МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра математичних методів в інженерії

Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи з дисципліни

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

з розділів

«Лінійна алгебра» та «Основи векторної алгебри»

для студентів денної та заочної форм навчання
галузі знань 12 «Інформаційні технології»
та дисципліни «Вища математика»
для студентів денної та заочної форм навчання
галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»

Тернопіль
2018

УДК 512.8(07)+516(07)
М54

Укладачі:
Кривень А.В., докт. фіз.-мат. наук, професор;
Ясній О.П., док. тех. наук, доцент;
Бойко А.Р., канд. техн. наук, асистент.

Рецензенти:
Михайлишин М.С., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 9 від 20 квітня 2018 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної ради
факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 9 від 24 травня 2018 р.

М54 Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» з розділів «Лінійна алгебра» та «Основи векторної алгебри» для студентів денної та заочної форм навчання галузі знань 12 «Інформаційні технології» та дисципліни «Вища математика» для студентів денної та заочної форм навчання галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» / Укладачі : Кривень А.В., Ясній О.П., Бойко А.Р. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2018. – 68 с.

УДК 512.8(07)+516(07)

Відповідальний за випуск докт. фіз-мат. наук, професор *А.В. Кривень*

ЗМІСТ

ВСТУП

Математична підготовка бакалаврів інженерного та економічного напрямків розпочинається курсом лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Даний посібник орієнтований на односеместровий курс об'ємом 4 кредити ЄСТС (32 год. лекцій, 32 год. практичних занять) і стосується його першої частини – модуля «Лінійна та векторна алгебра». Програма курсу наведена нижче.

1. Матриці типи матриць, дії над матрицями: додавання матриць, множення матриці на число. множення матриць. Властивості операцій із матрицями.

2. Означення визначника. Мінор і алгебраїчного доповнення елемента визначника. Визначники другого і третього порядків. Властивості визначників. Елементарні перетворення матриці. Теорема Лапласа (без доведення). Обернена матриця.

3. Арифметичний простір. Поняття лінійно залежності і лінійної незалежності в Rn. Ранг матриці. Теорема про базовий мінор.

4. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Рівносильність, сумісність, визначеність. Розв'язування визначених СЛАР матричним способом та методом Крамера.

5. СЛАР як задача про лінійну комбінацію стовпців розширеної матриці СЛАР. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса.

6. Однорідна СЛАР**.** Властивості розв'язки однорідної СЛАР. Поняття про фундаментальну систему розв'язків однорідної СЛАР. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

7. Поняття вектора. Рівність, колінеарність, компланарність векторів. Операції з векторами: множення вектора на число, сума векторів. Властивості операцій з векторами.

8. База векторів. Розклад вектора за базою. Координати вектора. Зведення геометричних операцій із векторами до алгебраїчних операцій із компонентами векторів.

9. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів і їх властивості у довільній прямолінійній системі координат.

10. Декартова система. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів у декартовій системі. Критерії колінеарності, перпендикулярності, компланарності векторів. Кут між векторами.

10. Алгебраїчні лінії першого порядку. Загальне рівняння прямої на площині. Геометричний зміст коефіцієнтів загального рівняння прямої.

11. Форми рівнянь прямої у площині: канонічне рівняння, рівняння у відрізках, рівняння прямої, проведеної через дві точки, нормальне рівняння. Відхилення і відстань точки від прямої. Взаємне розміщення прямих у площині. Паралельність, перпендикулярність, кут між прямими в площині.

12. Алгебраїчна поверхня першого порядку. Загальне рівняння площини. Форми рівнянь площини: канонічне рівняння, рівняння у відрізках, рівняння площини, що проходить через три точки, нормальне рівняння. Відхилення і відстань точки від площини. Взаємне розміщення площин. Паралельність, перпендикулярність, кут між площинами.

13. Пряма в просторі. Форми рівнянь прямої у просторі: пряма як перетин двох площин, канонічне рівняння, рівняння прямої, проведеної через дві точки.

14. Задачі на пряму та площину. Кут між прямими, кут між прямою і площиною. Паралельність і мимобіжність.

15. Криві другого порядку. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи**.** Ексцентриситет і директриси. Співвідношення між півосями, фокусом та відстанню до директриси.

16. Поверхні обертання. Поверхні другого порядку**.** Канонічні рівняння еліпсоїда обертання, еліпсоїда, гіперболоїда обертання, однопорожного і двопорожного гіперболоїдів обертання, однопорожного і двопорожного гіперболоїдів, параболоїда обертання, параболоїда.

I ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ЗАНЯТТЯ 1. МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Означення 1.1.1. (*матриці*). Матрицею (точніше $n \times m$ числовою матрицею) називають таблицю, що містить n рядків і рядків m чисел.

Елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці A позначають a_{ij}. Якщо $m = n$, матрицю називають квадратною n-го порядку. елементи квадратної матриці з рівними індексами утворюють головну діагональ матриці. Елементи, розміщені на відрізку, що з'єднує нижній лівий і верхній правий кути квадратної матриці, утворюють побічну діагональ матриці.

Квадратну матрицю, всі елементи якої під головною діагоналлю дорівнюють нулю ($a_{ij} = 0\,(i > j)$), називають верхньою трикутною матрицею. Коли нульовими є всі елементи над головною діагоналлю ($a_{ij} = 0\,(i < j)$) – нижньою трикутною. Квадратну матрицю називають діагональною, якщо всі її елементи поза головною діагоналлю дорівнюють нулю ($a_{ij} = 0\,(i \neq j)$). Діагональну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої однакові, називають скалярною. Скалярну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, – одиничною. Одиничну матрицю позначають буквою E.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають нульовою.

Матрицю $B(m \times n)$ називають транспонованою до матрицею $A(n \times m)$, ($B = A^T$) якщо кількості рядків і стовпців матриці A відповідно дорівнюють кількостям стовпців і рядків матриці B і $b_{ij} = a_{ji}\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$.

Означення 1.1.2. (*добутку матриці на число*). Добутком матриці $A(n \times m)$ на число λ називають матрицю $B(n \times m)$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на це число ($B = \lambda A$).

Означення 1.1.3. (*суми матриць*). Сумою матриць $A(n\times m)$ і $B(n\times m)$ називають таку матрицю $C(n\times m)$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць-доданків: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. ($C=A+B$).

Віднімання матриць є операцією, оберненою щодо додавання. Рівність $C=A-B$ означає, що $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ для усіх i та j.

Додавання визначено лише для матриць однакових розмірностей.

Означення 1.1.4. (*множення матриць*). Добутком $(n\times m)$ матриці A на $(m\times k)$ матрицю B називають $(n\times k)$ матрицю C ($C=AB$), елементи якої знаходять за правилом: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$.

Означення 1.1.5. (*елементарних перетворень матриці*). Перестановку місцями двох довільних рядків (стовпців) матриці називають елементарним перетворенням матриці першого типу; множення елементів рядка (стовпця) матриці на одне і те ж ненульове число – елементарним перетворенням матриці другого типу; додавання до рядка (стовпця) матриці іншого її рядка (стовпця), попередньо помноженого на ненульове число, – елементарним перетворенням третього типу.

Приклад 1.1.1. Знайти матрицю $C=A^T-3B$, де $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\5&6\\0&3\end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо матрицю 3*B*, помноживши всі елементи матриці *B* на 3. Виконаємо віднімання A^T і 3*B* (поелементно):

$$C=A^T-3B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0&3\\5&6\\6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&3\\-15&18\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\-13&-17\\3&-7\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.1.2. Знайти добуток матриць *A і B,* якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\5&1\end{pmatrix}$.

Розв'язування. Добуток матриць $\underset{2\times3}{A}\,\underset{2\times2}{B}$ не існує; тому знайдемо добуток $\underset{2\times2}{B}\,\underset{2\times3}{A} = \underset{2\times3}{C}$ Виділимо елементи матриці C; спочатку – елементи 1-го рядка: c_{11} – це сума добутків елементів 1-го рядка першої матриці B на елементи 1-го стовпця другої матриці A:

$$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = 0\cdot1 + 1\cdot3 = 3;$$

аналогічно

$$c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0\cdot2 + 1\cdot4 = 4;$$
$$c_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} = 0\cdot0 + 1\cdot5 = 5.$$

Так само знаходимо елементи 2-го рядка матриці C:

$$c_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = 5\cdot1 + 1\cdot3 = 8;$$
$$c_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 5\cdot2 + 1\cdot4 = 14;$$
$$c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} = 5\cdot0 + 1\cdot5 = 5.$$

Таким чином, $C = BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}$.

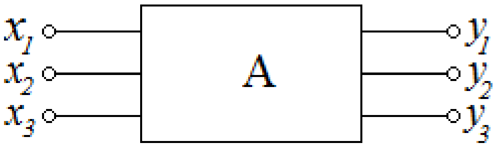
Приклад 1.1.3 Знайти добуток матриць AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

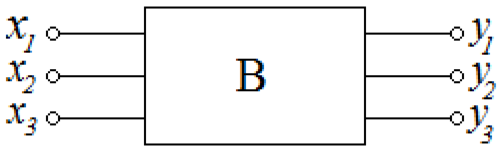
Розв'язування. Кількість стовпців матриці A і кількість рядків матриці B однакові, тому операція AB визначена.

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times2 + 3\times3 - 2\times2 & 1\times5 + 3\times2 + 2\times4 & 1\times1 - 3\times1 + 2\times3 \\ -1\times2 + 2\times3 - 4\times2 & -1\times5 + 2\times2 + 4\times4 & -1\times1 - 2\times1 + 4\times3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 19 & 4 \\ -4 & 15 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача на застосування. Два перетворювачі сигналів з трьома входами x_1, x_2, x_3 та трьома виходами y_1, y_2, y_3





функціонують за правилами:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3, \end{aligned}$$

де a_{ij} і b_{ij} задані числа, що описують перетворювач як технічну систему.

Закон функціонування перетворювача, що є результатом послідовного з’єднання перетворювачів А та В у припущенні, що саме з’єднання ніяк не впливає на функціонування перетворювачів А та В.

У цьому випадку вхідними сигналами перетворювача В стають вихідні сигнали перетворювача А. І, отже закон функціонування послідовного з’єднання отримаємо, замінивши у других трьох рівностях x_1 на $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, x_2 на $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, x_3 на $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$. В результаті отримуємо такий зв'язок вхідних x_1, x_2, x_3 вихідних сигналів:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathrm{BA} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Завдання для самостійного виконання. *Дано дві матриці A і B. Знайти 1) C=AB-BA; 2) C=A²-B²-(A+B)(A-B), 3) C=AᵀBᵀ.*

2.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2.2 $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.5 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.6 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

2.7 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.8 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2.10 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

ЗАНЯТТЯ 2. ВИЗНАЧНИКИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Означення 1.2.1. (*визначника матриці*). Визначником (1×1) матриці (a_{11}) називають число a_{11}. Визначник матриці n порядку ($n>1$) визначають за рекурентною формулою:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k},$$

де M_{1k} – визначник матриці $n-1$ порядку, отриманої в результаті викреслювання у вихідній матриці першого рядка і k -го стовпця.

Для визначника матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ використовують позначення

$$\det A, \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ або } |A|.$$

Для визначників 2-го і 3-го порядків матимемо такі формули:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}a_{22}+(-1)^{1+2}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Означення 1.2.2. (*мінора елемента визначника*). Мінором, відповідним елементу a_{ij} визначника n порядку називають визначник $n-1$ порядку, який отримують із вихідного визначника в результаті викреслювання його i -го рядка і j -го стовпця.

Означення 1.2.3. (алгебраїчного доповнення елемента матриці). Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці називають мінор елемента a_{ij} визначника цієї матриці, помножений на $(-1)^{i+j}$.

Теорема** (Лапласа).** Визначник матриці $A(n\times n)$ дорівнює сумі добутку елементів будь-якого її рядка чи стовпця, помножених на алгебраїчні доповнення цих же елементів:

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{ki}\quad (i=1,2,...,n).$$

Справедливі такі властивості визначників.

Властивість 1. Визначник не змінюється при транспонуванні матриці.

Властивість 2. Перестановка місцями будь-яких двох рядків чи стовпців матриці змінює знак визначника**.**

Властивість 3. Визначник, що містить два однакових рядки чи стовпці, дорівнює нулю.

Властивість 4. Якщо будь-який рядок чи стовпець матриці помножити на стале число, то й сам визначник помножиться на це число.

Тому, зокрема, визначник, що має нульовий рядок чи стовпець, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо деякий рядок (стовпець) визначника записаний сумою рядків (стовпців), то він дорівнює сумі двох визначників, у яких відповідний рядок (стовпець) утворений першим і другим доданками**.**

Властивість 6. Визначник не змінюється при елементарних перетвореннях матриці третього типу.

Властивість 7. Сума добутків елементів рядка чи стовпця матриці на алгебраїчне доповнення елементів іншого рядка чи стовпця цієї матриці дорівнює нулю.

Властивість 8. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників: $\det AB = \det A \det B$.

Приклад 1.2.1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Безпосереднє обчислення на основі розвинення за елементами рядка чи стовпця містило б 5!=120 доданків. Використовуючи властивості визначників, можна суттєво зменшити обчислювальні затрати.

Обчислимо його двома способами.

Перший спосіб.

Віднімемо перший рядок від другого, третього і т.д. останнього рядків. Розвинемо новий визначник за другим рядком, який містить три нулі, і отримаємо два визначники четвертого порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Перший з них є діагональним, а другий знову розвинемо за другим рядком, у якому є два нулі.

$$\Delta = 60 + 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right) = 60 + 2\left(20 + 3\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \right) \right) =$$
$$= 60 + 2(20 + 3(5 + 44)) = 394.$$

Другий спосіб.

За допомогою елементарних перетворень у п'ятому стовпці утворимо чотири нулі й розвинемо перетворений визначник за п'ятим стовпцем. Після цього, додавши до другого стовпця перший, помножений на два, утворимо в першому рядку визначника четвертого порядку три нульові елементи. Розвинемо цей визначник за першим рядком. До третього стовпця визначника третього порядку додаємо перший, помножений на два, і розвинемо отриманий визначник третього порядку за другим рядком.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -11 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ -11 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -11 & -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \\ -27 & -5 & -59 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -59 \end{vmatrix} = -2(-177-20) = 394.$$

Кожну квадратну матрицю елементарними перетвореннями можна звести до 1) трикутної, з ненульовими усіма діагональними елементами 2) східчастої – трикутна, не усі діагональні елементи якої відмінні від нуля. У другому випадку визначник вихідної матриці дорівнює нулю, у першому добутку діагональних елементів зі знаком «+» або «-».

Приклад 1.2.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо звівши його до трикутної форми.

Розв'язування. За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю A до трикутного виду. Якщо можливо, перестановкою рядків (стовпців) добиваємося того, аби елемент $a_{11} = 1$. В даному випадку для цього досить поміняти місцями 1-й и 3-й стовпці; при цьому змінюється знак визначника матриці *A***:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Перемножуючи елементи 1-го рядка на числа $(-a_{i1})$, i = 1,2, 3, 4, у даному випадку на числа 1, (–2), (–-1), і відповідно додаючи їх до елементів 2-го, 3-го і 4-го рядків, добиваємося того, щоби всі елементи 1-го стовпця (крім a_{11}) стали нульовими:

$$det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі, якщо можливо, перестановкою рядків (стовпців) добиваємося того, аби елемент a_{22} = 1. В даному випадку це можливо, коли переставити 2-й і 3-й рядки; при цьому змінюється знак визначника. Перемножуючи елементи 2-го рядка, отриманої матриці на числа $(-a_{i2})(i = 3, 4)$, у даному випадку на числа (–2) і 1, добиваємося того, щоби всі елементи 2-го стовпця (окрім a_{22}) стали нульовими:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для отримання трикутної матриці у даному випадку досить додати елементи 3-го рядка отриманої матриці до елементів 4-ї. Визначник трикутної матриці рівний добутку її діагональних елементів:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Означення 1.2.4. (*оберненої матриці*). Матрицю $B(n \times n)$ називають оберненою до матриці $A(n \times n)$, якщо $BA = AB = E$.

Обернену до матриці A прийнято позначати A^{-1}.

Означення 1.2.5. (*невиродженої матриці*). Матрицю, визначник якої не дорівнює нулю, називають невиродженою або неособливою.

Теорема (*про обернену матрицю*). Кожна невироджена матриця має обернену, і до того ж тільки одну.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; \ldots \; A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; \ldots \; A_{n2} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ A_{1n} \; A_{2n} \; \ldots \; A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2.3. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ і перевірити результат**.**

Розв'язування.

а) Знаходимо визначник матриці $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

Так як $|A| \neq 0$, то матриця A — невироджена і обернена матриця A^{-1} існує та є єдиною.

б) Транспонуємо матрицю A: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

в) Знаходимо алгебраїчні доповнення A'_{ij} всіх елементів транспонованої матриці A′ і складаємо із них приєднану матрицю S:

$$A'_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; A'_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; A'_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A'_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; A'_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; A'_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A'_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; A'_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; A'_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

Тобто $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

г) Знаходимо обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \dfrac{S}{|A|}$**:**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

д) Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці**:**

$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$ де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — одинична матриця 3-го порядку.

Задача на застосування. Відомо сигнали y_1, y_2, y_3 на виході перетворювача сигналів, що функціонує за правилом:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

де x_1, x_2, x_3 – вхідні сигнали. Знайти вхідні сигнали за умови, що матриця *A* має обернену.

Розв'язування. Слід розв'язати дані рівняння відносно x_1, x_2, x_3 Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити подані визначники: а) за теоремою Лапласа; б) шляхом попереднього зведення до трикутної форми.

1.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ **1.2** $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ **1.4** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **1.6** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **1.8** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

1.9 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ **1.10** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Знайти обернену до матриці A:

2.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, **2.2** $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **2.3** $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, **2.5** $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, **2.6** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

2.7 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, **2.8** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **2.9** $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.10 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$, **11** $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, **2.12** $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ЗАНЯТТЯ 3. РАНГ МАТРИЦІ

Означення 1.3.1. (*мінора матриці*). Мінором порядку r матриці називають визначник, що знаходиться на перетині довільно вибраних r рядків та r стовпців цієї матриці.

Означення 1.3.2. (*рангу матриці*). Число r називають рангом матриці, якщо вона містить ненульовий мінор *r-го* порядку, а усі її мінори вищого порядку рівні нулю або не існують.

Властивості рангу випливають із властивостей визначників.

1. Ранг матриці не змінюється:

   - При транспонуванні матриці;

   - При елементарних перетвореннях матриці.

Приклад 1.3.1. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Оскільки ранг матриці залишається незмінним при її елементарних перетвореннях, то він не зміниться при зведенні матриці до трикутної форми елементарними перетвореннями.

Множимо перший рядок на –4 і додаємо до другого рядка, множимо перший рядок на –4 і додаємо до третього рядка, множимо перший рядок на –3 і додаємо до четвертого рядка. Отримуємо:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Множимо другий рядок на –1 і додаємо до третього рядка, множимо другий рядок на -2 і додаємо до четвертого рядка. Отримуємо:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має ненульовий мінор 2-*го* порядку (наприклад, $.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$, але не має ненульових мінорів вищих порядків, ніж 2. Отже, rang(A)=2.

Означення 1.3.3. (*n*-вимірного вектора). Упорядкований набір *n* чисел називають *n*-вимірним вектором.

Так *n*-вимірним вектором є рядки $k \times n$ матриці та стовпці $n \times k$.

Означення 1.3.4. (*лінійної комбінації*). лінійною комбінацією системи векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ називають вираз $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + ... + \alpha_k \bar{x}_k$, де $\alpha_1 . \alpha_2$, ..., α_k – деякі числа, котрі називають коефіцієнтами цієї лінійної комбінації.

Лінійну комбінацію векторів називають тривіальною, якщо її всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Нульовою називають лінійну комбінацію, якщо вона рівна нульовому вектору.

Означення 1.3.5. (*лінійної незалежності*). Систему елементів простору називають лінійно незалежною, якщо їх нульовою комбінацією є тільки тривіальна комбінація.

Означення 1.3.5. (*лінійної залежності*). Систему векторів називають лінійно залежною, якщо існує її нульова і нетривіальна комбінація.

Тобто система векторів є лінійно залежною, коли знайдеться нульова комбінація, у якій хоча б один коефіцієнт не дорівнює нулю.

Теорема (*критерій лінійної незалежності*). Система n n-вимірних векторів лінійно незалежна тоді і тільки тоді коли визначник n-го порядку, стовпці (рядки) якого утворені цими векторами, не дорівнює нулю**.**

Очевидним результатом цієї теореми є критерій лінійної залежності. Система n n-вимірних векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли визначник n-го порядку, стовпці (рядки) якого утворені цими векторами, рівний нулю.

Теорема (*про базовий мінор*). Усі рядки (стовпці) матриці, що входять у базовий мінор є лінійно незалежними, усі інші її рядки (стовпці) є лінійною комбінацією рядків (стовпців), що входять у базовий мінор.

Наслідок теореми про базовий мінор. Ранг матриці рівний максимальній кількості її лінійно незалежних рядків (стовпців).

Вправа 1.3.1. Нехай $A(n\times m)$ матриця, і $rang(A)=r$ $(r<n, r<m)$. І нехай базовим є мінор, розміщений у перших r рядках та перших r стовпцях. Подати рядки (стовпці) цієї матриці лінійною комбінацією рядків (стовпців), що входять у базовий мінор.

Розв'язування. Для рядків. Доповнимо базовий мінор довільним q-им стовпцем і довільним p-им рядком до визначника порядку $r+1$, який, зрозуміло, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} & a_{rq} \\ a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pr} & a_{pq} \end{vmatrix} = 0 .$$

Розвинемо його за останнім стовпцем і врахуємо, визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$, як базовий мінор. Отримуємо:

$$a_{1q}A_1 + a_{2q}A_2 + \dots + a_{rq}A_r + a_{pq}\Delta = 0,$$

де $A_1, A_2, \dots A_r$ - алгебраїчні доповнення першого, другого, …, r-го елементів $r+1$ стовпця визначника.

Звідки для довільного $1 \le q \le m$ отримуємо

$$a_{pq} = -\frac{A_1}{\Delta}a_{1q} + -\frac{A_2}{\Delta}a_{2q} + \dots + -\frac{A_r}{\Delta}a_{rq}$$

представлення p-го рядка у вигляді лінійної комбінації перших її r рядків.

Представлення q-го стовпця у вигляді лінійної комбінації перших її r стовпців отримаємо, розвинувши визначника $r+1$ порядку за останнім рядком.

Приклад 1.3.2. Представити четвертий стовпець матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ лінійною комбінацією перших двох її стовпців.

Розв'язування. Оскільки rang(A)=2 (див. приклад 1.3.1) і визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, то, за теоремою про базовий мінор, задача має розв'язок.

Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ може слугувати базовим, доповнимо його справа четвертим стовпцем і знизу будь-яким p-им рядком: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p4} \end{vmatrix}$.

Останній визначник, порядок якого перевищує порядок базового, рівний нулю. Розвинемо його за третім рядком:

$$a_{p1} + 3a_{p2} - 5a_{p4} = 0 .$$

Звідки:

$$a_{p4} = \frac{1}{5}a_{p1} + \frac{3}{5}a_{p2} \quad (p = 1,2,3,4)$$

Відповідь: Четвертий стовпець матриці A є результатом додавання першого, помноженого на 1/5 та другого, помноженого на 3/5.

Задача на застосування. Перетворювач сигналів функціонує за правилом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

де x_1, x_2, x_3, x_4 – вхідні сигнали, y_1, y_2, y_3, y_4 – вихідні. Чи є незалежними усі вихідні сигнали, що функціонують за правилом:

Розв'язування. Позначимо матрицю перетворювача $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ранг А рівний 2. Мінор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ базовий у цій матриці. За теоремою про базовий мінор визначаємо, що третій рядок матриці A $a_{3q} = a_{1q} + 2a_{2q} \quad (q = 1,2,3,4)$, і що четвертий $a_{4q} = a_{1q} - 2a_{2q} \quad (q = 1,2,3,4)$. А отже, сигнал y_3 є результатом множення сигнала y_2 на 2 і додавання із сигналом y_1; а сигнал y_4 є результатом множення сигнала y_2 на -2 і додавання із сигналом y_1.

Завдання для самостійної роботи 1. *Знайти ранги матриць*

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійної роботи 1. Знайти ранг заданої матриці, переконатися, що ранг матриці менший від кількості її рядків і кількості її стовпців. Виписати один її базовий мінор. Останній стовпець і рядок матриці відповідно представити лінійною комбінацією рядків і стовпців базового мінора.

3 5 -4 4 10 12 -15 14 1 -3 -3 2 8 18 -9

1. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & -1 \\ -19 & 10 & 15 & -9 \\ 5 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 14 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -13 & 2 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 11 & -4 & -9 & -4 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & -14 & -6 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & -3 \\ -17 & -8 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \\ -13 & 8 & 10 & -15 \end{pmatrix}$, 5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ -9 & 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 5 & -5 \\ -14 & 14 & -8 & 16 \end{pmatrix}$, \

$$7.\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -3 \\ -14 & 14 & 2 & 6 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \\ 16 & -10 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ 8.\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 4 \\ 10 & 12 & -15 & 14 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 8 & 18 & -9 & 10 \end{pmatrix},\ 9.\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -4 \\ -5 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & -16 \end{pmatrix}.$$

ЗАНЯТТЯ 4. СЛАР. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ СЛАР

Означення 1.4.1. (*системи лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР)). Системою n лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими називають

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Тут $a_{ij}\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ – задані числа, котрі називають коефіцієнтами системи, і $b_i\ (i = \overline{1,n})$ – задані числа, котрі називають її вільними членами. Розв’язком системи (3.1) називають набір m чисел x_j, які перетворюють кожне рівняння системи в істинну рівність. СЛАР, яка має хоча б один розв’язок, називають сумісною. Кажуть, що СЛАР є визначеною, якщо вона має тільки один розв’язок і, якщо розв’язків більше, ніж один, – невизначеною. СЛАР називають однорідною, коли всі елементи стовпця вільних членів дорівнюють нулю і неоднорідною – в протилежному випадку.

Цю систему можна представити у так званій матричній формі:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ – матриця коефіцієнтів системи;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець її вільних членів;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець її невідомих.

Означення 1.4.2. *(рівносильних СЛАР).* Дві СЛАР називають рівносильними, якщо кожен розв'язок першої системи задовольняє другій системі і, навпаки, кожен розв'язок другої системи задовольняє першій системі.

Означення 1.4.3. *(розширеної матриці СЛАР).* Матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

називають розширена матриця СЛАР.

Кожній СЛАР відповідає єдина розширена матриця і, навпаки, кожній розширеній матриці відповідає єдина СЛАР.

В результаті елементарних перетворень над рядками розширеної матриці отримуємо розширену матрицю рівносильної СЛАР.

Теорема *(про СЛАР з квадратною невиродженою матрицею коефіцієнтів).* СЛАР з квадратною невиродженою матрицею коефіцієнтів має єдиний розв'язок.

Для розв′язування визначених СЛАР можна скористатися такими методами:

1) Метод оберненої матриці

$$X = A^{-1}B$$

2) Метод Гауса

Шляхом елементарних перетворень над рядками розширеної $n \times n+1$ матриці утворюють розширену матрицю СЛАР, частина якої, котра відповідає коефіцієнтам системи, набуває верхньої трикутної форми:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix},$$

де ~ – значок еквівалентності матриць. Останній матриці відповідає така СЛАР:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Її розв’язок знаходимо так. Із останнього рівняння (3.6) визначаємо невідоме x_n, потім з передостаннього – x_{n-1}, і т.д., нарешті, з першого визначаємо невідоме x_1.

Модифікацією методу Гауса є метод Жордано-Гауса, у якому елементарні перетворення розширеної матриці закінчуються зведенням її не до трикутної, а до діагональної:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & \dots & 0 & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

Останній матриці відповідає СЛАР

$$\begin{cases} \qquad a''_{11}x_1 = b''_1, \\ \qquad\quad a''_{22}x_2 = b''_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases},$$

розв’язок якої очевидний.

3) Метод Крамера

Теорема (*Крамера*). Якщо Δ визначник матриці коефіцієнтів СЛАР відмінний від нуля, система має єдиний розв'язок:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

де Δx_i – допоміжні визначники, утворені з визначника Δ в результаті заміни його i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Приклад 1.4.1. Розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ 2x + y - z = 1, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

матричним методом, методом Гауса, методом Жордано-Гауса і методом Крамера.

1. матричний метод

Матриця коефіцієнтів, матриці-стовпці невідомих і вільних членів є такими:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det A = -4 \neq 0$, матриця коефіцієнтів є невиродженою і має обернену. Випишемо алгебраїчні доповнення її елементів:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Обернена матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

Розв’язок системи $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Метод Гауса

Записуємо розширену матрицю СЛАР:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями третього типу із рядками зводимо матрицю коефіцієнтів до верхньої трикутною. З цією метою спочатку утворюємо нулі у першому стовпці під першим елементом. Для цього перший рядок множимо на –2 і додаємо з другим, від третього рядка віднімаємо перший. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Утворюємо нулі у другому стовпці під другим елементом. Для цього другий рядок перетвореної матриці множимо на додаємо до її третього рядка. Одержуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає така СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ \quad - x_2 + 3x_3 = 7, \\ \quad 4x_3 = 12 \end{cases}$$

Із останнього рівняння цієї системи отримуємо $x_3 = 3$, друге рівняння тепер стає таким $-x_2 + 3 \cdot 3 = 7$. І, отже, $x_2 = 2$. Перше рівняння тепер записуємо так $x_1 + 2 - 2 \cdot 3 = -3$. І, отже, $x_1 = 1$.

Розв’язок системи $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

3. Метод Жордано-Гауса

Продовжуємо виконані у методі Гауса елементарні перетвореннями третього типу із рядками і зводимо матрицю коефіцієнтів до діагональної. З цією метою у вже отриманій розширеній матриці утворюємо нулі у третьому стовпці над третім елементом. Для цього до другого рядка, помноженого на -4, додаємо третій, помножений на 3, третій рядок множимо на ½ і додаємо до першого. Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Утворюємо нулі у другому стовпці над другим елементом. Для цього до першого додаємо другий, помножений на –1/4. Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає така система:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ 4x_2 = 8\ , \\ 4x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв’язок системи $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

4. Метод Крамера

Головний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$

Розв’язок системи існує і є єдиним.

Записуємо і обчислюємо допоміжні визначники $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$, які отримуємо в результаті послідовної заміни у головному визначнику першого, другого і третього стовпців стовпцем вільних членів:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8,\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12\ .$$

За формулами Крамера знаходимо $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Завдання для самостійної роботи 1. *Розв’язати матричним методом і методом Крамера, методом Гауса і Жордано-Гауса.*

1.1. $\begin{cases} x + 3y - z = 1, \\ 2x + 4y - z = 6, \\ 3x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ y - z = 3. \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 21, \\ 7x - y - 3z = 6. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ -x + 2y - z = 2, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + y - 4z = 0. \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 5x + 2y + 13z = 2, \\ 3x - y + 5z = 0. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 2x-3y+5z=6, \\ 3x-y+5z=10, \\ x+2y-4z=-7. \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 2x+3y+5z=12, \\ x-4y+3z=-22, \\ 3x-y-2z=0. \end{cases}$ 1.9 $\begin{cases} 2x+y=3, \\ x+z=1, \\ 3x+y+2z=0. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 3x+y=-6, \\ x-2y-z=5, \\ 3x+4y-2z=13. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 4x+2y-z=12, \\ x+2y+z=7, \\ y-z=-1. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

ЗАНЯТТЯ 5. СЛАР ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ. ДОСЛІДЖЕННЯ І РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Основним у дослідженні СЛАР є існування її розв’язків. Відповідь на питання про сумісність системи n лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

дає

***Теорем**а* (*Кронекера-Капеллі*). Система n лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці рівний рангу матриці коефіцієнтів.

Ця теорема є наслідком теореми про базовий мінор. Для її застосування зручно скористатися рівністю рангу матриці і максимальної кількості її лінійно незалежних рядків (стовпців).

Приклад 1.5.1. Дослідити на сумісність СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$$

Розв'язування. Виписуємо *A* матрицю коефіцієнтів і *B* розширену матрицю СЛАР:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо ранги матриць *A* і *B*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$rang(A)=4.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$rang(B)=4.$$

Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна.

СЛАР може мати більше, ніж один розв'язок. Тому введено поняття часткового і загального розв'язків СЛАР.

Означення 1.5.1. (*часткового розв'язку СЛАР****).*** Кожен один із розв'язків СЛАР називають її частковим розв'язком.

Приклад 1.5.2. Записати частковий розв'язок СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

Легко переконатися, що числа 2, 1, 0 задовольняють рівнянням системи і, отже, складають її частковий розв'язок.

Система може мати більш, ніж один розв'язок. Справді, 1, 0, 1 теж задовольняють рівнянням системи і, отже, теж складають її частковий розв'язок.

Означення 1.5.1. *(загального розв'язку СЛАР)***.** Залежний від параметрів розв'язок СЛАР називають її загальним розв'язком, якщо він містить усі часткові розв'язки системи.

***Теорем*а** *(про структуру розв'язку неоднорідної системи лінійних рівнянь).* Загальний розв'язок сумісної неоднорідної системи лінійних рівнянь є сумою будь-якого її часткового розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи.

Означення 1.5.2. *(фундаментальної системи розв'язків однорідної СЛАР).* Множину часткових розв'язків системи називають її фундаментальною системою розв'язків, коли виконуються дві умови:

1) множина є лінійно незалежною;
2) лінійна комбінація розв'язків множини є загальним розв'язком системи

Для побудови фундаментальної системи розв'язків використовують таку властивість СЛАР: система сумісних n лінійних алгебраїчних рівнянь рівносильна системі її r рівнянь, які входять у базовий мінор системи (r – ранг матриць системи).

Означення 1.5.3. (*основних змінних системи****)***. Основними змінними системи сумісних лінійних алгебраїчних рівнянь називають r її змінних, що увійшли у базовий мінор (r – ранг матриць системи).

Означення 1.5.4. (*вільних змінних системи****)***. Вільними змінними системи сумісних лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими називають m–r її змінних, що не увійшли у базовий мінор (r – ранг матриць системи).

Фундаментальна система розв’язків однорідної СЛАР містить m–r її часткових розв’язків, де m – кількість невідомих системи, а r – ранг матриць системи.

Коли кількість невідомих системи перевищує ранг матриць системи, фундаментальна систему розв’язків не єдина, існує безліч таких систем. Для її побудови зручно знаходити часткові розв’язки, зафіксувавши вільні змінні такими m-r способами: одну з них приймаємо рівною 1, решту – нулями.

Загальний розв’язок однорідної СЛАР є лінійною комбінацією її фундаментальної системи розв’язків, у якій параметрами є коефіцієнти комбінації.

Приклад 1.5.3. Побудувати фундаментальну систему розв’язків і записати загальний розв’язок однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо елементарні перетворення для визначення рангу матриці коефіцієнтів системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Кількість ненульових рядків дорівнює двом, $\operatorname{rang} A = 2, r = 2$; $m = 5$; $m - r = 3$. Задана система рівнянь рівносильна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}.$$

Мінор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ може слугувати базовим. Тоді x_3, x_4, x_5 – вільні змінні. Фундаментальна система розв'язків складається з трьох часткових розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_2 = 5x_3 + 3x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Перший розв'язок. Приймаємо, що $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3, \\ -3x_2 = 5. \end{cases}.$$

Отже, $\overline{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 0, 0 \right)$.

Другий розв'язок. Приймаємо, що $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_2 = 3; \end{cases}$$

$\overline{x}^{(2)} = (1, -1, 0, 1, 0)$.

Третій розв'язок. Приймаємо, що $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$. Тоді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ -3x_2 = -3; \end{cases};$$

$\overline{x}^{(3)} = (-1, 1, 0, 0, 1)$.

Фундаментальну систему розв'язків знайдено: $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \overline{x}^{(3)}$.

Загальний розв'язок системи:

$$\overline{x} = \left(\frac{c_1}{3} + c_2 - c_3, -\frac{5c_1}{3} - c_2 + c_3, c_1, c_2, c_3 \right).$$

Приклад 1.5.4. Дослідити на сумісність і розв'язати систему.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad = 10; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

Виписуємо *A* матрицю коефіцієнтів і *B* розширену матрицю СЛАР:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо систему на сумісність. Визначаємо ранги матриць A і B способом зведення їх східчастої форми за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця містить ненульовий мінор мінор 2-го порядку, усі її мінори порядків вищих за два рівні нулю. Отже, rang(A)=2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 10 \\ 4 & 3 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 15 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, rang(B)=2.

Система сумісна за теоремою Кронекера-Капеллі.

Оскільки змінних у системі 4, а ранг її матриць 2, система матиме дві основні і дві вільні змінні. У перших двох рядках та стовпцях матриця коефіцієнтів містить ненульовий мінор $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, то змінні x_1 і x_2 можна вибрати за основні, змінні x_3, x_4 – за вільні.

Шукаємо частковий розв’язок системи. Для цього довільним способом фіксуємо у заданій системі вільні змінні. Наприклад, $x_3 = x_4 = 0$. Тоді отримуємо

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -5; \\ x_1 + 2x_2 = 5; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, частковим розв’язком системи є $x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Будуємо фундаментальну систему розв’язків (два часткові лінійно незалежні) отримуємо як розв’язки відповідної однорідної СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \end{cases}$$

відкинувши її 3-є і 4-е рівняння і поклавши у ній: 1) $x_3 = 1$ і $x_4 = 0$; 2) $x_3 = 0$ і $x_4 = 1$.

Перший розв’язок фундаментальної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1; \\ x_1 + 2x_2 = 1; \\ x_3 = 1; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Другий розв’язок фундаментальної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2; \\ x_1 + 2x_2 = 2; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Отже, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

За теоремою про структуру розв’язку неоднорідної системи лінійних рівнянь можемо записати загальний розв’язок даної СЛАР так

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, де c_1, c_2 – довільні дійсні числа. Зафіксувавши відповідним чином сталі c_1, c_2, можна із загального розв’язку отримати кожен частковий розв’язок даної СЛАР.

***Завдання для самостійної роботи*.** Дослідити на сумісність, побудувати фундаментальну систему розв’язків, записати загальний розв’язок

2.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_4 = -2. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які перетворення матриці називають елементарними першого типу?
2. Які перетворення матриці називають елементарними другого типу?
3. Які перетворення матриці називають елементарними третього типу?
4. Що таке елементарні перетворення матриці?
5. Яку матрицю називають верхньою трикутною?
6. Яку матрицю називають нижньою трикутною?
7. Яку матрицю називають діагональною?
8. Дайте означення суми матриць.
9. Дайте означення множення двох матриць.
10. Дайте означення множення матриці на число.
11. Дайте означення транспонування матриці.
12. Яку матрицю називають нульовою?
13. Яку матрицю називають одиничною?
14. Чи нерівність нулю визначника матриці необхідна для існування оберненої до неї?
15. Чи нерівність нулю визначника матриці достатня для існування оберненої до неї?
16. Дайте означення оберненої матриці.
17. Запишіть формулу для обчислення визначника другого порядку.
18. Запишіть формулу для обчислення визначника третього порядку.
19. Що називають мінором елемента визначника?
20. Що називають алгебраїчними доповненням елемента визначника?
21. Дайте означення визначника n-го порядку.
22. Сформулюйте теорему Лапласа для обчислення визначника.
23. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування оберненої матриці.
24. Як змінюється визначник матриці при її транспонуванні?
25. Як змінюється визначник матриці при перестановці місцями двох її рядків?
26. Що можна сказати про визначник з однаковими двома рядками? Відповідь обґрунтувати.
27. Як змінюється визначник матриці при елементарних перетвореннях третього типу? Відповідь обґрунтувати.

28. Що можна сказати про визначник один із стовпців якого є сумою деяких двох стовпців. Відповідь обґрунтувати.
29. Опишіть процедуру зведення матриці до трикутної форми елементарними перетвореннями третього типу.
30. Що можна сказати про визначник трикутної матриці? Відповідь обґрунтувати.
31. Чи є єдиною матриця, обернена до невиродженої? Відповідь обґрунтувати.
32. Що називають системою n лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими?
33. Що називають розв'язкам системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
34. Що називають матрицею коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
35. Що називають розширеною матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
36. Що називають вільними членами системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
37. Запишіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі.
38. Запишіть розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі.
39. Чи нерівність нулю визначника матриці коефіцієнтів необхідна для визначеності системи?
40. Чи нерівність нулю визначника матриці коефіцієнтів достатня для визначеності системи?
41. Які дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають рівносильними?
42. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають сумісною?
43. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають несумісною?
44. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають визначеною?
45. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають невизначеною?
46. Чи може система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими бути невизначеною? Наведіть приклад.
47. Чи може система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими бути несумісною? Наведіть приклад.
48. Опишіть процедуру знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса.
49. Опишіть процедуру знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Жордано-Гауса.
50. Запишіть формули Крамера для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
51. Що називають лінійною комбінацією системи n- вимірних векторів?

52. Що називають коефіцієнтами лінійної комбінації системи n- вимірних векторів?
53. Сформулюйте означення лінійної незалежності системи n- вимірних векторів
54. Сформулюйте означення лінійної залежності системи n- вимірних векторів
55. Що можна сказати про систему n- вимірних векторів, у якій один з векторів є лінійної комбінацією інших векторів цієї системи?
56. Що можна сказати про систему незалежних n- вимірних векторів, якщо до одного з векторів додати інший вектор цієї системи, помножений на деяке число?
57. Чи нерівність нулю визначника матриці є необхідною умовою лінійної незалежності її рядків?
58. Чи нерівність нулю визначника матриці є достатньою умовою лінійної незалежності її рядків?
59. Чи рівність нулю визначника матриці є необхідною умовою лінійної залежності її рядків?
60. Чи рівність нулю визначника матриці є достатньою умовою лінійної залежності її рядків?
61. Що можна про максимальну кількість лінійно незалежних рядків матриці, у якій максимальна кількість лінійно незалежних стовпців рівна n?
62. Дайте означення мінора матриці.
63. Дайте означення базового мінора матриці.
64. Яке співвідношення між рангом матриці і максимальною кількістю її лінійно незалежних рядків? Відповідь обґрунтувати.
65. Сформулюйте теорему про базовий мінор.
66. Що можна сказати про сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, ранг матриці коефіцієнтів якої рівний рангу розширеної матриці цієї системи? Відповідь обґрунтувати.
67. Чи може ранг розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь бути більшим (меншим) за ранг матриці коефіцієнтів цієї системи? Відповідь обґрунтувати.
68. Що можна сказати про сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, ранг матриці коефіцієнтів якої нерівний рангу розширеної матриці цієї системи? Відповідь обґрунтувати.
69. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
70. Що називають частковим розв'язкам системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
71. Що називають загальним розв'язкам системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

72. Скільки параметрів містить загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
73. Що можна сказати про сумісність однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
74. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
75. Що називають фундаментальним роз'язком однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
76. Скільки часткових роз'язків включає фундаментальна система роз'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
77. Опишіть процедуру побудови фундаментальна система роз'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

II ОСНОВИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

ЗАНЯТТЯ 6. ВЕКТОРИ. ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

Означення 2.6.1. (*вектора*). Нехай дано дві точки на площині A і B. Вектором називають спрямований відрізок, що йде з точки A в точку B (Рис. 2.6.1). Точка A називають **початком** вектора, точку B – **кінцем**.

Рис. 2.6.1. Спрямований відрізок – вектор

Відстань між початком і кінцем вектора називають його довжиною (модулем) і позначають $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$.

Коли початок і кінець вектора збігаються, то кажуть про нульовий вектор, який позначають як $\vec{0}$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають **одиничним вектором** або **ортом**.

Означення 2.6.2. (*колінеарних векторів*) Два вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих і позначають як $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній (або в паралельних) площинах.

Означення 2.6.3. (*рівних векторів*) Два вектори називають рівними, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і їх довжини збігаються: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Умова співнаправленості в даному визначенні дуже важлива, вектори, що мають однакову довжину, але спрямовані в різні боки, вже не є рівними.

Над векторами можливі такі операції: додавання, віднімання, множення вектора на число.

Означення 2.6.4. (*Суми векторів****).** Суму двох векторів $\vec{a}+\vec{b}$ будують як вектор, що йде від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, якщо вектор $\vec{b}$ прикладений до вектора (Рис. 2.6.2).*

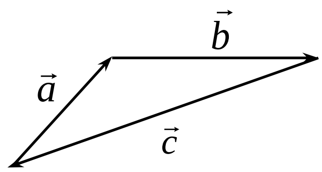


Рис. 2.6.2. Сума двох векторів

Для побудови суми двох векторів потрібно («**правило паралелограма**»): привести обидва вектори до однієї точки і добудувати до паралелограма. Діагональ паралелограма, що йде з точки прикладання векторів і є їх сума.

Віднімання векторів. Вектор, який є результатом віднімання двох векторів будують також за правилом паралелограма, але він є в ньому іншою діагоналлю (Рис.2.6.3):

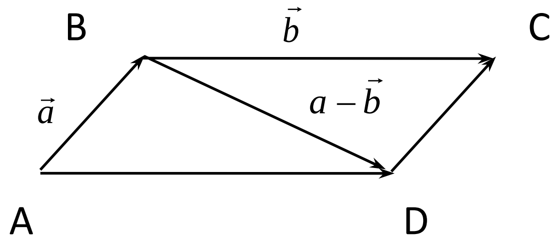


Рис. 2.6.3. Віднімання векторів за правилом паралелограма

Означення 2.6.4. (*Добутку вектора на число*). Добутком вектора на скаляр є вектор, що задовольняє умовам:

1) вектор $\lambda\vec{a}$ колінеарний із вектором $\vec{a}$;

2) має довжину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

3) співнаправлений із $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и антинаправлений при $\lambda<0$.

Властивості операцій над векторами дозволяють поводитися з ними, як зі звичайними числами: переносити їх з однієї частини рівності в іншу з протилежним знаком, ділити обидві частини на ненульове число, приводити подібні члени і т.д.

Приклад 2.6.1: Розв’язати рівняння $2\vec{a}+\vec{b}=6-3\vec{b}$ відносно $\vec{a}$:

Розв’язування. Перенесемо $\vec{b}$ в праву частину рівняння: $2\vec{a}=6-4\vec{b}$; ділимо праву і ліву частини на коефіцієнт при $\vec{a}$, що дорівнює 2. Отримуємо розв'язок у вигляд: $\vec{a}=3-2\vec{b}$.

Відповідь: $\vec{a}=3-2\vec{b}$.

Означення 2.6.5. (*Лінійної комбінації векторів*) Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називають вектор $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n$, а числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – **коефіцієнтами** лінійної комбінації.

Означення 2.6.6. (*Лінійно незалежної системи векторів*). Сукупність векторів називають лінійно незалежною, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$; якщо ж для заданих векторів ця рівність виконується тільки тоді, коли всі $\lambda_i=0$, то вектори називають **лінійно залежними**.

Якщо будь-який вектор $\vec{x}$ можна представити у вигляді: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ і до того ж, єдиним чином, то таке представлення вектора називають **розкладом вектора за базою**, набір $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ – базою, а коефіцієнти при базі: x_1,x_2 – **координатами розкладу**.

Із базою на площині можна зв’язати **систему координат**. Для цього на площині фіксують початок координат (точку *O*) і тоді кожній точці *A* на площині відповідатиме вектор, який називають **радіус-вектором** точки *A*. Координати радіуса-вектора при розкладі за базою $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ називають **координатами точки** в побудованій системі координат.

Найпоширенішу систему координат утворюють два взаємно перпендикулярні вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, довжина яких дорівнює одиниці:

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Таку систему координат називають **декартовою прямокутною системою координат**.

Вектори декартової бази позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координати вектора у цій базі – x, y, z.

У декартовій системі координат довжина вектора $\vec{a} = \{x, y\}$ рівна $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

У загальному випадку, введену в просторі базу називають афінною, а систему координат, що складається з довільної точки і векторів афінної бази простору називають **афінною системою координат** цього простору.

Для будь-якої системи координат (не тільки декартової) справедливі такі властивості:

1) лінійні операції над векторами зводяться до таких же операцій над їх відповідними координатами;
2) координати вектора дорівнюють різницям відповідних координат його початку і кінця;
3) вектори $\vec{a} = \{x_1, x_2\}$ и $\vec{b} = \{y_1, y_2\}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні: $x_1 y_2 = x_2 y_1$

Приклад 2.6.2. Дано два вектори $\vec{i}_1 = \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ и $\vec{j}_2 = \{1, 2\}$. Довести, що вони можуть бути базою.

Розв'язування.

За визначенням вектори можуть бути базою, якщо вони ненульові і неколінеарні, тому для доведення потрібно перевірити виконання 3 властивості – співвідношення координат векторів не повинно бути рівним.

$\frac{1}{4} \cdot 2 = 1 \cdot 1$ рівність не виконується, значить, вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$ неколінеарні.

Відповідь: вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$ є базою.

Приклад 2.6.3. Координати у декартовій системі координат вектора $\vec{a}$=(7;8). Знайти його координати в базі $\vec{p}=(1/4;1)$, $\vec{q}=(1;2)$.

Розв'язування. Позначимо a_1, a_2 координати вектора $\vec{a}$ в базі $\vec{p}$, $\vec{q}$. Тоді розклад вектора $\vec{a}$ за базою $\vec{p}$, $\vec{q}$ можна записати так: $\vec{a}=a_1\vec{p}+a_2\vec{q}$. Операції над векторами замінюємо операціями над їх координатами; підставимо координати в рівняння, отримуємо таку систему: $\begin{cases} 7 = \frac{1}{4}a_1 + 1\cdot a_2 \\ 8 = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 \end{cases}$. Розв'язавши її, отримуємо

Відповідь: $a_1 = 4; a_2 = 6$.

Приклад 2.6.4. Дано два вектори $\vec{a}=\{1,2\}$ і $\vec{b}=\{-1,3\}$. Знайти координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Розв'язування. За властивостями $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+y_1, x_2+y_2\}$, тому: $\vec{a}+\vec{b}=\{1+(-1), 2+3\}=\{0,5\}$.

Відповідь: $\vec{a}+\vec{b}=\{0,5\}$.

Приклад 2.6.5. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, що з'єднує точку A з координатами $\{2,0\}$ і точку B з координатами $\{-1,1\}$.

Розв'язування. Позначимо координати точки A як $\{a_1, a_2\}$, координати точки B як $\{b_1, b_2\}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ матиме координати $\{a_2-a_1, b_2-b_1\}$. Звідки: $\{0-2, 1-(-1)\}=\{-2,2\}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}=\{-2,2\}$.

Приклад 2.6.6. В ролі бази векторів площини вибрано одиничні неколінеарні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, що утворюють кут α. Числа x_1, y_1 – координати деякого вектора $\vec{a}$ у цій базі; числа x^1, y^1 рівні проекціями вектора $\vec{a}$ на вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$. Знайти зв'язок чисел x_1, y_1 та x^1, y^1. У якому випадку числа x_1, y_1 та x^1, y^1 будуть відповідно рівними?

Приклад 2.6.7. Довести, що два вектори $\vec{x} = \{2{,}3\}$ і $\vec{y} = \{4{,}6\}$ колінеарні.

Розв'язування. Для розв'язання необхідно перевірити виконання рівності: $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Оскільки: $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, то вектори $\vec{x} = \{2{,}3\}$ і $\vec{y} = \{4{,}6\}$ колінеарні.

Відповідь: вектори колінеарні.

Приклад 2.6.8. Задано вектор $\overrightarrow{AB} = \{-1{,}4\}$ і відомо, що точка B має координати $(1{,}4)$. Знайти координати точки A – початку вектора.

Розв'язування. Позначимо: $\{x_{ab}, y_{ab}\}$ – координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $\{x_b, y_b\}$ – координати точки B, $\{x_a, y_a\}$ – координати точки A.

Для розв'язання необхідно розв'язати два рівняння: $x_{ab} = x_b - x_a$; $y_{ab} = y_b - y_a$.

Підставимо відомі величини: $-1 = 1 - x_a$; $4 = 4 - y_a$; і знайдемо: $x_a = 2$; $y_a = 0$.

Відповідь: точка A має координати $\{2;0\}$

Задача на застосування 1. Вантаж вагою 980 Н підвішений, як показано на рис. 2.6.4. Визначити натяги у підвісних канатах.

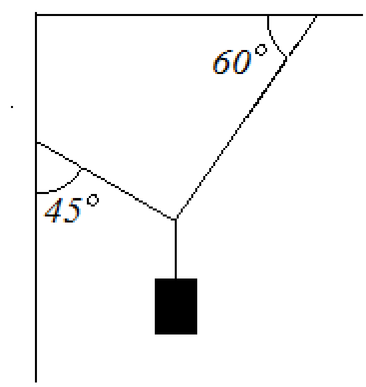


Рис. 2.6.4

Розв'язування. Введемо декартову систему координат з початком O у точці прикладання трьох сил і направимо вісь Oy вертикально вверх, а вісь Ox – вправо (рис. 2.6.5).

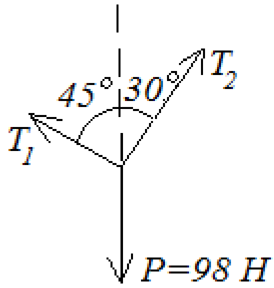


Рис. 2.6.5

З умови рівноваги компоненти

$$\begin{cases} T_2 \sin 30° - T_1 \sin 45° = 0 \\ T_2 \cos 30° + T_1 \cos 45° = 98 \end{cases}.$$

Звідки, беручи значення тригонометричних функцій з точністю до 0,01, отримуємо:

$$\begin{cases} 0{,}5T_2 - 0{,}71T_1 = 0 \\ 0{,}87T_2 + 0{,}71T_1 = 98 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, знаходимо: $T_2 = 71{,}53H;\quad T_1 = 50{,}37H$.

Задача на застосування 1. Два кораблі, що знаходяться в точках A(-2; 4) і B(4;3) одночасно починають рівномірний рух зі швидкостями v_1=(2;3), v_2 = (–1;2). Чи розминуться вони?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 2.6.1. Записати розклад вектора $\vec{x}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1. $\vec{x}$={15; –20; –1}, $\vec{a}$={0; 2; 1}, $\vec{b}$={0; 1; –1}, $\vec{c}$={5; –3; 2}.
2. $\vec{x}$={2; 7; 5}, $\vec{a}$={1; 0; 1}, $\vec{b}$={1; –2; 0}, $\vec{c}$={0; 3; 1}.
3. $\vec{x}$={8; –7; –13}, $\vec{a}$={0; 1; 5}, $\vec{b}$={3; –1; 2}, $\vec{c}$={–1; 0; 1}.
4. $\vec{x}$={0; –8; 9}, $\vec{a}$={0; –2; 1}, $\vec{b}$={3; 1; –1}, $\vec{c}$={4; 0; 1}.
5. $\vec{x}$={ –13; 2; 18}, $\vec{a}$={1; 1; 4}, $\vec{b}$={–3; 0; 2}, $\vec{c}$={1; 2; –1}.
6. $\vec{x}$={11; –1; 4}, $\vec{a}$={1; –1; 2}, $\vec{b}$={3; 2; 0}, $\vec{c}$={–1; 1; 1}.
7. $\vec{x}$={–1; 7; 0}, $\vec{a}$={0; 3; 1}, $\vec{b}$={1; –1; 2}, $\vec{c}$={2; –1; 0}.
8. $\vec{x}$={3; 1; 3}, $\vec{a}$={2; 1; 0}, $\vec{b}$={1; 0; 1}, $\vec{c}$={4; 2; 1}.

9. $\vec{x}$ ={23; –14; –30}, $\vec{a}$ ={2; 1; 0}, $\vec{b}$ ={1; –1; 0}, $\vec{c}$ ={–3; 2; 5}.
10. = {8; 9; 4}, $\vec{a}$ = {1; 0; 1}, $\vec{b}$ ={0; –2; 1}, $\vec{c}$ ={1; 3; 0}.

ЗАНЯТТЯ 7. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Означення 2.7.1. Кутом між двома векторами називається частина площини між їх променями, якщо вектори прикласти до однієї точки (Рис. 2.7.1). Кут між векторами позначають $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ або малими грецькими буквами (наприклад, φ).

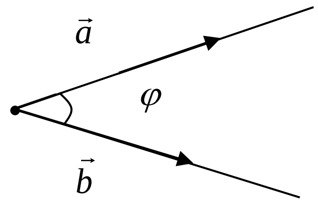


Рис. 2.7.1. Кут між векторами

Означення 2.7.2. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь (або вектор) $\vec{b}$ називають вектор, початком якого служить проекція початку вектора, а кінцем – проекція кінця вектора на вісь (або вектор) (рис. 2.7.2).

Позначають проекцію $pr_{\vec{b}}\vec{a}$, на 7.2: $\overrightarrow{A'B'} = pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

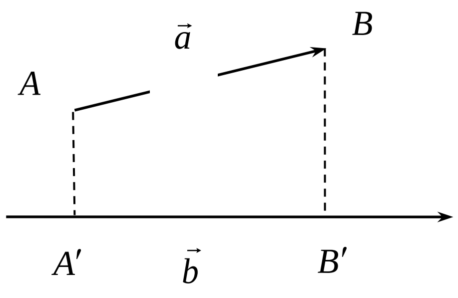


Рис. 2.7.2. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь

Означення 2.7.3. Скалярним добутком векторів називають число (позначають скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$) (скаляр), яке дорівнює добутку їх довжин і косинуса кута між ними $(\vec{a},\vec{b})$, де $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Наступні властивості скалярного добутку векторів випливають прямо з визначення:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$, де λ – довільне число;

3) $(\vec{a},\vec{a}) = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$;

4) якщо $|\vec{e}| = 1$, то $(\lambda\vec{e},\mu\vec{e}) = \lambda\mu$, де λ і μ – довільні числа;

5) $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярні або один з них дорівнює нулю.

6) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$;

7) у декартовій системі координат справедлива рівність: якщо $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Нехай координати векторів $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ і $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. За допомогою скалярного добутку розв'язують наступні задачі:

1. визначення довжини вектора:

а) у декартовій базі: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$;

б) у довільній базі: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

2. визначення відстані між точками A і B: $d = |\overrightarrow{AB}|$.

3. визначення проекції одного вектора на напрямок другого:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$$

4. визначення косинуса кута між векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

5. визначення напрямних косинусів вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \ \cos\beta = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \ \cos\gamma = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

де α – кут вектора з віссю x, β – кут вектора з віссю y, γ – кут вектора з віссю z.

Приклад 27.1. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \pi/4$.

Розв'язування. 1) За визначенням скалярного добутку маємо: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$; звідки:

$$(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot 3\cdot\cos\pi/4 = 6\cdot\sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}.$$

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

Приклад 2.7.2. Знайти $|\vec{a}|$, якщо відомі його координати в декартовій системі координат: $\{2,-1, 1\}$.

Розв'язування. Для знаходження довжини вектора в декартових координатах застосуємо формулу: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$. Звідки:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Відповідь: $\sqrt{6}$.

Приклад 2.7.3. Знайти $(\vec{a},\vec{b})$, якщо $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ і $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, де $|\vec{e}_1| = 4$, $|\vec{e}_2| = 3$, кут $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \pi/3$.

Розв'язування. Для розв'язання необхідно знати довжину векторів, що нам невідомо, але задано дані по базису, тому перейдемо від вихідних векторів до базових, підставимо в формулу $\vec{a}\cdot\vec{b}$ виразу розкладу векторів за базою:

$$(\vec{a},\vec{b}) = ((3\vec{e}_1 + \vec{e}_2),(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2))$$

Звідки:

$$(6\vec{e}_1,\vec{e}_1) + (2\vec{e}_1,\vec{e}_2) + (9\vec{e}_1,\vec{e}_2) + (3\vec{e}_2,\vec{e}_2)$$

Зведемо подібні члени в отриманому виразі:

$6|\vec{e}_1|^2 + 11\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 3|\vec{e}_2|^2$

Звідки:

$$6 \cdot 4 + 11 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \pi/3 + 3 \cdot 3 = 24 + 132 \cdot 1/2 + 9 = 99.$$

Відповідь: 99.

Приклад 2.7.4. Для векторів $\vec{a} = \{1,2,1\}$ і $\vec{b} = \{-2,-1,3\}$ Знайти їх проекції один на другого: $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ и $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ в декартовій системі координат.

Розв'язування. Для знаходження проекції $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$ знайдемо скалярний добуток векторів; для декартової системи координат справедлива формула: $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Звідки: $(\vec{a},\vec{b}) = 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 = -1$. Знайдемо довжину $|\vec{b}|$, з формули для декартових координат маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Звідки: $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}$. Аналогічно знайдемо другу проекцію: $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{-1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$.

Відповідь: $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}$; $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$.

Приклад 2.7.5. Визначити в декартовій системі координат кут між вектором $\vec{a}$ з координатами $\{4, 1, 1\}$ і вектором $\vec{b}$ з координатами $\{2, 2, -1\}$.

Розв'язування. За формулою $\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Знайдемо довжини векторів і їх скалярний добуток.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 9$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Звідки: $\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Розв'язуємо тригонометричне рівняння і отримуємо: $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Завдання* 2.7.1.** Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, якщо:

1. $A(-2; 4; -6)$, $B(0; 2; -4)$, $C(-6;8;-10)$.
2. A(–4; 0; 4), B(–1; 6; 7), C(1; 10; 9).
3. A(0; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 2; 0).
4. A(1; 4; –1), B(–2; 4; –5), C(8; 4; 0).
5. A(–2; 1; 1), B(2; 3; –2), C(0; 0; 3).
6. A(3; 3; –1), B(5; 1; –2), C(4;1;–3).
7. A(0; 3; –6), B(9; 3; 6), C(12; 3 ;3).
8. A(–1;2;–3), B(0;1;–2), C(–3;4;–5).
9. A(2;2;7), B(0;0;6), C(–2;5;7).
10. A(2;3;2), B(–1;–3;–1), C(–3;–7;–3).

Завдання 2.7.2. Знайти кут між векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, якщо:

1. $\vec{a}=\{-1; 2; 8\}$, $\vec{b}=\{3; 7; -1\}$, $\vec{p}=4\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=9\vec{b}-12\vec{a}$.
2. $\vec{a}=\{2; 0; -5\}$, $\vec{b}=\{1; -3; 4\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{q}=5\vec{a}-2\vec{b}$.
3. $\vec{a}=\{4; 2; -7\}$, $\vec{b}=\{5; 0; -3\}$, $\vec{p}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=6\vec{b}-2\vec{a}$.
4. $\vec{a}=\{-1; 3; 4\}$, $\vec{b}=\{2; -1; 0\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-3\vec{a}$.
5. $\vec{a}=\{5; 0; 8\}$, $\vec{b}=\{-3; 1; 7\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=12\vec{b}-9\vec{a}$.
6. $\vec{a}=\{2; -1; 6\}$, $\vec{b}=\{-1; 3; 8\}$, $\vec{p}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-5\vec{b}$.
7. $\vec{a}=\{4; 2; 9\}$, $\vec{b}=\{0; -1; 3\}$, $\vec{p}=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$.
8. $\vec{a}=\{9; 5; 3\}$, $\vec{b}=\{7; 1; -2\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+5\vec{b}$.
9. $\vec{a}=\{5; -1; -2\}$, $\vec{b}=\{6; 0; 7\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{b}-6\vec{a}$.
10. $\vec{a}=\{2; -1; 4\}$, $\vec{b}=\{3; -7; -6\}$, $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

ЗАНЯТТЯ 8. ВЕКТОРНИЙ І ЗМІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Означення 2.8.1. (в*екторного добутку*) Векторним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор, котрий позначають як $[\vec{a},\vec{b}]$ і задовольняє умовам:

- вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

- довжина $[\vec{a},\vec{b}]$ дорівнює $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;

- вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$ утворюють праву трійку, тобто якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$ приведені до спільного початку, то з кінця $[\vec{a},\vec{b}]$ поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ на менший кут відбувається проти годинникової стрілки (Рис. 2.8.1).

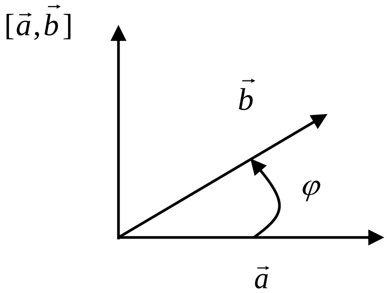


Рис. 2.8.1. Векторний добуток двох ненульових векторів

Векторний добуток має властивості:

1) Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні, зокрема $[\vec{a},\vec{a}] = 0$;

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, де λ – скаляр;

3) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$;

4) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$;

5) довжина$[\vec{a},\vec{b}]$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведених до спільного початку;

6) якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відомі в декартовій базі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, то їх векторний добуток можна представити у вигляді:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Означення 2.8.2. (*змішаного добутку*) Змішаним добутком трьох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, рівне скалярному добутку вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ і $\vec{c}$.

Позначають змішаний добуток $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ або $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Змішаний добуток має такі властивості:

1) геометрично змішаний добуток дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах і взятого зі знаком «+», якщо $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ – права трійка і зі знаком «–», коли $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ – ліва трійка;

2) в змішаному добутку неважливо, в якому порядку брати векторний і скалярний добутки: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$,

але при перестановці двох співмножників змінюється знак: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a},)=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$;

3) три вектори компланарні, тоді і тільки тоді, коли їх змішаний добуток дорівнює нулю;

4) коли координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані в декартовій базі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ і $\vec{c}=(x_c,y_c,z_c)$, то їх векторний добуток можна представити у вигляді:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.8.1. Обчислити координати вектора $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, якщо відомо декартові координати: $\vec{a}=\{2,4,1\}$ і $\vec{b}=\{3,-1,5\}$.

Розв'язування. За формулою, що виражає векторний добуток через декартові координати маємо:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\left(4\cdot5-(-1)\cdot1\right)-$$

$$-\vec{j}\cdot(2\cdot5-3\cdot1)+\vec{k}\cdot(2\cdot(-1)-3\cdot4)=21\vec{i}-7\vec{j}-14\vec{k}\ .$$

Відповідь: $\vec{c} = (21,-7,-14)$.

Приклад 2.8.2. Обчислити $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$, якщо $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

Розв'язування. Оскільки у векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ третю координату не задано, то можна виразити векторний добуток через визначник 3-го порядку, підставивши замість неї нулі:

$$\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 3 = 3\vec{k}.$$

Відповідь: $\vec{c} = 3\vec{k}$.

Приклад 2.8.3. Визначити довжину вектора $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$, якщо координати вектора $\vec{a} = \{1,1,2\}$ і вектора $\vec{b} = \{-1,2,3\}$ задано в декартовій системі координат.

Розв'язування. Спочатку знаходимо координати вектора $\vec{c}$ за формулою:

$$\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - \vec{j} \cdot (1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) + \vec{k} \cdot (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4) =$$

$= 8\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$. Тепер за формулою обчислення довжини вектора через його декартові координати маємо: $|\vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Відповідь: $5\sqrt{5}$.

Приклад 2.8.4. Визначити довжину вектора $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$, якщо координати вектора $\vec{a} = \{1,2\}$ і вектора $\vec{b} = \{-1,3\}$ задано в афінній системі координат з базою: $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 3$, $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}) = \pi/4$.

Розв'язування. Розкладемо задані вектори за базою: $\vec{a} = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2$; $\vec{b} = -1\cdot\vec{e}_1 + 3\cdot\vec{e}_2$. Підставимо в вираз для $\vec{c}$ і використаємо властивості векторного добутку:

$$\vec{c} = [\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2] = -[\vec{e}_1,\vec{e}_1] - 2[\vec{e}_2,\vec{e}_1] + 3[\vec{e}_1,\vec{e}_2] + 6[\vec{e}_2,\vec{e}_2] = 5[\vec{e}_1,\vec{e}_2].$$

Звідки:

$$|\vec{c}| = |5[\vec{e}_1,\vec{e}_2]| = 5\cdot|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cdot\sin(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}) = 5\cdot 1\cdot 3\cdot\sin\pi/4 = 7{,}5\sqrt{2}.$$

Відповідь: $7{,}5\sqrt{2}$.

Приклад 2.8.5. Обчислити площу паралелограма, дві сторони якого утворені векторами $\vec{a} = \{1,1\}$, $\vec{b} = \{4,3\}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$.

Розв'язування. Площа паралелограма дорівнює довжині векторного добутку векторів, відповідних сусіднім сторонам цього паралелограма: $S = |\vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Довжину векторів в декартових координатах обчислюємо за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{16+9} = 5$; Звідки:

$S = \sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3}/2 = 5\sqrt{6}/2 = 2{,}5\sqrt{6}$. *Відповідь:* $S = 2{,}5\sqrt{6}$.

Приклад 2.8.6. Обчислити змішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, якщо $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 5\vec{k}$.

Розв'язування. Так як вектора задані в декартовій системі координат, то можна скористатися формулою для змішаного добутку через визначник 3-го порядку, а відсутні координати в розкладах замінити нулем:

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-15) - 2\cdot 20 + 0\cdot 20 = -25$. *Відповідь:* -25.

Приклад 2.8.7. При яких значеннях параметра α (якщо такі існують) вектори $\vec{a} = \left(4 \cdot \vec{i} + 5\alpha \cdot \vec{j}\right)$ і $\vec{b} = \left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$ будуть колінеарними?

Розв'язування. Два вектора колінеарні, тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює 0; нам відомі координати векторів в декартовій системі координат, тому розпишемо векторний добуток:

$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5a & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (8 - 5\alpha) = \vec{k}(8 - 5\alpha)$, яке має дорівнювати нулю. Тому складаємо наступне рівняння: $\vec{k}(8 - 5\alpha) = 0$. Вектор $\vec{k}$ є базовим, тому він не може бути рівним нулю, звідки: $8 - 5\alpha = 0$. Розв'язавши дане рівняння, маємо: $\alpha = 8/5 = 1{,}6$.

Відповідь: при $\alpha = 1{,}6$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Приклад 2.8.8. При якому α, якщо воно існує, вектори $\vec{a} = \{2\alpha, 3, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$ і $\vec{c} = \{1, 9, -11\}$ компланарні?

Розв'язування. З одного боку, вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх змішаний добуток дорівнює нулю; з іншого боку можна розписати змішаний добуток через визначник 3-го порядку, звідки отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки

$2\alpha \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\alpha \cdot (-16) - 3 \cdot (-14) - 10 = -32\alpha + 32$. Цей вираз має дорівнювати нулю: $-32\alpha + 32 = 0$. Розв'язавши рівняння, отримаємо: $\alpha = 1$.

Відповідь: при $\alpha = 1$ вектори компланарні.

Приклад 2.8.9. Змішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-2$. Знайти змішаний добуток $(\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}+\vec{a})$.

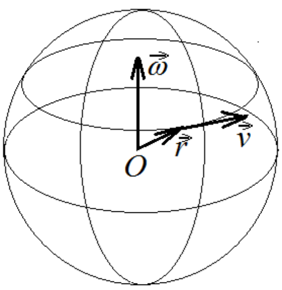
Розв'язування. За означенням змішаного добутку:

$$(\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}+\vec{a})=\left([\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}-\vec{c}],\vec{c}+\vec{a}\right)=\left([\vec{a},\vec{b}]+2[\vec{b},\vec{b}]-[\vec{a},\vec{c}]-2[\vec{b},\vec{c}],\vec{c}+\vec{a}\right)=$$
$$=\left([\vec{a},\vec{b}]-[\vec{a},\vec{c}]-2[\vec{b},\vec{c}],\vec{c}+\vec{a}\right)==\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}+\vec{a}\right)-\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{c}+\vec{a}\right)-2\left([b,c],\vec{c}+\vec{a}\right)=$$
$$=\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)+\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{a}\right)-\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{c}\right)-\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{a}\right)-2\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{c}\right)-2\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{a}\right)=$$
$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{c}\right)-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)-2\left(\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)-2\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)==\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)-$$
$$-\left(\vec{a},[\vec{c},\vec{c}]\right)-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)-2\left(\vec{b},[\vec{c},\vec{c}]\right)-2\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=$$
$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)-2\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=$$
$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)-\left([\vec{a},\vec{a}],\vec{b}\right)+\left([\vec{a},\vec{a}],\vec{c}\right)-2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=$$
$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)-2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-(-2)=2.$$

Відповідь: $(\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}+\vec{a})=2$.

Задача на застосування. Знайти швидкість з якому ми рухаємося, викликану добовим обертанням Землі. Прийняти географічну широту Тернополя рівною $49°$, радіус Землі – 6371км.

Розв'язування.



Кутова швидкість обертання Землі $\omega=\dfrac{2\pi}{24\cdot 3600}\dfrac{рад}{с}=\dfrac{2\cdot 3{,}14}{86400}=7{,}27_{10}-5\,рад/с.$ Вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і радіус вектор нашого положення $\vec{r}$ розміщені як показано на рисунку, кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ рівний $49°$, $\sin 49°=0{,}607$.

За законами обертового руху $\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]$. Звідси отримуємо $v=7{,}27_{10}-5\cdot 6371000\cdot 0{,}607=278\,м/с.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Завдання* 2.8.1.** Паралелограм побудовано на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обчислити довжини діагоналей цього паралелограма; кут між діагоналями і площу паралелограма.

1. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 3$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4$.
2. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2$.
3. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 1$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3$.
4. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}$; $|\vec{p}| = 1/2$; $|\vec{q}| = 4$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 5\pi/6$.
5. $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$; $|\vec{q}| = 3$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4$.
6. $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 5$; $|\vec{q}| = 3$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 5\pi/6$.
7. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 7$; $|\vec{q}| = 2$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4$.
8. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 5$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 2\pi/3$.
9. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$; $|\vec{q}| = 1$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4$.
10. $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 2;5$; $|\vec{q}| = 2$; $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2$.

Завдання 2.8.2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо:

1. A(2; 5; – 3), B(7; 8; –1), C(9; 7; 4).
2. A(–3;6;4), B(8;–3;5), C(10;–3;7).
3. A(7;–5;0), B(8;3;–1), C(8;5;1).
4. A(–1;2;–2), B(13;14;1), C(14;15;2).
5. A(5;3;–1), B(0;0;–3), C(5;–1;0).
6. A(–3;–1;7), B(0;2;–6), C(2;3;–5).
7. A(0;7;–9), B(–1;8;–11), C(–4;3;–12).
8. A(1;–5;–2), B(6;–2;1), C(2;–2;–2).
9. A(0;–8;10), B(–5;5;7), C(–8;0;4).
10. A(–4;–2;5), B(3;–3;–7), C(9;3;–7).

Завдання 2.8.3. Чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

1. $\vec{a} = \{7;4;6\}$, $\vec{b} = \{2;1;1\}$, $\vec{c} = \{19;11;17\}$.
2. $\vec{a} = \{-7;10;-5\}$, $\vec{b} = \{0;-2;-1\}$, $\vec{c} = \{-2;4;-1\}$.
3. $\vec{a} = \{-3;3;3\}$, $\vec{b} = \{-4;7;6\}$, $\vec{c} = \{3;0;-1\}$.
4. $\vec{a} = \{4;1;1\}$, $\vec{b} = \{-9;-4;-9\}$, $\vec{c} = \{6;2;6\}$.
5. $\vec{a} = \{6;3;4\}$, $\vec{b} = \{-1;-2;-1\}$, $\vec{c} = \{2;1;2\}$.

6. $\vec{a}=\{1;-1;4\}$, $\vec{b}=\{1;0;3\}$, $\vec{c}=\{1;-3;8\}$.

7. $\vec{a}=\{3;0;3\}$, $\vec{b}=\{8;1;6\}$, $\vec{c}=\{1;1;-1\}$.

8. $\vec{a}=\{3;1;0\}$, $\vec{b}=\{-5;-4;-5\}$, $\vec{c}=\{4;2;4\}$.

9. $\vec{a}=\{4;-1;-6\}$, $\vec{b}=\{1;-3;-7\}$, $\vec{c}=\{2;-1;-4\}$.

10. $\vec{a}=\{3;4;2\}$, $\vec{b}=\{1;1;0\}$, $\vec{c}=\{8;11;6\}$.

***Завдання 2*.8.4.** Точки A_1, A_2, A_3, A_4 вершини піраміди. Обчислити її об'єм, площа грані $A_1A_2A_3$ і висоту піраміди, опущену на цю грань.

1. A1(1;–1;2), A2(2;1;2), A3(1;1;4), A4(6;–3;8).
2. A1(2;–4;–3), A2(5;–6;0), A3(–1;3;–3), A4(–10;–8;7).
3. A1(–3;–5;6), A2(2;1;–4), A3(0;–3;–1), A4(–5;2;–8).
4. A1(–2;–1;–1), A2(0;3;2), A3(3;1;–4), A4(–4;7;3).
5. A1(1;3;0), A2(4;–1;2), A3(3;0;1), A4(–4;3;5).
6. A1(0;–3;1), A2(–4;1;2), A3(2;–1;5), A4(3;1;–4).
7. A1(–1;2;4), A2(–1;–2;–4), A3(3;0;–1), A4(7;–3;1).
8. A1(3;10;–1), A2(–2;3;–5), A3(–6;0;–3), A4(1;–1;2).
9. A1(1;2;–3), A2(1;0;1), A3(–2;–1;6), A4(0;–5;–4).
10. A1(1;0;2), A2(1;2;–1), A3(2;–2;1), A4(2;1;0).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте означення вектора.
2. Що називають довжиною вектора?
3. Які вектори називають колінеарними?
4. Які вектори називають компланарними.
5. Дайте означення добутку вектора на число.
6. Дайте означення суми векторів.
7. Перечисліть властивості суми векторів.
8. Сформулюйте правило паралелограма для суми векторів.
9. Сформулюйте правило трикутника для суми векторів.
10. Сформулюйте правило для різниці двох векторів.
11. Що називають одиничним вектором?
12. Що називають нульовим вектором?
13. Що називають вектором протилежним до заданого?
14. Дайте означення бази векторів площини.
15. Дайте означення бази векторів простору.
16. Сформулюйте теорему про базу векторів площини.
17. Сформулюйте теорему про базу векторів простору.
18. Яку базу векторів називають ортонормованою?
19. Дайте означення проекції вектора на вектор.
20. Перечисліть властивості проекції вектора на вектор.
21. Що називають розкладом вектора за базою?
22. Дайте означення системи координат площини (простору)
23. Яку систему координат називають афінною?
24. Яку систему координат називають декартовою?
25. Що називають напрямними косинусами вектора?
26. Що називають радіус-вектором точки?
27. Як зв'язані координати вектора із його проекціями на осі декартової системи координат? Відповідь обґрунтуйте.
28. Що називають координатами вектора?
29. Як знаходяться координати суми векторів?
30. Як знаходяться координати добутку вектора на число векторів?
31. Як визначити координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомо координати точок A і B.
32. Дайте інваріантне означення скалярного добутку векторів.
33. Перечисліть властивості скалярного добутку векторів.
34. Запишіть формулу довжини вектора, виражену через скалярний добуток. Відповідь обґрунтуйте.

35. Чи є $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ необхідною умовою ортогональності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
36. Чи є $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ достатньою умовою ортогональності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
37. Сформулюйте необхідну й достатню умову ортогональності векторів.
38. Запишіть формулу для скалярного добутку векторів у ортонормованій базі.
39. Що називають правою (лівою) трійкою векторів?
40. Як змінюється орієнтація трійки векторів при їх круговій перестановці? Відповідь обґрунтуйте.
41. Дайте інваріантне означення векторного добутку векторів.
42. Перечисліть властивості векторного добутку векторів.
43. Запишіть формулу для площі паралелограма побудованого на двох векторах, приведених до спільного початку.
44. Чи є $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ необхідною умовою колінеарності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
45. Чи є $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ достатньою умовою колінеарності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
46. Сформулюйте необхідну й достатню умову колінеарності колінеарності векторів.
47. Запишіть формулу для векторного добутку векторів у ортонормованій базі.
48. Дайте інваріантне означення змішаного добутку векторів.
49. Перечисліть властивості змішаного о добутку векторів.
50. Запишіть формулу для об’єму паралелепіпеда побудованого на трьох векторах, приведених до спільного початку.
51. Чи є $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ необхідною умовою компланарності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
52. Чи є $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ достатньою умовою компланарності векторів? Відповідь обґрунтуйте.
53. Сформулюйте необхідну й достатню умову компланарності векторів.
54. Запишіть формулу для змішаного добутку векторів у ортонормованій базі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кривень В.А. Елементи лінійної алгебри. Навчальний посібник. Лекції для студентів інженерних спеціальностей. Тернопіль: ТНТТУ – 2007 – 86 с.

2. Дубовик В.П. Д79 Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик // Юрик. - 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с.

3. Вища математика: підручник для студ. природничих спец. ун-тів і техн. вузів: Т1. / ред. Г.Л. Кулініч. – К. : Либідь, 1995. – 400 с.

4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / ред. В.В. Булдигін. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методична література

Кривень А.В., Ясній О.П., Бойко А.Р.

Методичні вказівки для практичних занять

та самостійної роботи з дисципліни

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

з розділів

«Лінійна алгебра» та «Основи векторної алгебри»

для студентів денної та заочної форм навчання
галузі знань 12 «Інформаційні технології» та дисципліни «Вища математика»
для студентів денної та заочної форм навчання
галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»

Комп'ютерне макетування та верстка *А.П. Катрич.*

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 1,54. Тираж 10 прим. Зам. № 3056.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.