 прим. Зам. № 203839 . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.