КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Т.О. Карнаух

Комбінаторика

Навчальний посібник

ЗМІСТ

ВСТУП

Комбінаторика – один із найтрадиційніших розділів дискретної математики, яка є базовою нормативною дисципліною для таких напрямів підготовки фахівців, як прикладна математика, системний аналіз, інформатика тощо. Даний посібник присвячено саме комбінаториці: у ньому розглянуто правила й деякі типові моделі комбінаторних обчислень.

Матеріал посібника побудовано за принципом "від простого до складного". Від елементарних комбінаторних обчислень поступово відбувається перехід до математично складніших понять: використання бінома Ньютона, методу траєкторій, формули включення й виключення, рекурентних співвідношень і методу твірних. Окрім теоретичного матеріалу, посібник містить численні приклади, контрольні запитання й задачі для самостійної роботи, більшість яких супроводжено відповідями, вказівками й розв'язанням.

Терміни, для яких наведено означення, у посібнику виділено ***курсивом***. Початок доведень і прикладів позначено ►, кінець – ◄. Обґрунтування логічних переходів у доведеннях інколи подано верхнім індексом (напр., с. 11). Символ $\Leftrightarrow$ є еквівалентом для "тоді й тільки тоді, коли", а запис $A \Rightarrow B$ — скороченням для "з A випливає B". Зазначимо, що у відповідях до комбінаторних задач переважно наведено не остаточно зведений результат, а формула, що випливає зі способу підрахунку, за якою його одержано. При розв'язанні задач треба пам'ятати, що відповідь на задачі типу "знайти кількість елементів множини" має бути цілим невід'ємним числом. Тому при отриманні від'ємної або дробової відповіді слід шукати помилку в міркуваннях.

Предмет комбінаторики. ***Комбінаторика*** (counting) вивчає способи підрахунку кількості елементів у різних множинах (звичайно, **скінченних**, якщо йдеться про кількість). До таких підрахунків зводиться багато практичних і теоретичних задач. Комбінаторика формулює правила підрахунку для простих випадків, а вдале використання цих правил дозволяє знаходити кількість елементів у складніших за структурою множинах.

Крім безпосереднього використання в різних галузях дискретної математики, зокрема в оцінці складності алгоритмів, комбінаторні методи застосовні в теорії ймовірностей, статистиці, фізиці, біології та інших науках.

"Скільки елементів у множині?" – це головне питання, що ставиться при розв’язанні комбінаторної задачі. Таку задачу називають ***задачею підрахунку***. Наведемо деякі приклади подібних задач:

– Скількома способами можна вибрати певну кількість із наявних предметів?

– Скількома способами частки можуть розподілитися у просторі?

– Скільки різних ДНК може утворитися з певного набору хромосом?

У ширшому розумінні крім ***задачі підрахунку*** кількості елементів до комбінаторних належать ще такі:

- ***задача переліку***: перерахувати всі елементи даної множини;
- ***задача класифікації***: класифікувати елементи даної множини; ця задача найчастіше виникає у випадках, коли підрахунок приводить до дуже великих чисел і перелік стає неможливим;
- ***задача оптимізації***: на множині елементів вводять функцію величини і ставлять задачу знайти підмножину, для якої функція величини набуває максимального або мінімального значення.

Розглянемо задачу підрахунку. Домовимось вважати n, k, m, i, j (можливо, з індексами) цілими невід’ємними числами, якщо не вказано інше.

Коли ми ставимо питання "Скільки елементів містить множина?", відразу виникають два природних запитання:

– що таке скінченна множина;

– що таке кількість елементів?

Інтуїтивно тут усе зрозуміло. Скінченними вважатимемо ті множини, що містять скінченну кількість елементів, включаючи порожню множину, а решту множин – нескінченними. При цьому кількість елементів скінченної множини визначається приблизно так: перебираємо по черзі всі її елементи (кожен елемент рівно один раз) і перераховуємо їх, наприклад, виписавши в рядок. Наведений розподіл множин на скінченні й нескінченні, а також означення кількості досить неформальні.

Спробуємо дещо формалізувати поняття скінченної множини та кількості її елементів. Для цього покладемо: нехай запис $A \sim B$ позначає той факт, що між множинами A та B існує бієкція[1],[2].

Для довільної множини A має місце $A \sim A$, оскільки відображення f, задане як $f(a) = a$ для всіх $a \in A$, є бієкцією між A та A. Для довільних множин A та B з $A \sim B$ випливає $B \sim A$: якщо φ є бієкцією між A та B, то φ^{-1} – обернена до φ відповідність – є бієкцією між B та A. І, насамкінець, для довільних множин A, B, C із $A \sim B$ та $B \sim C$ випливає $A \sim C$: якщо φ_1 та φ_2 є бієкціями між A та B і B та C, відповідно, то відображення φ_3, визначене за правилом $\varphi_3(a) = \varphi_2(\varphi_1(a))$ для всіх $a \in A$, є бієкцією між A та C.

Множина A є ***скінченною***, якщо існує невід’ємне ціле число n, для якого $A \sim \overline{1,n}$ [3], при цьому це число n називають ***кількістю елементів*** множини A, а про множину A кажуть, що вона ***n-елементна***. Кількість елементів скінченної множини A позначають $|A|$ (інколи для кількості елементів множини використовують позначення $N(A)$). З означення випливає, що $|\{a, b, c\}| = 3$, $|\overline{1,n}| = n$, а $|\varnothing| = 0$, де $\varnothing$ – порожня множина.

---

[1] Бієкцією називають взаємно однозначну відповідність.

[2] Точніше, запис $A \sim B$ позначає той факт, що множини A та B рівнопотужні, але розгляд цього поняття виходить за межі даного посібника. Зазначимо лише, що множини називаються рівнопотужними, якщо між ними можна встановити бієкцію. Саме це тут позначено знаком $\sim$.

[3] Під записом $\overline{m,n}$, де m, n – цілі невід’ємні числа, будемо розуміти відрізок цілих чисел від m до n включно, тобто множину $\{x \mid x \in Z \text{ та } m \le x \le n\}$.

Зауважимо, що наведений підхід до визначення кількості елементів повністю узгоджується з неформальним: процедура переліку з підрахунком елементів скінченної множини фактично встановлює бієкцію. Зазначимо, що для скінченної множини кількість її елементів визначається однозначно, оскільки $\overline{1,n} \sim \overline{1,m}$ тоді й тільки тоді, коли $n = m$.

Для зручності викладення для скінченної множини A під записом "нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$" будемо розуміти, що $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – повний перелік елементів множини A, і всі елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно різні, тобто $|A| = n$. Дійсно, кожну n-елементну множину A можна подати у вигляді переліку її елементів, оскільки за означенням n-елементної множини існує взаємно однозначна відповідність φ між A та . Для множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можна розглядати бієкцію φ: $\varphi(a_i) = i$ для всіх $i \in \overline{1,n}$. Тоді для $i \in \overline{1,n}$ виконано $\varphi^{-1}(i) = a_i$. Отже, $A = \{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(n)\}$.

Бієкції становлять основу багатьох комбінаторних обчислень. Саме це й ілюструє основний принцип комбінаторики.

Основний принцип комбінаторики. Між скінченними множинами A та B можна встановити бієкцію тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів.

► Нехай $|A| = n$, $|B| = m$; за означенням $A \sim \overline{1,n}$ та $B \sim \overline{1,m}$. З урахуванням раніше зазначених властивостей ~: $A \sim B$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{1,n} \sim \overline{1,m}$. Однак $\overline{1,n} \sim \overline{1,m}$ тоді й тільки тоді, коли $n = m$. Звідси між скінченними множинами A та B можна встановити бієкцію тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. ◄

Основний принцип комбінаторики дозволяє виконувати обчислення кількості елементів множини фактично методом зведення до множини з відомою кількістю елементів або до множини, для якої кількість елементів можна підрахувати дещо простіше. На жаль, у більшості випадків його використання не акцентується, а приймається як дещо зрозуміле. Далі застосування цього принципу буде продемонстроване детальніше.

ГЛАВА 1. Комбінаторні обчислення для основних операцій

У цій главі розглянемо найпростіші властивості скінченних множин і комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Нас цікавитимуть два питання: чи виводить операція із класу скінченних множин і, якщо не виводить, то як можна виразити кількість елементів результату через кількість елементів її аргументів.

1.1. Об'єднання, перетин і різниця скінченних множин

Довільна підмножина скінченної множини також є скінченною. Тому результатом операцій, що зменшують або не змінюють скінченну множину, є скінченні множини. Отже, перетин і різниця скінченних множин – скінченні множини, оскільки $A \cap B \subseteq A$ та $A \setminus B \subseteq A$. На відміну від них об'єднання може збільшувати множину, тому цей випадок потребує окремого аналізу.

Теорема 1.1. Правило суми. Об'єднання двох скінченних множин A та B, **що не перетинаються**, є скінченною множиною, причому

$$|A \cup B| = |A| + |B| \text{ (тут } A \cap B = \varnothing).$$

► Нехай $|A| = n$, $|B| = m$ та f, g є бієкціями між множинами A та $\overline{1,n}$ і B та $\overline{1,m}$, відповідно. Покладемо

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in A, \\ g(x) + n, \text{ якщо } x \in B. \end{cases}$$

h за побудовою є бієкцією між множинами $A \cup B$ та $\overline{1, n+m}$. Отже, множина $A \cup B$ скінченна і $|A \cup B| = |A| + |B|$. ◄

Увага! Перед застосуванням правила суми до підрахунку кількості елементів об'єднання двох множин необхідно впевнитись, що множини **не перетинаються**.

Доведена теорема має низку важливих наслідків, що надають можливість проводити комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій.

Наслідок 1.1. Для скінченної множини A

$$|A\backslash B| = |A| - |A\cap B|,$$
$$|A\cap B| = |A| - |A\backslash B|.$$

► Множини $A\cap B$ та $A\backslash B$ скінченні й не перетинаються, тому за правилом суми $|A| = |(A\cap B)\cup(A\backslash B)| = |A\cap B|+|A\backslash B|$, звідки маємо шукані рівності. ◄

Наслідок 1.2. Для скінченних множин A та B множина $A\cup B$ скінченна і

$$|A\cup B| = |A|+|B\backslash A| = |A|+|B| - |A\cap B|.$$

► $|A\cup B| = |A\cup(B\backslash A)| = |A|+|B\backslash A| = |A|+(|B| - |A\cap B|)$. ◄

Наслідок 1.3. Для скінченних множин A та B множина $A\cap B$ скінченна і

$$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B|.$$

Наслідок 1.4. Для скінченних множин A, B, C множина $A\cup B\cup C$ скінченна і

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B| - |A\cap C)-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

► $|A\cup B\cup C|= |(A\cup B)\cup C)|= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| =$
$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$
$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|) =$
$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$. ◄

Наслідок 1.5. Для скінченних множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ множина $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ скінченна і

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| \le |A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|.$$

► Доведемо твердження індукцією за кількістю множин. Для $n = 1$ твердження очевидне. Нехай твердження доведене для $n = t$. Доведемо його для $n = t+1$. За припущенням індукції множина $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t$ скінченна і $|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t| \le |A_1|+|A_2|+\dots+|A_t|$. Тоді множина $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t\cup A_{t+1}$ скінченна як об'єднання скінченних множин $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t$ та A_{t+1}, і

$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t\cup A_{t+1}| = |A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t|+|A_{t+1}|-$
$-|(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_t)\cap A_{t+1}| \le |A_1|+|A_2|+\dots+|A_t|+|A_{t+1}|$. ◄

Наслідок 1.6. Для скінченних множин $A_1, A_2, \dots, A_n$, **що попарно не перетинаються**,

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| = |A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|.$$

► З використанням правила суми це твердження неважко довести індукцією за кількістю множин. ◄

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1.1. З пункту A до пункту B ведуть три асфальтовані й чотири ґрунтові дороги. Скількома способами можна доїхати з пункту A до пункту B?

► Ця задача нескладна, але вона демонструє особливості, що створюють труднощі при розв'язанні. Головна з цих особливостей полягає в тому, що задача формулюється не як математична, а як задача з реального життя, що **потребує побудови її математичної моделі**. При цьому **необхідно відділити суттєві фактори від несуттєвих**. Найчастіше **необхідно чітко зрозуміти, що мається на увазі під способом**. Дійсно, якщо при підрахунку варіантів ми будемо враховувати час доби, то отримаємо нескінченну множину варіантів. Якщо почнемо міркувати, чи по кожній ґрунтовій дорозі можна проїхати та чи перетинаються дороги (тобто чи можна почати рух по одній, а завершити по іншій), то взагалі не зможемо визначити нічого конкретного. Якщо абстрагуватись від перерахованих вище факторів і під способом доїхати з пункту A до пункту B розуміти дорогу, по якій слід їхати, то наша задача набуде такої формалізації.

Нехай A_1 – множина асфальтованих доріг з A у B, A_2 – множина ґрунтових доріг з A у B. Відомо, що $A_1\cap A_2 = \varnothing$, $|A_1| = 3$, $|A_2| = 4$. Скільки елементів має множина $A_1\cup A_2$?

З використанням правила суми відповідь очевидна: $|A_1\cup A_2| = |A_1| +|A_2| = 3+4 = 7$. Отже, з пункту A до пункту B можна доїхати сімома способами. ◄

Висновок. Розв'язання комбінаторної задачі про кількість способів виконання тих чи інших дій завжди необхідно починати з побудови математичної моделі ситуації та чіткого формулювання питання для побудованої моделі.

Приклад 1.2. При обстеженні читацьких смаків 100 студентів виявилось, що 60 студентів читають журнал A, 50 – журнал B, 50 – журнал C, 30 – журнали A та B, 20 – журнали B та C, 40 – журнали A та C, 10 – журнали A, B та C. Скільки студентів:

– читають принаймні один журнал;
– не читають жодного з журналів;
– читають не менше двох журналів;
– читають точно два журнали?

► Спочатку побудуємо математичну модель задачі. Нехай U – множина опитаних студентів, а A, B, C – множини студентів, що читають журнали A, B, C, відповідно. Тоді:

$A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$ – множини тих студентів, що читають журнали A та B, B та C, A та C, відповідно;

$A\cap B\cap C$ – множина студентів, що одночасно читають усі три журнали;

$X_1 = A\cup B\cup C$ – множина студентів, що читають принаймні один журнал;

$X_2 = U\backslash X_1$ – множина студентів, що не читають жодного журналу;

$X_3 = (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$ – множина студентів, що читають принаймні два журнали;

$X_4 = X_3\backslash(A\cap B\cap C)$ – множина студентів, що читають точно два журнали (принаймні два, але не три).

Задача набуде вигляду:

Дано: $|U| = 100$, $A, B, C \subseteq U$, $|A| = 60$, $|B| = 50$, $|C| = 50$, $|A\cap B| = 30$, $|B\cap C| = 20$, $|A\cap C| = 40$, $|A\cap B\cap C| = 10$.

Знайти: $|X_1|$, $|X_2|$, $|X_3|$, $|X_4|$.

Тепер можна перейти до безпосереднього розв'язання, використовуючи розроблений математичний апарат.

$|X_1| = |A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| =$
$=60+50+50-30-20-40+10 = 80$,

$|X_2| = |U\backslash X_1| = |U|-|U\cap X_1| \overset{(U\cap X_1=X_1)}{=} |U|-|X_1| = 100-80 = 20$,

$|X_3| = |(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)| = |A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-$
$-|(A\cap B)\cap(B\cap C)|-|(B\cap C)\cap(A\cap C)|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|+$
$+|(A\cap B)\cap(B\cap C)\cap(A\cap C)| = |A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|-$
$-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap C| = 30+20+40-2\cdot 10 = 70$,

$|X_4| = |X_3\backslash(A\cap B\cap C)| = |X_3| - |X_3\cap(A\cap B\cap C)| \overset{(X_3\cap(A\cap B\cap C)=A\cap B\cap C)}{=}$
$=|X_3|-|A\cap B\cap C| = 70-10 = 60$. ◄

1.2. Правило добутку й декартів добуток скінченних множин

Теорема 1.2. Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати n способами й після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати m способами, то вибір упорядкованої пари (A, B) можна здійснити $n\cdot m$ способами.

► Нехай $M_A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – n-елементна множина, з якої вибирається об'єкт A; $M_{B,a}$ – множина, з якої вибирається об'єкт B після вибору a як об'єкта A. Тоді $|M_{B,a}| = m$ для всіх $a\in M_A$. Множина впорядкованих пар (A, B) – це множина $\bigcup_{i=1}^{n}(\{a_i\}\times M_{B,a_i})$, тому вибір упорядкованої пари (A, B) можна здійснити

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}(\{a_i\}\times M_{B,a_i})\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\{a_i\}\times M_{B,a_i}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|M_{B,a_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} m = nm$$

способами, оскільки за основним принципом комбінаторики $\left|\{a_i\}\times M_{B,a_i}\right| = \left|M_{B,a_i}\right|$. ◄

Наслідок 1.7. Якщо об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, і після кожного такого вибору об'єкт A_2 – вибрати n_2 способами, …, і після кожного вибору об'єктів $A_1, A_2,\ldots, A_{k-1}$ об'єкт A_k – вибрати n_k способами, то вибір послідовності об'єктів $(A_1, A_2,\ldots, A_k)$ можна здійснити $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

Теорема 1.3 про декартів добуток скінченних множин. Декартів добуток двох скінченних множин A та B є скінченною множиною, причому

$$|A\times B| = |A|\cdot|B|.$$

► Елементами декартового добутку $A\times B$ є впорядковані пари (a, b), де $a\in A$ та $b\in B$. Тоді a – перший елемент пари – можна вибрати $|A|$ способами, і після кожного такого вибору другий елемент – b – вибрати $|B|$ способами. За правилом добутку впорядковану пару $(a, b)\in A\times B$ можна вибрати $|A|\cdot|B|$ способами. Отже, множина $A\times B$ складається з $|A|\cdot|B|$ елементів. ◄

Наслідок 1.8. Для скінченних множин $A_1, A_2, \ldots, A_k$ множина $A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$ скінченна та

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_k| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|.$$

► Доведення наслідку випливає з наслідку 1.7 та доведення теореми 1.3. ◄

Наслідок 1.9. Для скінченної множини A й числа $n\in N$ множина A^n скінченна та

$$|A^n| = |A|^n.$$

Приклад 1.3. З пункту A до пункту B ведуть сім доріг, а з пункту B до пункту C – чотири, причому жодні дві дороги не перетинаються. Скількома способами можна доїхати з пункту A до пункту C, відвідавши пункт B?

► Під способом доїхати з пункту A до пункту C будемо розуміти впорядковану пару (дорога з A до B, дорога з B до C). Наша задача набуде такої формалізації.

Нехай AB – множина доріг з A до B, BC – множина доріг із B до C. Відомо, що $|AB| = 7$, $|BC| = 4$. Скільки елементів має множина $AB\times BC$?

Відповідь очевидна: $|AB\times BC| = |AB|\cdot|BC| = 7\cdot 4 = 28$. Отже, з пункту A до пункту C через пункт B можна доїхати 28 способами. ◄

Приклад 1.4. Кількість натуральних дільників числа n. Нехай $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ – канонічний розклад натурального числа n ($n \ge 2$) на прості множники (це означає, що $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – попарно різні прості дільники числа n). Довести, що кількість усіх натуральних дільників числа n дорівнює $\prod_{i=1}^{r}(a_i+1)$, а сума всього натуральних дільників становить $\prod_{i=1}^{r}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$.

► Спочатку проведемо невелике дослідження. Кожен натуральний дільник числа n обов'язково має вигляд $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_r^{i_r}$, де $i_j\in \overline{0,a_j}$ для $j\in \overline{1,r}$. Отже, між множиною всіх натуральних дільників числа n і множиною $M = \overline{0,a_1}\times\overline{0,a_2}\times\ldots\times\overline{0,a_r}$ можна встановити бієкцію, оскільки остання є множиною векторів $(i_1, i_2,\ldots, i_r)$, де $i_j\in \overline{0,a_j}$ для $j\in \overline{1,r}$. **З а о с н о в н и м п р и н ц и п о м к о м б і н а т о р и к и** шукана кількість дорівнює кількості елементів множини M, а саме

$$|M| = |\overline{0,a_1}\times\overline{0,a_2}\times\ldots\times\overline{0,a_r}| = |\overline{0,a_1}|\cdot|\overline{0,a_2}|\cdot\ldots\cdot|\overline{0,a_r}| =$$

$$= (a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_r+1) = \prod_{i=1}^{r}(a_i+1),$$

оскільки $|\overline{0,a_i}| = a_i+1$, $i\in \overline{1,r}$.

Тепер знайдемо суму всіх натуральних дільників числа n:

$$\sum_{\substack{i_j\in\overline{0,a_i},\\ j\in\overline{1,r}}} p_1^{i_1} p_2^{i_2}\ldots p_r^{i_r} = \Big(\sum_{\substack{i_j\in\overline{0,a_i},\\ j\in\overline{1,r-1}}} p_1^{i_1} p_2^{i_2}\ldots p_{r-1}^{i_{r-1}}\Big)(1+p_r+p_r^2+\ldots p_r^{a_r}) =$$

$$= \Big(\sum_{\substack{i_j\in\overline{0,a_i},\\ j\in\overline{1,r-1}}} p_1^{i_1} p_2^{i_2}\ldots p_{r-1}^{i_{r-1}}\Big)\cdot\frac{p_r^{a_r+1}-1}{p_r-1} = \ldots =$$

$$= \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_r^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_r^{a_r+1}-1}{p_r-1} = \prod_{i=1}^{r}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}. ◄$$

Теорема 1.4 про булеан скінченної множини. Булеан[4] $P(A)$ скінченної множини A є скінченною множиною, причому

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

► Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $|A| = n$. Довільній множині B, де $B\subseteq A$, поставимо у відповідність двійковий вектор[5] $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ для якого $b_i \in \{0, 1\}$ та $b_i = 1$ тоді й тільки тоді, коли $a_i\in B$, $i\in \overline{1,n}$. Таким чином ми побудуємо взаємно однозначну відпові-

[4] Булеаном множини називають множину всіх її підмножин.

[5] Двійковим називають вектор, що складається з нулів та одиниць.

дність між булеаном $P(A)$ і множиною $\{0, 1\}^n$. Отже, **за основним принципом комбінаторики**

$|P(A)| = |\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n = 2^{|A|}$. ◄

Теорема про декартів добуток і правило добутку мають багато спільного. Зокрема, теорема про декартів добуток є частковим випадком правила добутку. Розглянемо, у чому полягає різниця. У випадку декартового добутку вибір компонент пари відбувається **незалежно**, а за правилом добутку вибір другої компоненти пари **може залежати** від вибору першої, але **при цьому гарантується певна кількість способів** такого залежного вибору.

З перевіркою незалежності пов'язана певна кількість помилок при розв'язанні комбінаторних задач. Різниця між залежним і незалежним вибором компонент спричиняє виникнення різних комбінаторних об'єктів, як це можна побачити в наступній главі.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте правило суми.
2. Чи застосовне правило суми до обчислення кількості елементів в об'єднанні множин $\{1, 2, 3\}$ та $\{5, 3\}$?
3. За якою формулою можна обчислити кількість елементів в об'єднанні двох скінченних множин?
4. За якою формулою можна обчислити кількість елементів у перетині двох скінченних множин?
5. За якою формулою можна обчислити кількість елементів у різниці двох скінченних множин?
6. Чи правда, що кількість елементів в об'єданні скінченних множин не перевищує суму кількостей елементів цих множин?
7. Сформулюйте правило добутку.
8. За якою формулою можна обчислити кількість елементів у декартовому добутку двох скінченних множин?
9. У чому полягає різниця між правилом добутку й теоремою про декартів добуток?
10. Зі скількох елементів складається булеан n-елементної множини?

Задачі

1.1. На одній з кафедр університету працюють 13 осіб, причому кожен із них знає принаймні одну іноземну мову. 10 осіб знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку. 5 знають англійську й німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку.

а) Скільки осіб знають усі три мови?

б) Скільки осіб знають рівно дві мови?

в) Скільки осіб знають тільки англійську?

1.2. Протягом тижня відбувався колоквіум із математичного аналізу, і деканат здійснював перевірку відвідування студентами групи К-1Х занять із математичного аналізу, алгебри, програмування й дискретної математики. Виявилось, що 3 студенти пропускали математичний аналіз, 10 – алгебру, 11 – програмування та 15 – дискретну математику. Також виявилось, що 2 студенти пропускали заняття з усіх чотирьох дисциплін, 13 – принаймні з двох і жоден студент не пропускав заняття рівно із трьох дисциплін. Скільки студентів не пропустили жодного заняття, якщо група складається із 25 студентів?

1.3. Скільки існує натуральних чисел, що є квадратом, кубом або п'ятим степенем деякого натурального числа і менші 10000?

1.4. Довести, що кількість натуральних чисел, які діляться на n і не перевищують x, дорівнює $[x/n]$.[6]

1.5. Довести, що натуральне число ділиться на кожне з чисел $n_1, n_2, \dots , n_k$ тоді й тільки тоді, коли воно ділиться на НСК$(n_1, n_2, \dots , n_k)$.[7]

1.6. Знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 10000 і:

а) не діляться на жодне з чисел 3, 5, 7;

б) не діляться на жодне з чисел 6, 10, 15;

---

[6] $[x]$ – ціла частина числа x.

[7] НСК(n, m) – найменше спільне кратне чисел n та m.

в) не діляться на жодне з чисел 3, 7, але діляться на 10 і 25;
г) не діляться на жодне з чисел 2, 5, 7, але діляться на 11;
д) не діляться на жодне з чисел 10, 14, але діляться на 6;
е) не діляться на 9, але діляться на 6 або 13.

1.7. Під час сесії з чотирьох іспитів не менше 70 студентів успішно склали дискретну математику, не менше 75 – математичний аналіз, не менше 80 – алгебру й не менше 85 – програмування. Яка мінімальна кількість студентів, що успішно склали одночасно всі чотири іспити, якщо всього було 100 студентів?

1.8. Нехай $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ – канонічний розклад натурального числа n ($n \geq 2$) на прості множники. Знайти кількість усіх дільників числа n, що не діляться на квадрат жодного натурального числа, відмінного від 1.

1.9. Скільки натуральних дільників має число:

а) $2^7 \cdot 3^9 \cdot 7^3$;	в) 2005^{2006};	д) $4^n \cdot 18^m$;
б) $6^{21} \cdot 21^6$;	г) $15^n \cdot 40^m$;	е) $21^n \cdot 42^m$?

1.10. Скільки існує n-значних натуральних чисел[8]?

1.11. Скільки існує n-значних натуральних чисел ($n \geq 3$):
а) що закінчуються на дві сімки;
б) що починаються із двох однакових цифр;
в) в яких сусідні цифри різні;
г) що складаються лише з парних цифр;
д) що діляться на 5 і в запису яких немає цифр 2, 4, 6 та 8?

1.12. Скільки існує n-значних натуральних чисел ($n \geq 3$), у запису яких:
а) відсутня цифра 9;
б) є принаймні одна цифра 9;
в) є рівно одна цифра 9;
г) немає жодної парної цифри;
д) є принаймні одна парна цифра;
е) є рівно одна парна цифра?

1.13. Скільки існує n-значних натуральних чисел ($n \geq 3$), у запису яких:
а) є хоча б одна з цифр 7 і 8;
б) є цифри 7 і 8 одночасно;
в) є хоча б одна цифра 7 і відсутня цифра 8;
г) є рівно одна цифра 7 і відсутня цифра 8;
д) є рівно одна цифра 7 і хоча б одна цифра 8;
е) є рівно одна цифра 7 і рівно одна цифра 8?

1.14. Скільки існує n-значних натуральних чисел ($n \geq 2$), у запису яких є принаймні дві однакові цифри?

1.15. При повертанні на 180° запису десяткових чисел цифри 0, 1 та 8 не змінюються, цифри 6 та 9 перетворюються одна на одну, а всі інші – втрачають значення. Скільки існує n-значних натуральних чисел ($n \geq 2$), що при повертанні на 180°:
а) не втрачають значення;
б) не змінюються;
в) не втрачають значення й залишаються n-значними;
г) не втрачають значення та збільшуються;
д) не втрачають значення та зменшуються?

---

[8] Під n-значним натуральним числом будемо розуміти натуральне число, десятковий запис якого складається рівно із n десяткових розрядів, причому старший розряд ненульовий. Нагадаємо, що кожен десятковий розряд може набувати значення 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ГЛАВА 2. Комбінаторні об’єкти

Існує багато способів побудови складніших за структурою множин із простіших. Тут можна розглядати декартів добуток і булеан, результатами яких є послідовності загального вигляду та множини, що складаються із множин. Однак у комбінаториці крім зазначених загальних конструкцій розглядають ще й додаткові. Їх результатами є такі комбінаторні об’єкти, як розміщення, перестановки та сполуки, можливо, з повтореннями. Розглянемо їх детальніше.

2.1. Розміщення з повтореннями, розміщення, перестановки

Нехай задано n-елементну множину A. Послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, що має довжину k та складається з елементів множини A, утворює ***розміщення з повтореннями*** з n по k[9]. Послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, що має довжину k та складається з попарно різних елементів множини A, утворює ***розміщення*** з n по k. Розміщення з n по n у комбінаториці називають ***перестановкою***[10] n-елементної множини. Кількість розміщень із n по k позначають A_n^k, також можна зустріти позначення $(n)_k$.

---

[9] Якщо необхідно підкреслити з елементів якої множини складено розміщення, то можна сказати "розміщення з повтореннями по k елементам елементів n-елементної множини A". Аналогічні уточнення можна запровадити й для інших комбінаторних об’єктів.

[10] У загальному випадку перестановкою множини A називається цілком упорядкована множина $(A, \le)$. У випадку n-елементної множини A для того, щоб задати на ній повний порядок, достатньо просто пронумерувати її елементи натуральними числами від 1 до n, але якщо розташувати елементи в по-

Теорема 2.1 про кількість розміщень із повтореннями. Для фіксованої n-елементної множини кількість розміщень із повтореннями з n по k дорівнює n^k.

► Нехай $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – розміщення з повтореннями з n по k. Підрахуємо, скількома способами можна здійснити його вибір. Усі елементи розміщення вибираються з n-елементної множини незалежно один від одного. Усього в розміщенні k елементів. Отже, за правилом добутку існує n^k способів здійснити вибір розміщення з n по k.

Наприкінці доведення зауважимо, що множина всіх розміщень із повтореннями n-елементної множини A по k елементам – це множина послідовностей $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де $a_i \in A$, $i \in \overline{1,k}$, тобто k-й декартів степінь множини A. Звідси кількість розміщень із повтореннями з n по k теж дорівнює n^k. ◄

Теорема 2.2 про кількість розміщень. Для фіксованої n-елементної множини кількість розміщень із n по k дорівнює

$A_n^k = n!/(n\text{-}k)!$, якщо $0 \le k \le n$,

$A_n^k = 0$, якщо $k > n$.

► Для $k > n$ твердження теореми очевидне. Для $k = 0$ $A_n^k = 1 = n!/n! = n!/(n\text{-}k)!$. Доведемо твердження для $1 \le k \le n$.

Нехай $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – розміщення з n по k. Це означає, що всі його елементи попарно різні. Підрахуємо, скількома способами можна здійснити його вибір. Елемент a_1 розміщення вибираємо з n-елементної множини. Після цього вибір елемента a_2 здійснюємо серед елементів множини, що не були вибрані в розміщення раніше; отже, є $n-1$ спосіб вибору елемента a_2. Продовжуючи процес далі, вибір елемента a_i знов здійснюватимемо серед елементів множини, що не були вибрані в розміщення раніше, а таких елементів $n\text{-}(i\text{-}1)$. І, наприкінці, з аналогічних міркувань, для елемента a_k залишиться $n\text{-}(k\text{-}1)$ способів вибору. Отже, за

слідовність у порядку номерів, то отримаємо перестановку множини A.

правилом добутку вибір розміщення $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можна здійснити $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = n!/(n-k)!$ способами. ◄

Якщо повернутись до питання вибору елементів послідовності, то для розміщень із повтореннями він незалежний, а у випадку розміщень вибір кожного наступного елемента послідовності здійснюється серед тих елементів, які ще не вибиралися. Як результат отримуємо різні комбінаторні об'єкти: розміщення з повтореннями й розміщення (без повторень).

Теорема 2.3 про кількість перестановок. Кількість перестановок n елементів дорівнює $n!$.

► Перестановка n елементів – це розміщення з n по n. Тому за теоремою 2.2 кількість розміщень дорівнює $n!/(n-n)! = n!/0! = n!$. ◄

З доведених теорем випливає, що кількості розміщень із повтореннями з n по k, розміщень із n по k і перестановок, утворених з елементів фіксованої n-елементної множини A, не залежать від множини A, головне, щоб вона була n-елементною, а тому дуже часто використовують скорочені терміни типу "кількість розміщень із n по k", а те, що вони складаються з елементів **фіксованої** n-елементної множини, мають на увазі.

Приклад 2.1. На сейф установили 10-цифровий кодовий замок із чотиризначним кодом. Скільки існує різних способів установити код замка?

► Кожен код є розміщенням із повтореннями з десяти цифр по чотирьох позиціях. Відповідь: 10^4. ◄

Приклад 2.2. Скількома способами 12 різних куль можна розкласти по п'ятьох різних пакетах?

► Нехай a_i – номер пакета, в який покладено i-ту кулю, $i\in\overline{1,12}$, $a_i\in\overline{1,5}$. Тоді розподіл куль по пакетах – послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ – є розміщенням із 5 по 12. Відповідь: 5^{12}. ◄

Приклад 2.3. Скільки слів можна скласти, використавши три літери зі слова *camel*?

► Кожне трилітерне слово, що можна скласти з літер слова *camel*, є розміщенням п'яти літер по трьох позиціях. Відповідь: $5!/2! = 60$. ◄

Приклад 2.4. Скількома способами групу із 25 студентів можна розсадити в аудиторії на 35 місць?

► Уточнимо задачу: нас цікавить не кількість вільних або зайнятих місць, а те, який студент займає яке місце. Мовою комбінаторики питання ставимо так: "Скільки існує розміщень із 35 по 25?". Відповідь: $35!/10!$. ◄

Приклад 2.5. Скільки слів можна скласти, використавши всі літери слова *camel*?

► Кожне слово, що можна скласти, використавши всі літери слова *camel*, є перестановкою п'яти літер. Відповідь: $5! = 120$. ◄

Приклад 2.6. Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

► Зрозуміло, що на кожній вертикалі й кожній горизонталі має стояти рівно одна тура. Нехай a_i – позиція по вертикалі тури, що займає i-ту горизонталь, $a_i\in\overline{1,8}$. Тоді розстановка тур однозначно задаватиметься послідовністю $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ з попарно різними елементами, тобто перестановкою чисел 1, 2, …, 8. Отже, між шуканими розстановками тур і перестановками чисел 1, 2, …, 8 існує бієкція. Тому тур можна розставити 8! способами. Відповідь: 8!. ◄

Приклад 2.7. Знайти кількість бієкцій між n-елементними множинами A та B.

► Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Між множиною всіх перестановок множини $\overline{1,n}$ і множиною бієкцій з A в B можна встановити бієкцію:

перестановці $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ставимо у відповідність бієкцію $\varphi(k) = \{(a_i, b_{k_i}) \mid i \in \overline{1,n}\}$.

Отже, кількість бієкцій з A в B дорівнює кількості перестановок n-елементної множини, тобто $n!$. Відповідь: $n!$. ◄

Приклад 2.8. Знайти кількість підстановок[11] множини $\overline{1,n}$, в яких елемент 1 відповідає сам собі.

► Нехай φ – підстановка множини $\overline{1,n}$, в якій елемент 1 відповідає сам собі, тобто $\varphi(1) = 1$. Тоді ψ – звуження підстановки φ на множину $\overline{2,n}$, тобто $\psi = \varphi\backslash\{(1, 1)\}$, – є підстановкою мно-

[11] Підстановкою множини A називають бієкцію між A і A.

жини $\overline{2,n}$ і взаємно однозначно задає підстановку φ. Отже, за основним принципом комбінаторики кількість шуканих підстановок дорівнює кількості підстановок множини $\overline{2,n}$, тобто кількості бієкцій між двома (n-1)-елементними множинами. За прикладом 2.7 отримуємо відповідь. Відповідь: (n-1)!. ◄

2.2. Сполуки

Нехай задано n-елементну множину A. Довільна k-елементна ($0 \le k \le n$) підмножина $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ множини A називається ***сполукою*** з n по k. Інколи замість терміна "сполука" використовують термін ***комбінація***. Кількість сполук із n по k позначають C_n^k, також можна зустріти позначення $\binom{n}{k}$, (n, k).

Принципова відмінність сполук із n по k і розміщень із n по k полягає в тому, що **для сполуки порядок елементів несуттєвий, а для розміщення – суттєвий**.

Теорема 2.4 про кількість сполук. Для фіксованої n-елементної множини кількість сполук із n по k становить

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ якщо } 0 \le k \le n,$$

$$C_n^k = 0, \text{ якщо } k > n.$$

► Якщо $k > n$, то $C_n^k = 0$, оскільки для скінченних множин із $M_1 \subset M_2$ випливає $|M_1| < |M_2|$. Якщо $k = 0$, то для довільної множини існує єдина порожня підмножина. Отже, $C_n^0 = 1 = n!/(0!(n-0)!)$.

У випадку $1 \le k \le n$ розглянемо довільну сполуку з n по k. Це k-елементна множина. Упорядкуємо її, тобто розташуємо у вигляді послідовності. У результаті отримаємо розміщення з n по k. Кожне впорядкування k-елементної сполуки є перестановкою k елементів. Звідси існує k! різних упорядкувань кожної такої сполуки. Тоді з однієї сполуки з n по k можна утворити k! різних розміщень із n по k, крім того, кожне розміщення з n по k можна утворити рівно з однієї сполуки з n по k. Отже, кількість розміщень із n по k у k! разів більша за кількість сполук із n по k. Маємо $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ та $C_n^k = A_n^k / k! = n!/((n-k)!\,k!)$. ◄

Приклад 2.9. Скількома способами можна вибрати три літери з літер слова *camel*?

► Мовою комбінаторики питання ставимо так: "Скільки існує сполук із 5 літер по 3?". Відповідь: $5!/(3!\cdot(5-3)!) = 10$. ◄

2.3. Перестановки з повтореннями

Нехай задано перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ елементів m-елементної множини A та числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$, причому $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$. Розміщення з повтореннями елементів множини A з m по n, в якому елемент a_i зустрічається рівно k_i разів, $i \in \overline{1,m}$, називається ***перестановкою з повтореннями*** по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Кількість перестановок із повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ позначають $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, також можна зустріти позначення $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$.

Теорема 2.5 про кількість перестановок із повтореннями. Для фіксованої перестановки m-елементної множини кількість ***перестановок із повтореннями*** по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, де $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$, становить $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$.

► *Перший спосіб*. Нехай задано перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ елементів m-елементної множини A та числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$, причому $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$. Розглянемо довільну перестановку з повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ – $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Замінимо в ній усі однакові елементи різними: замість k_i входжень елемента a_i в перестановку з повтореннями підставимо k_i різних елементів, наприклад із множини $\{a_i\}\times\overline{1,k_i}$. Отримаємо перестановку n-елементної множини $B = \bigcup_{i=1}^{m} (\{a_i\}\times\overline{1,k_i})$.

Тепер перейдемо до підрахунків. Входження елементів a_i на попарно різні елементи множини $\{a_i\}\times\overline{1,k_i}$ можна замінити $k_i!$ способами, оскільки кожна така заміна є біекцією між множиною номерів координат елементів a_i в перестановці з повтореннями та множиною $\{a_i\}\times\overline{1,k_i}$. У результаті заміни всіх таких елементів з однієї перестановки з повторенням складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ отримаємо $k_1!\cdot k_2!\cdot \dots\cdot k_m!$ різних перестановок множини B. Крім того, з довільної перестановки множини B можна одержати рівно одну перестановку з повтореннями складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Звідси кількість перестановок множини B у $k_1!\cdot k_2!\cdot \dots\cdot k_m!$ разів більша за кількість перестановок із повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Множина B складається з n елементів, тоді

$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)\cdot k_1!\cdot k_2!\cdot \dots\cdot k_m! = n!$,

звідки

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

Другий спосіб. Нехай задано перестановку $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ елементів m-елементної множини A та числа $k_1, k_2, \dots, k_m$, причому $k_1+k_2+\dots+k_m = n$. Знайдемо кількість перестановок із повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ безпосередньо за правилом добутку. Спочатку виберемо k_1 місць, на яких у перестановці перебуває елемент a_1. Це можна зробити $C_n^{k_1}$ способами. Далі, із залишку місць (тобто із n-k_1) виберемо k_2 місць, на яких у перестановці перебуває елемент a_2. Це можна зробити $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами … і т. д., k_i місць для елемента a_i вибираються із n-k_1-k_2-…-k_{i-1} вільних місць. Тому їх можна вибрати $C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{i-1}}^{k_i}$ способами. Нарешті, місця для елемента a_m можна вибрати $C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. За правилом добутку вибір усієї перестановки з повтореннями, тобто розстановку символів $a_1, a_2, \dots, a_m$, можна здійснити

$$C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\times$$

$$\times\ldots\cdot\frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_2!(n-k_1-k_2-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$$

способами, оскільки n-k_1-k_2-…-$k_m = 0$, $0! = 1$. ◄

Зауваження. Виходячи з формули (або комбінаторних міркувань) кількість $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ перестановок із повтореннями складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ симетрична відносно коефіцієнтів $k_1, k_2, \dots, k_m$, інакше кажучи, вона не залежить від перестановок свого складу. Наприклад, $C_9(1, 3, 5) = C_9(5, 3, 1) = C_9(3, 1, 5)$.

Приклад 2.10. Є k_1 літер a_1, k_2 літер a_2, …, k_m літер a_m. Скільки різних слів можна скласти, використавши всі ці літери?

► Позначимо $n = k_1+k_2+\dots+k_m$. Неважко бачити, що кожне слово, складене з усіх цих літер, є перестановкою з повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Відповідь:

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$ ◄

Приклад 2.11. Скільки різних слів можна отримати перестановками літер слова *мама*?

► Відповідь: $C_4(2, 2) = 4!/(2!\cdot 2!) = 6$. ◄

До перестановок із повтореннями можна звести й задачу про впорядковані розбиття з фіксованою кількістю елементів у підмножинах. Уточнимо, що саме мається на увазі, розглянувши приклад.

Приклад 2.12. Нехай задано n-елементну множину A та послідовність чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$, де $k_1+k_2+\dots+k_m = n$. Скількома способами множину A можна подати у вигляді об'єднання m підмножин $B_1, B_2, \dots, B_m$ $(A = B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_m)$ так, щоб $|B_i| = k_i$, $i \in \overline{1,m}$ (способи, що відрізняються порядком множин в об'єднанні, вважаються різними)?

► Зрозуміло, що за виконання умови $k_1+k_2+\dots+k_m = n$ множини B_i попарно не перетинаються, тобто утворюють розбиття множини A. Ця задача припускає таку інтерпретацію. Нехай

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – перестановка елементів множини A. Кожній послідовності множин $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$, про яку йдеться в умові, поставимо у відповідність розміщення з повтореннями $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, де c_i дорівнює номеру тієї множини послідовності, до якої належить елемент a_i, тобто $(c_i = j \Leftrightarrow a_i \in B_j)$, $i \in \overline{1,n}$. Побудоване розміщення буде мати склад $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Отже, установлено бієкцію між шуканими послідовностями й розміщеннями з повтореннями елементів множини A по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Звідси існує $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ шуканих послідовностей.

Формула для $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ була отримана раніше, але покажемо інший спосіб її виведення. Знайдемо кількість шуканих послідовностей множин безпосередньо за правилом добутку. Першу множину послідовності можна вибрати $C_n^{k_1}$ способами, другу вибираємо з залишку елементів, тоді її можна вибрати $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами, …, i-та множина послідовності вибирається з залишку елементів, тоді її можна вибрати $C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}}^{k_i}$ способами і, нарешті, останню множину послідовності можна вибрати $C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. За правилом добутку вибір послідовності множин можна здійснити

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \times$$

$$\times \ldots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_2!(n-k_1-k_2-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} \text{ способами.}$$

Відповідь: $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$. ◄

Приклад 2.13. Скількома способами 8 студентів можна розселити в кімнатах: одномісній, тримісній і чотиримісній?

► У цій задачі необхідно розбити 8-елементну множину на послідовність множин, перша з яких 1-елементна, друга – 3-елементна і третя – 4-елементна. За попереднім прикладом отримуємо відповідь.

Відповідь: $C_8(1, 3, 4) = 8!/(1!\cdot 3!\cdot 4!) = 280$. ◄

2.4. Сполуки з повтореннями

Існує кілька способів[12] формалізації поняття "сполука з повтореннями". Тут буде розглянуто такий.

Нехай задано m-елементну множину A, елементи якої називатимемо типами, і деяку множину B, елементам якої приписано типи з множини A (кожному елементу приписано рівно один тип). При цьому вважатимемо, що множина B містить нескінченно багато елементів кожного з m типів. Нехай також зафіксовано перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ множини A та послідовність чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$, де $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$. N-елементна сполука з елементів множини B, що складається з k_i елементів типу a_i, $i \in \overline{1,m}$, називається ***сполукою з повтореннями*** з m по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Сполуки з повтореннями, що мають однаковий склад, вважаються ***рівними***. Кількість різних сполук із повтореннями з m по n позначимо f_m^n.

З означення випливає, що кожна сполука з повтореннями з m по n однозначно задається своїм складом $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Тому її можна зображувати як перестановку з повтореннями складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, що має вигляд $(a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_m)$.

Якщо множину A задано перестановкою (a, b), то у прийнятих домовленостях сполуки з повтореннями по 3 мають вигляд (a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), (b, b, b). Звідси безпосередньою перевіркою отримуємо $f_2^3 = 4$.

Теорема 2.6 про кількість сполук із повтореннями. Кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ у цілих невід'ємних числах дорівнює f_m^n та $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}$, $m \geq 1$.

► Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ у цілих невід'ємних числах поставимо у відповідність

---

[12] Сполуку з повтореннями можна також розглядати як множину з повтореннями (майже це тут і робимо) або клас еквівалентності на множині перестановок із повтореннями, де перестановки одного складу вважаються еквівалентними.

n-елементну сполуку з повтореннями складу $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Указана відповідність є взаємно однозначною, отже, кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ у цілих невід'ємних числах дорівнює f_m^n.

З іншого боку, кожному такому розв'язку у взаємно однозначну відповідність можна поставити вектор a, що має довжину $n+m-1$, складається з n нулів і $m-1$ одиниці та має структуру

$$a = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{x_1 \text{ нулів}},1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{x_2 \text{ нулів}},1,\ldots,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{x_{m-1} \text{ нулів}},1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{x_m \text{ нулів}}).$$

У свою чергу, кожен такий однозначно визначається $(m-1)$-елементною множиною координат, що дорівнюють 1. Отже, кількість розв'язків рівняння в цілих невід'ємних числах дорівнює кількості сполук із $n+m-1$ по $m-1$, тобто C_{n+m-1}^{m-1}. ◄

Приклад 2.14. Скільки розв'язків у цілих невід'ємних числах має рівняння $x_1+x_2+x_3 = 10$?

► Відповідь: C_{12}^2. ◄

Приклад 2.15. Скількома способами 12 однакових куль можна розкласти по п'ятьох різних пакетах?

► Нехай різні пакети задають типи куль. Тоді кожен розподіл куль по пакетах взаємно однозначно задає сполуку з повтореннями з 5 по 12, або, інакше, кожен розподіл куль по пакетах є розв'язком рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 12$ у цілих невід'ємних числах, де x_i – кількість куль у i-му пакеті, $i \in \overline{1,5}$. В обох випадках відповідь однакова.

Відповідь: C_{16}^4. ◄

Зверніть увагу, що в попередньому прикладі кулі були однакові. Якщо кулі різні (пронумеровані), то задача має зовсім іншу семантику й відповідь (див. прикл. 2.2).

2.5. Застосування комбінаторних об'єктів до розв'язання задач

У більшості випадків у комбінаториці найскладнішим етапом розв'язання задачі є побудова точного математичного еквівалента розв'язуваної задачі. Тому комбінаторні задачі стосовно математичних об'єктів інколи набагато простіші за такі, що виникають в інших галузях.

2.5.1. Комбінаторика двійкових векторів

Уведемо поняття двійкового вектора й розглянемо деякі його характеристики, щоб використати розглянуті раніше комбінаторні об'єкти. До того ж ця інформація буде корисною при вивченні булівських функцій.

Розглянемо множину $B = \{0, 1\}$. Елементи множини B^n – n-го декартового степеня множини B – називають ***двійковими векторами***, а саму множину B^n – ***одиничним n-вимірним кубом***. Самі елементи множини B^n інколи називають ***вершинами*** куба B^n.

Для двійкового вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можна розглядати такі характеристики:

- довжина – кількість його координат;
- $\nu(a)$ – номер вектора, тобто число $(a_1a_2\ldots a_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$, із двійковим записом якого збігається вектор;
- $\|a\|$ – вага, або норма, вектора, тобто кількість його ненульових координат.

Також для двійкових векторів a та b однакової довжини можна визначити $\rho(a, b)$ – ***відстань*** (***Хеммінга***) між ними, тобто кількість координат, в яких розрізняються вектори. Вектори, відстань між якими дорівнює одиниці, називають ***сусідніми***. Вектори, відстань між якими дорівнює їх довжині, називають ***протилежними***. Відстань між двійковими векторами $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ та $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ можна подати формулою $\rho(a, b) = \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |$.

Нехай дано два двійкові вектори: $a = (0, 0, 1, 0)$, $b = (0, 1, 0, 1)$. Тоді $\nu(a) = 2$, $\nu(b) = 5$, $\|a\| = 1$, $\|b\| = 2$, $\rho(a, b) = 3$. Вектори $(0, 0, 1, 0)$ і $(0, 1, 1, 0)$ сусідні, а вектори $(0, 0, 1, 0)$ і $(1, 1, 0, 1)$ – протилежні.

Упорядкуємо множину B: нехай $0 < 1$, і введемо на множині B^n частковий порядок як прямий добуток порядку на B, а саме: для двійкових векторів $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$a \le b \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1,n}\ (a_i \le b_i).$$

На множині B можна визначити такі операції:

$\neg$: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$ (інколи замість $\neg a$ пишуть $\bar{a}$)

$\cap$: $0\cap 0 = 0$, $0\cap 1 = 0$, $1\cap 0 = 0$, $1\cap 1 = 0$;

$\cup$: $0\cup 0 = 0$, $0\cup 1 = 1$, $1\cup 0 = 1$, $1\cup 1 = 1$;

$\oplus$: $0\oplus 0 = 0$, $0\oplus 1 = 1$, $1\oplus 0 = 1$, $1\oplus 1 = 0$.

Ці операції можна побітово продовжити на множину B^n:

$\neg(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\neg a_1, \neg a_2, \ldots, \neg a_n)$,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cap(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1\cap b_1, a_2\cap b_2, \ldots, a_n\cap b_n)$,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cup(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1\cup b_1, a_2\cup b_2, \ldots, a_n\cup b_n)$,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\oplus(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1\oplus b_1, a_2\oplus b_2, \ldots, a_n\oplus b_n)$.

Приклад 2.16. Знайти кількість двійкових векторів, що мають довжину n.

► Кожен двійковий вектор, що має довжину n, є елементом множини B^n, або, за іншими міркуваннями, кожен такий двійковий вектор є розміщенням із повтореннями з 2 по n. В обох випадках відповідь однакова. Відповідь: 2^n. ◄

Приклад 2.17. Знайти кількість двійкових векторів, що мають довжину n і вагу k.

► Якщо вага двійкового вектора з довжиною n дорівнює k, то серед n його координат рівно k ненульових. Отже, кожен такий вектор взаємно однозначно визначається множиною k ненульових координат. Звідси кількість таких векторів дорівнює кількості сполук із n по k. Відповідь: C_n^k. ◄

Приклад 2.18. У множині B^n визначити кількість упорядкованих пар (a, b) векторів, для яких $\rho(a, b) = k$, де k – фіксоване натуральне число, $k \le n$.

► Нехай $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ та $\rho(a, b) = k$. Зауважимо, що кожній парі векторів (a, b) у взаємно однозначну відповідність можна поставити n-ку пар $((a_1, b_1),(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n))$, де для рівно k значень індексу i виконано $a_i \ne b_i$. Для пар із різними елементами можливі значення $(0, 1)$ або $(1, 0)$, а для інших – $(0, 0)$ або $(1, 1)$. Отже, кожна шукана пара векторів однозначно визначається k-елементною множиною індексів, для яких має місце нерівність, розміщеннями з повтореннями елементів множини $\{(0, 1), (1, 0)\}$ за індексами з k-елементної множини та елементів множини $\{(0, 0), (1, 1)\}$ за рештою (тобто n-k) індексів. Згідно з правилом добутку шукана кількість дорівнює $C_n^k \cdot 2^k \cdot 2^{n-k}$. Відповідь: $C_n^k \cdot 2^n$. ◄

2.5.2. Комбінаторика бінарних відношень

Нагадаємо, що бінарним відношенням на множині A називається довільна підмножина декартового добутку $A\times A$. Далі йтиметься саме про такі відношення, тому для зручності під терміном "відношення" будемо розуміти саме бінарне відношення на деякій множині.

У цьому підрозділі розглянемо комбінаторику рефлексивних, антирефлексивних, симетричних і антисиметричних відношень. Нагадаємо відповідні означення. Відношення R на множині A називається:

1) ***рефлексивним***, якщо для всіх $a\in A$ виконано $(a, a)\in R$;

2) ***антирефлексивним***, якщо для всіх $a\in A$ виконано $(a, a)\notin R$;

3) ***симетричним***, якщо для всіх a, $b\in R$ із $(a, b)\in R$ випливає $(b, a)\in R$;

4) ***антисиметричним***, якщо для всіх a, $b\in R$ із одночасної істинності умов $(a, b)\in R$ та $(b, a)\in R$ випливає, що $a = b$.

Наприклад, серед відношень $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1), (1, 3), (4, 4)\}$, $R_3 = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$, $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ відношення R_1 є рефлексивним, R_3 – антирефлексивним, R_4 – симетричним, R_1, R_2, R_3 – антисиметричними; відношення R_5 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, ні симетричним, ні антисиметричним.

Зауваження. Якщо немає **р і з н и х** елементів a, b множини A, за яких $(a, b)\in R$, то відношення R за означенням є симетричним. Якщо немає **р і з н и х** елементів a, b множини A, за яких одночасно $(a, b)\in R$ та $(b, a)\in R$, то відношення R за означенням є антисиметричним.

Відношення на **с к і н ч е н н і й** множині можна задати двійковою матрицею (матрицею з нулів та одиниць). Пронумеруємо елементи множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ числами від 1 до n. Матриця A_R відношення R – це квадратна матриця розміром $n\times n$, $A_R = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$; якщо $a_i\,R\,a_j$, то $a_{i,j} = 1$, інакше $a_{i,j} = 0$. Наприклад, відношенню $R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ відповідає матриця

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За фіксованої взаємно однозначної нумерації елементів n-елементної множини A натуральними числами від 1 до n відповідність між відношеннями на A та двійковими матрицями розміром $n\times n$ взаємно однозначна. Тому в наступних задачах згідно з основним принципом комбінаторики достатньо знайти відповідну кількість двійкових матриць розміром $n\times n$, що й будемо робити.

Перед розв'язанням задач зазначимо, що матриця рефлексивного відношення має на головній діагоналі тільки одиниці, антирефлексивного – тільки нулі. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі.

Приклад 2.19. Знайти кількість відношень на n-елементній множині, $n \ge 1$.

► У цьому випадку жодних обмежень на двійкову матрицю розміром $n\times n$ не накладається, вона складається з n^2 двійкових елементів (що набувають одного з двох можливих значень), тому за правилом добутку існує 2^{n^2} таких матриць. Відповідь: 2^{n^2}. ◄

Приклад 2.20. Знайти кількість рефлексивних відношень на n-елементній множині, $n \ge 1$.

► Оскільки кожне рефлексивне відношення містить усі пари вигляду (a, a), де $a\in A$, то на головній діагоналі матриці (це n її елементів) рефлексивного відношення розташовані лише одиниці, і залишається вибрати решту $(n^2\text{-}n)$ її двійкових елементів. Відповідь: 2^{n^2-n}. ◄

Приклад 2.21. Знайти кількість симетричних відношень на n-елементній множині, $n \ge 1$.

► Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Тому вона однозначно визначається n двійковими елементами на головній діагоналі та C_n^2 двійковими елементами над головною діагоналлю. Відповідь: $2^{n+C_n^2}$. ◄

Приклад 2.22. Знайти кількість антисиметричних відношень на n-елементній множині, $n \ge 1$.

► Для антисиметричного відношення при $i \ne j$ неможливе $a_{j,i} = a_{i,j} = 1$, тому при $i \ne j$ $(a_{j,i}, a_{i,j})\in\{(0, 0), (0, 1), (1,0)\}$. Звідси матриця антисиметричного відношення однозначно визначається n двійковими елементами на головній діагоналі та C_n^2 парами елементів, симетричних відносно головної діагоналі, причому кожна з пар може набувати одного з трьох значень: (0, 0), (0, 1) та (1,0). Відповідь: $2^n \cdot 3^{C_n^2}$. ◄

2.5.3. Комбінаторика рівнянь і нерівностей у цілих числах

Раніше було доведено, що за умови $m \ge 1$ кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ у цілих невід'ємних числах дорівнює f_m^n та $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}$.

Приклад 2.23. Скільки розв'язків у натуральних числах має рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$, де $n, m \ge 1$?

► Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ у натуральних числах у взаємно однозначну відповідність поставимо розв'язок $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_m = n-m$ у цілих невід'ємних числах за правилом $y_i = x_i-1$ для всіх $i \in \overline{1,m}$. За раніше доведеним останнє рівняння має C_{n-1}^{m-1} розв'язків, оскільки $(n-m)+m-1 = n-1$. Відповідь: C_{n-1}^{m-1}. ◄

Приклад 2.24. Скільки розв'язків у цілих невід'ємних числах має нерівність $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n$, де $m \ge 1$?

► Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вхідної нерівності у взаємно однозначну відповідність поставимо розв'язок $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1} = n$ у цілих невід'ємних числах за правилом $x_{m+1} = n-(x_1+x_2+\ldots+x_m)$. Відповідь: C_{n+m}^{m}. ◄

2.5.4. Комбінаторика ігор, або Проблема розуміння умови задачі

У цьому підрозділі розглянемо приклади, що ілюструють проблеми, пов'язані із задачами, постановка яких не є математичною.

Приклад 2.25. Скількома способами з колоди в 52 карти можна вибрати п'ять послідовних карт однієї масті?

► Спочатку необхідно уточнити постановку задачі. По-перше, треба з'ясувати, вибирається множина чи послідовність із п'яти карт, тобто чи наявне впорядкування. Якщо вибирається послідовність, то необхідно уточнити: її карти мають бути послідовними (послідовно зростаючими/спадними) або, після перевпорядкування, – стати послідовними. Розв'яжемо задачу для кожного з трьох випадків.

Випадок 1. Вибираємо множину з п'яти карт. У цьому випадку вибір однозначно визначається мастю (4 варіанти) і вартістю молодшої карти (9 варіантів). Отже, за правилом добутку маємо $4 \cdot 9 = 36$ способів.

Випадок 2. Вибираємо послідовність із п'яти карт, що після перевпорядкування має стати послідовною. Якщо на кожному розв'язку для випадку 1 ввести упорядкування, то отримаємо розв'язок для випадку 2, причому різним множинам відповідатимуть 5! послідовностей, і кожна послідовність – рівно одній множині. Отже, маємо $36 \cdot 5! = 4320$ способів.

Випадок 3. Вибираємо послідовність із п'яти карт, що має бути послідовною. Аналогічно першому випадку вибір однозначно визначається мастю (4 варіанти), вартістю молодшої карти (9 варіантів) і зростанням/спаданням (2 варіанти) послідовності. Отже, за правилом добутку маємо $4 \cdot 9 \cdot 2 = 72$ способи. ◄

Приклад 2.26. Скількома способами колоду в 52 карти можна роздати 4 гравцям по 13 карт кожному?

► Уточнимо постановку задачі. По-перше, вважатимемо, що кожному гравцю ми видаємо **м н о ж и н у** з 13 карт.

Якщо гравці пронумеровані, то задача зводиться до знаходження кількості послідовностей множин (B_1, B_2, B_3, B_4), де $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ – розбиття множини карт на 13-елементні класи. Звідси відразу маємо відповідь: $C_{52}(13, 13, 13, 13) = \dfrac{52!}{(13!)^4}$.

Якщо гравці не пронумеровані, то задача зводиться до знаходження кількості розбиттів $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ множини карт на 13-елементні класи. Оскільки множини-елементи кожного такого розбиття попарно різні, то з кожного розбиття перестановками його множин-елементів можна отримати рівно 4! різних послідовностей (B_1, B_2, B_3, B_4), і кожну послідовність – рівно з одного розбиття. Отже, кількість таких розбиттів у 4! разів менша за кількість послідовностей, визначену в попередньому випадку. У цьому випадку маємо відповідь: $\dfrac{52!}{4! \cdot (13!)^4}$. ◄

У наведених прикладах відповідь суттєво залежала від нашого розуміння умови задачі. Саме тому такого типу задачі складні для розв'язання: крім того, щоб придумати спосіб підрахунку, у них ще необхідно правильно зрозуміти й формалізувати умову.

Аналогічні складнощі можуть виникати в задачах:

– з роздаванням карт гравцям: відповідь буде суттєво залежати від того, вважаємо ми гравців пронумерованими чи ні, ураховуємо чи ні послідовність, за якою гравці отримують карти;

– про розподіл людей: для постановки задачі може бути принциповим, люди різні чи ні, якщо нам важливо не те, хто де сидить, а які місця зайняті;

– багатьох інших, узятих із реального життя.

Зауважимо також, що в більшості випадків для різних (пронумерованих) об'єктів їх упорядкування має значення, у той час як для однакових (не пронумерованих) – ні.

Контрольні запитання

1. Дайте означення розміщення з повтореннями. За якою формулою можна знайти кількість розміщень із повтореннями з n по k?

2. Дайте означення розміщення. За якою формулою можна знайти кількість розміщень із n по k?

3. Дайте означення перестановки. За якою формулою можна знайти кількість перестановок n елементів?

4. Дайте означення сполуки. За якою формулою можна знайти кількість сполук із n по k?

5. Дайте означення перестановки з повтореннями. За якою формулою можна знайти кількість перестановок із повтореннями по n складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$?

6. Дайте означення сполуки з повтореннями. За якою формулою можна знайти кількість сполук із повтореннями з m по n?

7. Чи залежить кількість розміщень із n по k від множини, з якої вибираються елементи розміщення?

8. Чи залежить кількість сполук із n по k від множини, з якої вибираються елементи сполуки?

9. Скільки різних бієкцій можна встановити між двома n-елементними множинами?

Задачі

2.1. Скільки існує двійкових матриць розміром $n \times m$?

2.2. Скільки існує двійкових матриць розміром $n \times m$ із попарно різними рядками?

2.3. Скільки існує двійкових матриць розміром $n \times m$, сусідні стовпчики яких різні?

2.4. Нехай $|U| = n$, $n \in N$.

а) Знайти кількість пар (X, Y), де $X, Y \subseteq U$ та $X \cap Y = \varnothing$.

б) Знайти кількість пар (X, Y), де $X, Y \subseteq U$ та $|X \div Y| = 1$.

в) Знайти кількість трійок (X, Y, Z), де $X, Y, Z \subseteq U$ та $X \cup (Y \setminus Z) = U \setminus (X \cap Y)$.

2.5*. Нехай n та m – фіксовані натуральні числа, $|U| = n$. Скільки існує послідовностей $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ підмножин множини U таких, що:

а) $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m = \varnothing$;

б) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_m$?

2.6. Скільки існує перестановок чисел 1, 2, ..., $2n$ таких, що кожне парне число перебуває на парному місці?

2.7. Скільки існує перестановок множини $\overline{1,n}$ $(n \geq 2)$, у яких 1 та 2 не розташовані поруч?

2.8. Скільки існує перестановок множини $\overline{1,n}$ $(n \geq 2)$, у яких між 1 та 2 розташовані k елементів?

2.9. Скільки підмножин множини $\overline{1,n}$ $(n \geq 1)$:

а) містять число 1;

б) не містять числа 1?

2.10. Скільки підмножин множини $\overline{1,n}$ $(n \geq 1)$:

а) складаються з k елементів $(k \leq n)$;

б) складаються з k елементів і містять число 1 $(1 \leq k \leq n)$;

в) складаються з k елементів і не містять числа 1 $(k \leq n)$?

2.11. Скільки підмножин множини $\overline{1,2n}$ $(n \geq 1)$:

а) не містять жодного парного числа;

б) містять принаймні одне парне число;

в) містять рівно одне парне число?

2.12. Скільки k-елементних $(k \geq 100)$ підмножин множини $\overline{1,2n}$ $(n \geq 10000)$:

а) не містять жодного двозначного числа;

б) містять принаймні одне двозначне число;

в) містять рівно одне двозначне число;

г) містять усі двозначні числа?

2.13. Скільки k-елементних ($k \ge 100$) підмножин множини $\overline{1,2n}$ ($n \ge 10000$):

а) не містять жодного числа, меншого ніж 10;

б) містять хоча б одне число, менше 10;

в) містять рівно одне число, менше 10;

г) містять усі числа, менші 10?

2.14. Скільки існує двійкових векторів, що мають довжину n та значення k ($k \le n$) їхніх координат фіксовані?

2.15. Скільки існує двійкових векторів, що мають довжину n та координати яких утворюють неспадну послідовність?

2.16. У множині B^n визначити кількість упорядкованих пар сусідніх векторів.

2.17. У множині B^n визначити кількість невпорядкованих пар сусідніх векторів (кількість ребер одиничного n-вимірного куба).

2.18. Для фіксованого натурального числа k, $k \le n$, у множині B^n визначити кількість упорядкованих пар (a, b) векторів, для яких:

а) $\|a \oplus b\| = k$;

б) $\|a \cup b\| = k$;

в) $\|a \cap b\| = k$.

2.19. Нехай $a, b \in B^n$, $a < b$ та $\rho(a, b) = m$. Знайти кількість векторів $c \in B^n$ таких, що $\rho(a, b) = \rho(a, c) + \rho(c, b)$.

2.20. Знайти кількість відношень, заданих на множинах A та B, де $|A| = n$, $|B| = m$.

2.21. Знайти кількість відношень на n-елементній множині A ($n \ge 1$), які:

а) антирефлексивні;

б) неантирефлексивні;

в) нерефлексивні;

г) несиметричні;

д) неантисиметричні.

2.22. Знайти кількість відношень на n-елементній множині A ($n \ge 1$), які:

а) нерефлексивні й неантирефлексивні;

б) рефлексивні й симетричні;

в) рефлексивні й антисиметричні;

г) рефлексивні й несиметричні;

д) рефлексивні й неантисиметричні.

2.23. Знайти кількість відношень на n-елементній множині A, які:

а) рефлексивні або симетричні;

б) антирефлексивні або антисиметричні;

в) нерефлексивні або симетричні;

г) неантирефлексивні або антисиметричні;

д) рефлексивні або несиметричні;

е) рефлексивні або неантисиметричні.

2.24. Знайти кількість відношень на n-елементній множині A, які:

а) нерефлексивні або несиметричні;

б) нерефлексивні й несиметричні;

в) неантирефлексивні й неантисиметричні.

2.25. Скільки різних слів можна скласти перестановками літер слова:

а) математика;	є) екзамен;
б) рівняння;	ж) кафедра;
в) парність;	з) програмування;
г) деканат;	и) фахівець;
д) факультет;	і) варіант;
е) студент;	й) парність?

2.26. Скількома способами деканат може розподілити 75 студентів по трьох групах так, щоб у кожній групі було 25 студентів?

2.27. Нехай $|U| = n$, $n \in N$. Знайти кількість пар (X, Y) таких, що $X, Y \subseteq U$, $|X| = |Y| = k$, $|X \cap Y| = m$, $n \ge k \ge m$.

2.28. Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ за умови, що $x_i \ge a_i$, $a_i \in Z$, $i \in \overline{1,m}$, $m \ge 1$, $n \in Z$, $n \ge \sum_{i=1}^{m} a_i$?

2.29. Скільки розв'язків у цілих невід'ємних числах має нерівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_m < n$, де $n, m \ge 1$?

2.30. Скільки розв'язків у натуральних числах має нерівність (n, $m \ge 1$):

а) $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n$;

б) $x_1+x_2+\ldots+x_m < n$?

2.31. Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m| = n$, де m, $n \ge 1$?

2.32. Скільки розв'язків у цілих числах має нерівність $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m| \le n$, де m, $n \ge 1$?

2.33. Скільки розв'язків у натуральних числах має нерівність (m, $n \ge 1$):

а) $n \le x_1+x_2+\ldots+x_m \le 2n$;

б) $n < x_1+x_2+\ldots+x_m < 2n$?

2.34. Скільки розв'язків у цілих невід'ємних числах має нерівність (m, $n \ge 1$):

а) $n \le x_1+x_2+\ldots+x_m \le 2n$;

б) $n < x_1+x_2+\ldots+x_m < 2n$?

2.35. Скільки існує послідовностей із n нулів і m одиниць, у яких жодні дві одиниці не розташовані поруч?

2.36. Скільки існує послідовностей із n нулів і m одиниць, у яких жодні дві одиниці не розташовані поруч і перший та останній елементи послідовності одночасно не є одиницями?

2.37. Скільки існує послідовностей із n нулів і m одиниць, у яких між кожними двома одиницями є принаймні два нулі?

2.38. Скількома способами 12 однакових куль можна розкласти по п'ятьох різних пакетах, щоб жоден пакет не був порожнім?

2.39. Скількома способами 4 однакові червоні, 4 однакові білі і 4 однакові сині кулі можна розкласти в 6 різних пакетів?

2.40. Скількома способами можна розкласти $n \ge 1$ однакових куль по $k \ge 1$ різних урнах так, щоб виявилося рівно m порожніх урн?

2.41. Скількома способами можна розкласти 15 однакових куль по п'яти різних урнах так, щоб виявилося:

а) жодної порожньої урни;

б) рівно одна порожня урна;

в) рівно дві порожні урни;

г) хоча б дві порожні урни;

д) не більше двох порожніх урн?

2.42. Кидають три пронумеровані гральні кубики (із шістьма гранями кожен). Скількома способами вони можуть впасти так, щоб:

а) або всі верхні грані були однаковими, або всі попарно різними;

б) принаймні на одному кубику випало 6;

в) сума всіх верхніх граней дорівнювала 5?

2.43. Кидають три однакові гральні кубики (із шістьма гранями кожен). Скількома способами вони можуть впасти так, щоб:

а) або всі верхні грані були однаковими, або всі попарно різними;

б) принаймні на одному кубику випало 6?

2.44. Скількома способами із 28 кісток доміно можна вибрати множину із двох кісток так, щоб їх можна було прикласти одна до одної?

2.45. Скількома способами в лотереї 6 із 54 можуть випасти 6 номерів так, щоб у лотерейному білеті було вгадано:

а) рівно чотири номери;

б) принаймні три номери;

в) менше трьох номерів?

2.46. У колоді з n карт є m позначених. Скількома способами можна обрати множину з k карт, щоб серед обраних карт виявилась хоча б одна позначена (m, $k \le n$)?

2.47. З колоди в 52 карти вибрали множину із 6 карт. У скількох випадках серед цих карт:

а) немає жодного туза;

б) є принаймні один туз;

в) є рівно один туз;

г) є не менше двох тузів;

д) є рівно два тузи;

е) є чотири тузи?

2.48. Скількома способами з колоди в 52 карти можна вибрати множину з п'яти карт так, щоб серед них виявилось:

а) п'ять карт однієї масті;

б) п'ять послідовних карт;

в) усі карти різної вартості;

г) чотири карти однакової вартості;

д) рівно три карти однієї вартості;

е) три карти однієї вартості та дві іншої однакової;
ж) принаймні три карти однієї вартості;
з) рівно одна пара карт однакової вартості?

2.49. Скількома способами з колоди в 52 карти можна вибрати послідовність із п'яти карт так, щоб серед них виявилось:
а) п'ять карт однієї масті;
б) п'ять послідовних карт;
в) усі карти різної вартості;
г) чотири карти однакової вартості;
д) рівно три карти однієї вартості;
е) три карти однієї вартості та дві іншої однакової;
ж) принаймні три карти однієї вартості;
з) рівно одна пара карт однакової вартості?

2.50. Скількома способами колоду з 32 карт можна роздати трьом пронумерованим гравцям, видавши кожному множину з 10 карт (при цьому множина із двох карт залишається нерозданою)?

2.51. Скількома способами колоду з 32 карт можна роздати трьом пронумерованим гравцям, видавши кожному множину з 10 карт так, щоб нерозданою залишилась множина:
а) із двох карт однієї вартості;
б) із двох карт однієї масті;
в) із двох тузів;
г) із двох послідовних карт, можливо різних мастей;
д) із двох послідовних карт однієї масті;
е) із двох карт різних мастей;
ж) із двох карт різної вартості;
з) із двох карт різної вартості й масті?

2.52. Скількома способами колоду з 52 карт можна роздати:
а) тринадцяті гравцям по чотири карти кожному;
б) тринадцяті гравцям по чотири карти кожному так, щоб кожен гравець отримав по одній карті кожної масті;
в) чотирьом гравцям по тринадцять карт кожному так, щоб кожен гравець отримав по одній карті кожної вартості;
г) тринадцяті гравцям по чотири карти кожному, щоб один гравець отримав карти всіх мастей, а решта – однієї?
Гравці пронумеровані.

2.53. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника ($n \geq 4$), якщо жодні три не перетинаються в одній точці?

2.54. Скільки виграшних прямих[13] для гри "хрестики-нолики" існує в n-вимірному кубі з ребром k?

2.55. На клітчастому папері зі стороною клітинки 1 см намальована окружність радіусом r см ($r \in N$), що не проходить через вершини клітинок і не дотикається їх сторін. Скільки клітинок перетинає ця окружність?

2.56. На прямій розташовано n, $n \geq 1$, точок. Скількома способами їх можна розфарбувати в m, $m \geq 2$, кольорів так, щоб сусідні точки мали різний колір?

---

[13] Виграшні прямі складаються з k символів, розташованих на одній прямій. Для стандартних "хрестиків-ноликів" $n = 2$ та $k = 3$.

ГЛАВА 3. Біном Ньютона і властивості біномних коефіцієнтів

Біномом Ньютона, або ***біномною формулою***, за традицією називають формулу

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\text{ , де } n \geq 0,$$

а її коефіцієнти C_n^k – ***біномними коефіцієнтами***. При цьому за означенням прийнято вважати, що $0^0 = 1$.

Перед тим, як перейти до доведення бінома Ньютона, розглянемо деякі властивості біномних коефіцієнтів.

3.1. Найпростіші властивості біномних коефіцієнтів

Раніше вже було доведено, що $C_n^k = \dfrac{n!}{n!(n-k)!}$ для $0 \leq k \leq n$.

Із цієї формули безпосередньо випливає:

$$C_n^0 = 1 \text{ для } n \geq 0,$$

$$C_n^n = 1 \text{ для } n \geq 0,$$

$$C_n^1 = n \text{ для } n \geq 1.$$

Теорема 3.1. Правило симетрії.

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ для } 0 \leq k \leq n.$$

► *Спосіб 1* (комбінаторний). Кількість варіантів вибору k-елементної підмножини n-елементної множини становить C_n^k. З іншого боку, те саме можна зробити, вибравши n-k елементів, що не входять у k-елементну підмножину, а для цього є C_n^{n-k} способів. Звідси з комбінаторних міркувань маємо бажану рівність.

Спосіб 2. $C_n^k = n!/(k!\cdot(n\text{-}k)!) = n!/((n\text{-}k)!\cdot k!) = C_n^{n-k}$. ◄

Теорема 3.2. Правило Паскаля, або Правило додавання.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ для } 1 \leq k \leq n.$$

► *Спосіб 1* (комбінаторний). У n-елементній множини, з якої вибираємо k-елементну підмножину, зафіксуємо деякий елемент a. Усі k-елементні підмножини розподіляються на два класи, що не перетинаються: ті, що містять виділений елемент a, і ті, що не містять його. Кожна множина першого класу складається з елемента a та ще (k-1) елементів, вибраних із залишку ((n-1) елемент) після вилучення a, тому таких множин C_{n-1}^{k-1}. Кожна множина другого класу складається з k елементів, вибраних із (n-1) елементів (усі елементи, крім a), тому таких множин C_{n-1}^k. За правилом суми k-елементну підмножину n-елементної множини можемо вибрати $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ способами. Звідси $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

Спосіб 2. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k+1))!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \text{ ◄}$$

Трикутник Паскаля – це числовий трикутник, у вершині якого міститься число 1, а кожне інше число є сумою двох чисел попереднього рядка, між якими воно роташоване (див. рис. 3.1). Із правила Паскаля випливає, що (n+1)-й рядок трикутника Паскаля є послідовністю біномних коефіцієнтів C_n^0, C_n^1, …, C_n^n.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
… … …

Рис. 3.1. Трикутник Паскаля

3.2. Біном Ньютона

Теорема 3.3. Біном Ньютона.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \text{, де } n \geq 0.$$

► Комбінаторне доведення. Послідовно перемножимо a+b n разів. При цьому одержимо доданки вигляду $d_1d_2\ldots d_n$, де з i-ї дужки береться множник d_i. Кожен такий множник є літерою a або b. Зведемо подібні. Коефіцієнт при $a^k b^{n-k}$ дорівнюватиме кількості способів обрати k дужок, з яких у добуток беруться літери a, тобто дорівнює C_n^k. Отже, біном Ньютона з комбінаторних міркувань доведено. Зауважимо, що його також можна довести індукцією за n, використовуючи правило Паскаля. ◄

3.3. Доведення тотожностей із біномними коефіцієнтами

У цьому підрозділі йдеться про скінченні суми за участю біномних коефіцієнтів. Розглянуто методи доведення тотожностей різного вигляду. Методи з підрозділів 3.3.2-3.3.4 застосовні також для нескінченних рядів, а тому мають значення не лише для комбінаторики.

3.3.1. Безпосереднє застосування бінома Ньютона

Приклад 3.1. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} x^k = (1+x)^n$.

► Оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$, то

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} x^k \text{ . ◄}$$

Приклад 3.2. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

► $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$. ◄

Приклад 3.3. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ для $n \geq 1$.

► $0 = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$. ◄

3.3.2. Диференціювання та інтегрування

Приклад 3.4. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$.

► Для доведення цієї тотожності використаємо першу похідну функції $(1+x)^n$ за x. За всіх дійсних x виконується $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n$, тому

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^k)' = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k)' = ((1+x)^n)' = n\cdot(1+x)^{n-1}.$$

Звідси за $x = 1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k 1^{k-1} = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}. \text{ ◄}$$

Приклад 3.5. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0$ для $n \geq 2$.

► З доведення попереднього прикладу за $x = -1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k = -\sum_{k=0}^{n} kC_n^k (-1)^{k-1} = -n\cdot(1+(-1))^{n-1} = 0. \text{ ◄}$$

Приклад 3.6. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

► Розглянемо визначені інтеграли:

$$\int\limits_{t=0}^{x} t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \int\limits_{t=0}^{x} \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{t=0}^{x} C_n^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

За всіх дійсних t виконується $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (1+t)^n$, тому

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} C_n^k = \int\limits_{t=0}^{x} \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k dt = \int\limits_{t=0}^{x} (1+t)^n dt = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Звідси для $x = 1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^{k+1}}{k+1} C_n^k = \frac{(1+1)^{n+1}-1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3.7. Довести, що $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}$.

► З доведення попереднього прикладу за $x = -1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^k = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} C_n^k = \frac{(1-1)^{n+1}-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \blacktriangleleft$$

3.3.3. Зміна порядку підсумовування в кратних сумах

У математиці зустрічаються не лише суми вигляду $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, але й ***кратні суми***, наприклад, вигляду $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_{k,i}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{k,i}$ тощо. При цьому $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{k,i}$ розуміють як $\sum\limits_{k=0}^{n}(\sum\limits_{i=0}^{k} a_{k,i})$, тобто спочатку виконують підсумовування внутрішньої суми за i, а потім уже зовнішньої – за k. При обчисленні кратних сум інколи корисно змінити порядок підсумовування. Для наведених сум зміна порядку підсумовування означає, що зовнішня сума буде братися за індексом i, а внутрішня – за k.

Зміну порядку підсумовування можна виконати за допомогою такої геометричної інтерпретації. Розглянемо цілочислову координатну площину. Нехай вісь абсцис відповідає значенням індексу k, а вісь ординат – значенням індексу i. Тоді всі пари індексів (k, i), за якими підраховують кратну суму, відповідають точкам деякої області D координатної площини. Порядок підсумовування, в якому k – зовнішній індекс, а i – внутрішній, відповідає обходу точок області D по вертикалях. Якщо внутрішнім індексом стане i, а зовнішнім – k, то це відповідатиме обходу точок області D по горизонталях. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 3.8. Змінити порядок підсумовування в сумі $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_{k,i}$.

► Неважко бачити, що підсумовування виконується за точками прямокутної області $\{(k, i)|\ 0 \le k \le n,\ 0 \le i \le n\}$, причому за $k = t$ воно відбувається по i від 0 до n (рис. 3.2 а). Після зміни порядку підсумовування індекс i змінюється в межах від 0 до n, причому за $i = t$ внутрішня сума має обчислюватись по k від 0 до n (рис. 3.2 б). Звідси відповідь: $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_{k,i} = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{k,i}$. ◄

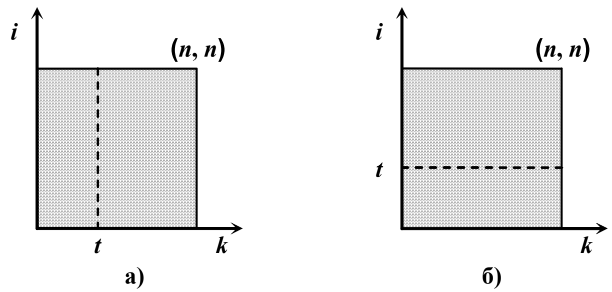


Рис. 3.2. Зміна порядку підсумовування в прикл. 3.8

Приклад 3.9. Змінити порядок підсумовування в сумі $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{k,i}$.

► Неважко бачити, що підсумовування виконується за точками трикутної області $\{(k, i)|\ 0 \le k \le n,\ 0 \le i \le k\}$, причому при $k = t$ воно відбувається по i від 0 до t (рис. 3.3 а). Після зміни порядку підсумовування індекс i змінюється в межах від 0 до n, причому при $i = t$ внутрішня сума має обчислюватись по k від t до n (рис. 3.3 б). Звідси відповідь: $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{k,i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_{k,i}$. ◄

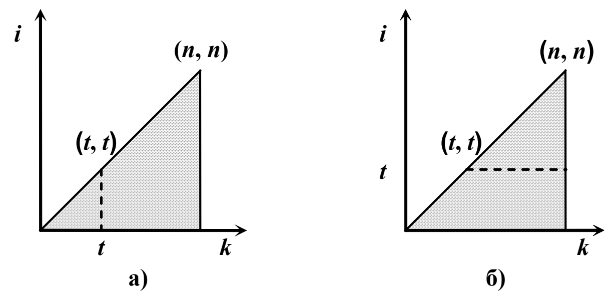


Рис. 3.3. Зміна порядку підсумовування в прикл. 3.9

Приклад 3.10. Довести, що $\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} C_k^i = 2^{n+1}$-1.

► З урахуванням результату прикл. 3.9 маємо:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} C_k^i = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} C_k^i = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}\text{-}1. ◄$$

3.3.4. Похідні тотожності

Далі використовуватимемо раніше знайдені суми.

Приклад 3.11. Довести, що $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = (n+1)\cdot 2^n$.

► З використанням арифметичних перетворень сум і раніше доведених тотожностей отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = 2\sum_{k=0}^{n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2n2^{n\text{-}1} + 2^n = (n+1)\cdot 2^n. ◄$$

Приклад 3.12. Довести, що $\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{m} C_n^{2k+1} = 2^{n\text{-}1}$, де $n \ge 1$, $m = [n/2]$.

► За умови $n \ge 1$ додамо відповідно ліві й праві частини рівностей $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ та $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$, після чого виконаємо перетворення:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^k)C_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(1+(-1)^{2k})C_n^{2k} + \sum_{k=0}^{m}(1+(-1)^{2k+1})C_n^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(1+1)C_n^{2k} + \sum_{k=0}^{m}(1-1)C_n^{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} + \sum_{k=0}^{m} 0\cdot C_n^{2k+1} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} .$$

Звідси $\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} = 2^{n\text{-}1}$. Оскільки $\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} + \sum_{k=0}^{m} C_n^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, то

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k+1} = 2^n\text{-}\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} = 2^n\text{-}2^{n\text{-}1} = 2^{n\text{-}1}. ◄$$

Приклад 3.13. Довести, що $\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = \delta_{n,m}$, де $\delta_{n,m}$ – ***символ Кронекера***, тобто $\delta_{n,m} = 0$ для $n \ne m$ та $\delta_{n,m} = 1$ для $n = m$.

► Якщо $m < n$, то за означенням суми $\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = 0 = \delta_{n,m}$. Розглянемо випадок $m \ge n$.

$$\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = \sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k C_{k+n}^n C_m^{k+n} = \sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k C_m^n C_{m-n}^k =$$

$$= C_m^n \sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k C_{m-n}^k \text{, оскільки } C_{k+n}^n C_m^{k+n} = C_m^n C_{m-n}^k .$$

Якщо $m > n$, то $m-n \geq 1$ і за прикл. 3.3 $\sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k C_{m-n}^k = 0$, звідки

$$\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = C_n^m \cdot 0 = 0 = \delta_{n,m}.$$

Якщо $m = n$, то $\sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k C_{m-n}^k = 1$ та $C_n^m = 1$, звідки

$$\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = 1\cdot 1 = 1 = \delta_{n,m}.$$

У всіх випадках рівність виконується. ◄

Оскільки за умови $j > i$ $C_i^j = 0$, то із прикл. 3.13 випливають наслідки.

Наслідок 3.1. Матриця $C^{-1} = ((-1)^{i+j} (-1)^{i+j} C_i^j)_{0\leq i,\, j\leq n}$ обернена до матриці $C = (C_i^j)_{0\leq i,\, j\leq n}$.

Наслідок 3.2. Матриця $D = ((-1)^j C_i^j)_{0\leq i,\, j\leq n}$ дорівнює своїй оберненій.

3.3.5. Використання розкладу в степеневий ряд

Лема 3.1. Якщо за всіх $x\in[a;\, b]$, де $a<b$, виконується рівність

$$a_n x^n+\ldots+a_0+a_{-1}x^{-1}+\ldots+a_{-m}x^{-m} = b_n x^n+\ldots+b_0+b_{-1}x^{-1}+\ldots+b_{-m}x^{-m},$$

то $a_i = b_i$ для всіх $i\in\overline{-m,n}$.

► Помножимо обидві рівності на x^m і перенесемо праву частину ліворуч:

$$a_n x^{m+n}+\ldots+a_0x^m+a_{-1}x^{m-1}+\ldots+a_{-m}x^0 = b_n x^{m+n}+\ldots+b_0x^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_{-m}x^0,$$

$$(a_n-b_n)x^{m+n}+\ldots+(a_0-b_0)x^m+(a_{-1}-b_{-1})x^{m-1}+\ldots+(a_{-m}-b_{-m})x^0 = 0.$$

Поліном $(a_n-b_n)x^{m+n}+\ldots+(a_0-b_0)x^m+(a_{-1}-b_{-1})x^{m-1}+\ldots+(a_{-m}-b_{-m})x^0$ має нескінченно багато коренів, а це можливо лише тоді, коли він є нуль-поліномом, тобто за умови $a_i = b_i$ для всіх $i\in\overline{-m,n}$. ◄

Розглянемо приклад, в якому використовується ця властивість.

Приклад 3.14. Довести, що $\sum_{r=0}^{k} C_n^r C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

► Використовуючи біном Ньютона, перепишемо тотожність $(1+x)^n\cdot(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ у вигляді

$$\left(\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t\right) = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k .$$

Розкриємо в лівій частині дужки і зведемо подібні. Зауважимо, що доданки з x^k отримують у результаті множення доданка $C_n^r x^r$ із першої дужки на доданок $C_m^{k-r} x^{k-r}$ із другої, причому r пробігає всі можливі значення від 0 до k. Отже, після зведення подібних коефіцієнт при x^k дорівнюватиме $\sum_{r=0}^{k} C_n^r C_m^{k-r}$. Звідси маємо тотожність

$$\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{r=0}^{k} C_n^r C_m^{k-r}\right)x^k = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k .$$

Прирівнюючи в ній коефіцієнти при x^k, маємо шукану рівність. ◄

Приклад 3.15. Довести, що $\sum_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_m^r = C_{n+m}^{n-k}$.

► Використовуючи біном Ньютона та правило симетрії, перепишемо тотожність $(1+x)^n\cdot(1+x^{-1})^m = (1+x)^{n+m}/x^m$ у вигляді

$$\left(\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^{-t}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^{k-m} = \sum_{k=-m}^{n} C_{n+m}^{k+m} x^k =$$

$$= \sum_{k=-m}^{n} C_{n+m}^{n-k} x^k .$$

Розкриємо в лівій частині дужки і зведемо подібні: доданки з x^k отримаємо в результаті множення доданка $C_m^r x^{-r}$ із другої дужки на доданок $C_n^{k+r} x^{k+r}$ із першої дужки, причому r пробігає всі можливі значення від 0 до n-k, оскільки $0 \leq k+r \leq n$ та

$0 \le r \le m$. Отже, після зведення подібних коефіцієнт при x^k дорівнюватиме $\sum_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_m^r$:

$$(\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r)\cdot(\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^{-t}) = (\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r)\cdot(\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^{-t}) =$$

$$= \sum_{k=-m}^{n} (\sum_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_m^r) x^k .$$

Звідси маємо тотожність

$$\sum_{k=-m}^{n} (\sum_{k=-m}^{n} C_n^{k+r} C_m^r) x^k = \sum_{k=-m}^{n} C_{n+m}^{n-k} x^k .$$

Прирівнюючи в ній коефіцієнти при x^k, одержуємо шукану рівність. ◄

3.3.6. Вибрані комбінаторні доведення

Інколи тотожність можна довести суто комбінаторними міркуваннями. Зазвичай такі доведення потребують оригінальної ідеї, але дозволяють уникнути складних математичних перетворень.

Приклад 3.16. Довести, що $\sum_{k=m}^{n} C_k^m = C_{n+1}^{m+1}$.

► $(m+1)$-елементну підмножину $(n+1)$-елементної множини можна вибрати C_{n+1}^{m+1} способами. Однак $(m+1)$-елементну підмножину можна вибрати інакше. Упорядкуємо $n+1$ елементів. Нехай вибрано m елементів із перших k за цим порядком елементів і ще $(k+1)$-й. Тоді за фіксованого k вибір можна здійснити C_k^m способами. Параметр k може набувати значень від m до n, причому різним значенням k відповідають різні підмножини. Тому за правилом суми $(m+1)$-елементну підмножину можна обрати $\sum_{k=m}^{n} C_k^m$ способами. Звідси маємо шукану рівність. ◄

Приклад 3.17. Довести, що $\sum_{r=0}^{k} C_n^r C_n^{k-r} = C_{n+m}^k$.

► Нехай є n предметів першого сорту та m – другого, причому всі вони попарно різні. Треба вибрати з них k предметів. Це можна зробити, вибравши з усіх $n+m$ предметів k-елементну підмножину (права частина рівності), або, що те саме, – r предметів першого сорту та k-r – другого. Підсумовування за всіма можливими r дає всі варіанти вибору k елементів із повної сукупності. З іншого боку, це ліва частина рівності. ◄

3.3.7. Метод траєкторій

Для деяких комбінаторних задач можна знайти геометричну інтерпретацію, що зводить задачу до підрахунку кількості шляхів спеціального вигляду.

Розглянемо цілочислові точки A_1 та A_2 площини. ***Траєкторією*** з A_1 в A_2 назвемо довільний найкоротший маршрут, що веде з A_1 в A_2 та проходить лініями цілочислової сітки: за один крок можна зміститися на одиницю по вертикалі чи горизонталі (але не по діагоналі!). Якщо $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$, $n = |a_2\text{-}a_1|$, $m = |b_2\text{-}b_1|$, то довільна траєкторія з A_1 в A_2 має довжину $n+m$ та однозначно визначається m-елементною множиною своїх вертикальних кроків (або, симетрично, n-елементною множиною горизонтальних). Отже, існує $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$ траєкторій з A_1 в A_2.

Приклад 3.18. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

► Існує C_{2n}^n траєкторій, що ведуть із точки (0, 0) у точку (n, n).

З іншого боку, кожна траєкторія з (0, 0) у (n, n) необхідно перетинає діагональну пряму, що з’єднує точки $(0, n)$ та $(n, 0)$. Розіб’ємо траєкторію на дві частини: до діагоналі й після. Кожна частина містить n кроків. Перша частина є траєкторією з (0, 0) у $(k, n\text{-}k)$, отже, може бути вибрана C_n^k способами; друга – траєкторією з $(k, n-k)$ у (n, n) і може бути вибрана C_n^k способами. За правилом добутку за фіксованого k маємо $(C_n^k)^2$ траєкторій із $(0, 0)$ у (n, n). Різним значенням k відповідають різні траєкторії, тому за правилом суми загальна кількість траєкторій становить $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$, звідки маємо шукану рівність. ◄

У наступному прикладі розглянемо числа Каталана. Числа Каталана пов'язані з кількістю слів Діка певної довжини.

Нехай задано дволітерний алфавіт $\{x, y\}$. ***Словом Діка*** називається довільне слово в алфавіті $\{x, y\}$, що задовольняє такі вимоги: 1) воно містить однакову кількість символів x та y; 2) довільний його префікс (тобто початок) містить символів y не більше ніж символів x. Наприклад, словами Діка є слова *xy*, *xxyy*, *xyxy*, але слова *x*, *yxxy*, *xxyyyx* не є словами Діка. З означення випливає, що слова Діка мають парну довжину.

Число Каталана C_n – це кількість слів Діка, що мають довжину $2n$.

Приклад 3.19. Довести, що $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$.

► Розглянемо множину "правильних" траєкторій, тобто тих, що ведуть із точки $O = (0, 0)$ у точку $A = (n, n)$ і не мають частин вище прямої, яка з'єднує точки O та A. Усі інші траєкторії з O в A назвемо неправильними.

Між словами Діка, що мають довжину $2n$, і правильними траєкторіями з O в A можна встановити бієкцію. Дійсно, нехай символ x кодує горизонтальний крок, а символ y – вертикальний. Тоді кожне слово Діка однозначно кодує правильну траєкторію. З іншого боку, кожна правильна траєкторія може бути однозначно закодована словом Діка, що має довжину $2n$. Отже, кількість правильних траєкторій дорівнює числу Каталана C_n.

Знайдемо кількість неправильних траєкторій. Кожна неправильна траєкторія необхідно має точки на прямій, що проходить через точки $E = (0, 1)$ та $G = (n-1, n)$ (рис. 3.4). Нехай B – найближча до точки O точка траєкторії, що лежить на прямій EG. Симетрично відобразимо частину OB траєкторії відносно прямої EG. При цьому отримаємо траєкторію із $C = (-1, 1)$ в A. З іншого боку, за кожною траєкторією з C в A можна побудувати неправильну траєкторію. Для цього її початок до першого перетину із прямою EG симетрично відобразимо відносно прямої EG. Тим самим побудуємо бієкцію між неправильними траєкторіями і траєкторіями із C в A. Кількість траєкторій із C в A дорівнює C_{2n}^{n-1}, тому існує C_{2n}^{n-1} неправильних траєкторій.

Оскільки всього існує C_{2n}^n траєкторій із O в A, то кількість правильних траєкторій становить

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}(1 - \frac{n}{n+1}) = C_{2n}^n/(n+1).$$

Звідси $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$, що й треба було довести. ◄

Наведене доведення належить Д. Андре′ (D. Andre′) і було запропоноване в 1887 р.

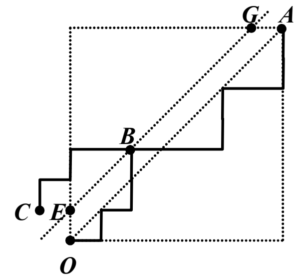


Рис. 3.4. Перетворення неправильної траєкторії у прикладі 3.19

3.4. Поліноміальна теорема

Узагальненням бінома Ньютона є поліноміальна теорема. Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, що беруть у ній участь, називають ***поліноміальними коефіцієнтами***.

Теорема 3.4. Поліноміальна.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} C_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_m^{k_m} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} .$$

► Перемножимо $a_1+a_2+\ldots+a_m$ послідовно n разів. При цьому одержимо доданки вигляду $d_1d_2\ldots d_n$, де з i-ї дужки береться множник d_i, який є літерою a_1 або a_2, …, або літерою a_m. Зведемо подібні. Коефіцієнт при $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$, де $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$, дорівнює кількості слів, складених із k_1 літер a_1, k_2 літер a_2, …, k_m літер a_m, тобто $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ – кількості перестановок із повтореннями складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Оскільки $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, то теорему доведено. ◄

Біном Ньютона є частковим випадком поліноміальної теореми для $m = 2$. Дійсно, за умови $k_1+k_2 = n$ виконано $\dfrac{n!}{k_1!k_2!} = \dfrac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$, звідки $C_n(k_1, k_2) = C_n^{k_1}$.

Приклад 3.20. Довести, що $\displaystyle\sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} = m^n$.

► За поліноміальною теоремою

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} .$$

Нехай $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$, тоді

$$m^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} 1^{k_1} 1^{k_2} \ldots 1^{k_m} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} . \blacktriangleleft$$

Приклад 3.21. Обчислити $(x+y+z)^3$.

► Поліноміальні коефіцієнти не залежать від перестановок свого складу, тому достатньо обчислити

$C_3(0,0,3) = 3!/(0!\cdot 0!\cdot 3!) = 1$,

$C_3(0,1,2) = 3!/(0!\cdot 1!\cdot 2!) = 3$,

$C_3(1,1,1) = 3!/(1!\cdot 1!\cdot 1!) = 6$

і застосувати поліноміальну теорему:

$$(x+y+z)^3 = C_3(0,0,3)\cdot(x^3+y^3+z^3)+C_3(0,1,2)\cdot(xy^2+x^2y+xz^2+x^2z+yz^2+$$
$$+y^2z)+C_3(1,1,1)\cdot xyz =$$
$$= (x^3+y^3+z^3)+3(xy^2+x^2y+xz^2+x^2z+yz^2+y^2z)+6xyz. \blacktriangleleft$$

Приклад 3.22. Знайти коефіцієнт при x^8 у розкладі полінома $(1+2x^4-3x^8)^9$.

► За поліноміальною теоремою

$$(1+2x^4-3x^8)^9 = \sum_{k_1+k_2+k_3=9} \frac{9!}{k_1!k_2!k_3!} 1^{k_1} (2x^4)^{k_2} (-3x^8)^{k_3} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+k_3=9} \frac{9!}{k_1!k_2!k_3!} 2^{k_2} (-3)^{k_3} x^{4k_2+8k_3} .$$

Для знаходження коефіцієнта при x^8 у розкладі полінома $(1+x^2-x^3)^9$ необхідно спочатку знайти всі трійки (k_1, k_2, k_3), що дають x^8. Для цього в цілих невід'ємних числах розв'яжемо систему

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 9, \\ 4k_2 + 8k_3 = 8. \end{cases}$$

Вона має два розв'язки: (7, 2, 0) та (8, 0, 1). Отже, коефіцієнт при x^8 становить

$$\frac{9!}{7!\cdot 2!\cdot 0!}\cdot 2^2(-3)^0 + \frac{9!}{8!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot 2^0\cdot(-3)^1 = 117.$$

Відповідь: 117. ◄

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу бінома Ньютона.
2. Які числа називають біномними коефіцієнтами?
3. Запишіть поліноміальну теорему.
4. Які числа називають поліноміальними коефіцієнтами?
5. Чи є поліноміальна теорема частковим випадком бінома Ньютона?
6. Як можна здійснити зміну порядку підсумовування в кратних сумах?
7. У чому суть методу траєкторій?

8. Як визначаються числа Каталана?
9. Чому дорівнює число Каталана C_n?

Задачі

3.1. Змінити порядок підсумовування в сумах:

а) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=n-k}^{n} a_{k,i}$;

б) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{k,i}$;

в) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} a_{k,i}$;

г) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}$;

д) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k+2}^{n} a_{k,i}$.

3.2. Обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{n} 9^k C_n^k$; в) $\sum_{k=0}^{n}(3^k-2^k)C_n^k$; д) $\sum_{k=0}^{n}(4k-1)C_n^k$;

б) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^k C_n^k$; г) $\sum_{k=0}^{n}(3k+2)C_n^k$; е) $\sum_{k=0}^{n}k2^k C_n^k$.

3.3. Обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{n}k3^{n-k}2^k C_n^k$; в) $\sum_{k=0}^{n}k^2 C_n^k$; д) $\sum_{k=0}^{n}k^2 2^k C_n^k$;

б) $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k$; г) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 C_n^k$; е) $\sum_{k=0}^{n}k^2 2^{2k-n} C_n^k$.

3.4. Обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}C_n^k$; в) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k+1}C_n^k$; д) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k5^{n-k}}{k+1}C_n^k$.

б) $\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k+1}C_n^k$; г) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{k+1}C_n^k$;

3.5. Обчислити суму $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}$.

3.6. Довести наслідки 3.1 та 3.2.

3.7. Довести, що $\sum_{k=m}^{n}(-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^{m-1}$ для $1 \le m \le n$.

3.8. Для $m = [n/2]$ обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{m}kC_n^{2k}$; б) $\sum_{k=0}^{m}(2k+1)C_n^{2k+1}$.

3.9. Для $m = [n/3]$ обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{m}C_n^{3k}$; б) $\sum_{k=0}^{m}C_n^{3k+1}$; в) $\sum_{k=0}^{m}C_n^{3k+2}$.

3.10. Обчислити суму $\sum_{k=0}^{m}C_n^{4k}$, де $m = [n/4]$.

3.11. Для $m = [n/2]$ обчислити суму:

а) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k}$; б) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k+1}$.

3.12. Обчислити суму $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_n^k)^2$.

3.13. Обчислити суму:

а) $\sum_{r=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-r}C_n^r C_n^p C_n^{r+p}$; г) $\sum_{r=0}^{n}\sum_{p=0}^{3n-r}C_n^r C_{2n}^p C_{3n}^{r+p}$;

б) $\sum_{r=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-r}C_n^r C_{2n}^p C_n^{r+p}$; д) $\sum_{r=0}^{2n}\sum_{p=0}^{3n-r}C_{2n}^r C_{2n}^p C_{3n}^{r+p}$.

в) $\sum_{r=0}^{n}\sum_{p=0}^{2n-r}C_n^r C_{2n}^p C_{2n}^{r+p}$;

3.14. Виходячи з комбінаторних міркувань, довести, що $\sum_{k=0}^{m}C_{n-k-1}^{m-k} = C_n^m$ для $0 \le m < n$.

3.15. Знайти значення суми $\sum_{k=m}^{n}A_k^m$, де $0 \le m \le n$.

3.16. Знайти значення суми $\sum_{k=p}^{n} A_k^m$, де $0 \le m \le p \le n$.

3.17. Знайти значення суми $\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k (C_{2009}^k)^{2009}$.

3.18. Довести, що $\sum_{k=0}^{m} C_n^k C_{n-k}^{m-k} C_{n-m}^{m-k} = (C_n^m)^2$ для $m \le n$.

3.19. Скільки підмножин множини $\overline{1,2n}$ містять однакову кількість парних і непарних чисел?

3.20. За допомогою методу траєкторій довести, що $\sum_{k=1}^{n-m+1} kC_{n-k-1}^{m-2} = C_n^m$.

3.21. Біля каси метро стоїть черга з $m+n$ осіб, серед яких m мають монету 1 грн., а n – 50 коп. Проїзд у метро коштує 50 коп. і на початку продажу в касі немає грошей. Скількома способами люди можуть стати в чергу так, щоб жодній людині не довелося чекати на решту?

3.22. Знайти коефіцієнт при x^8 у розкладі полінома $(1+x^2-x^3)^9$.

3.23. Знайти коефіцієнт при x^{11} у розкладі полінома $(1+x^2+2x^3)^7$.

3.24. Знайти коефіцієнт при x^8 у розкладі полінома $(1+2x^2-3x^4)^{10}$.

ГЛАВА 4. Комбінаторні формули й математичні об'єкти

Цю главу присвячено комбінаториці функцій, формулі включення й виключення та формулам обертання. На прикладах показано застосування формули включення й виключення та близьких до неї (за змістом розв'язуваних задач) формул обертання.

4.1. Формула включення й виключення

Раніше було отримано формули для обчислення кількості елементів в об'єднанні двох або трьох множин:

$|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$,

$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

Ці формули можна узагальнити на випадок об'єднання довільної скінченної кількості множин. Цим узагальненням є наведена в теоремі 4.1 ***формула включення й виключення***.

Теорема 4.1. Формула включення й виключення. Для скінченних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має місце рівність

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subseteq \overline{1,n},\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

► Доведемо формулу включення й виключення, виходячи з комбінаторних міркувань. Нехай a – довільний елемент об'єднання $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, що належить рівно r множинам із даних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$. За означенням перетину множин елемент a належить лише тим перетинам $\bigcap_{i\in I} A_i$, кожна множина-аргумент яких містить a. Тоді елемент a належить рівно C_r^k перетинам $\bigcap_{i\in I} A_i$ k множин. Звідси елемент a враховується в правій частині рівності $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_r^k$ разів. Оскільки $C_r^k = 0$ за умови $k > r$, $C_r^0 = 1$ та $\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k = 0$ за умови $r \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_r^k = C_r^0 - \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k = 1 - 0 = 1.$$

Отже, кожен елемент $a \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ у правій частині формули враховується рівно один раз, а елементи, що не належать $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, не враховуються, що й доводить справедливість формули включення й виключення.

Формулу включення й виключення також можна довести за допомогою математичної індукції за кількістю множин n. ◄

Наслідок 4.1. Для скінченних підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скінченної множини U

$$|U \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)| = |U| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq \overline{1,n}, \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

► $|U \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)| = |U| - |U \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)| = |U| - |\bigcup_{k=1}^{n} A_k| =$

$= |U| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq \overline{1,n}, \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$. ◄

Безладом множини A називається підстановка множини A, в якій жоден елемент не відповідає сам собі. Наприклад, підстановки $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, $\{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ є безладами множини $A = \{1, 2, 3\}$, а підстановки $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ – ні. Також можна сказати, що підстановка φ множини A є безладом множини A тоді й тільки тоді, коли $\varphi \cap i_A = \varnothing$.

Приклад 4.1. Знайти кількість безладів n-елементної множини A.

► Уведемо такі позначення:

P – множина всіх підстановок множини A, $|P| = n!$;

P_0 – множина всіх безладів множини A;

P_i, де $i \in A$, – множина тих підстановок множини A, в яких елемент i відповідає сам собі;

P_I, де $\varnothing \subset I \subseteq A$ – множина тих підстановок множини A, в яких елементи множини I відповідають самі собі, виходячи з означення $P_I = \bigcap_{i \in I} Pi$.

Тоді $P_0 = P \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} P_k)$. Отже, за наслідком 4.1

$$|P_0| = |P \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} P_k)| = |P| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq A, \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} P_i| =$$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq A, \\ |I|=k}} |P_I|.$$

Для кожного k від 1 до n існує рівно C_n^k множин I таких, що $I \subseteq A$, $|I| = k$. Аналогічно прикладу 2.8 $|P_I| = (n-k)!$, де $k = |I|$. Тому

$$\sum_{\substack{I \subseteq A, \\ |I|=k}} |P_I| = C_n^k \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

звідки

$$|P_0| = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Відповідь: $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. ◄

Адитивною називають величину, значення якої для цілого дорівнює сумі значень величин для його частин за довільного розбиття цілого на частини. ***Адитивною функцією множини*** називають дійсну функцію μ, визначену на множині α, що складається із множин, і задовольняє умову:

для довільного $n\in N$ та для довільних множин $A_k\in\alpha$, $k\in\overline{1,n}$,

таких, що $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in\alpha$ і множини A_k попарно не перетинаються,

виконується рівність $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$.

Наприклад, адитивною функцією множини можна вважати кількість елементів скінченних підмножин деякого універсуму. Якщо розглядати скінченні числові множини, то сума елементів множини також буде її адитивною функцією.

Аналізуючи наведені в гл. 1 доведення формул обчислення кількості елементів різниці, об'єднання, перетину скінченних множин, можна бачити, що в них замість кількості елементів $|\cdot|$ може фігурувати довільна адитивна функція множини. Формулу включення й виключення також можна узагальнити на випадок адитивної функції множини.

Наслідок 4.2. Нехай задано адитивну функцію множини $\mu:P(U)\to R$, визначену на всіх скінченних підмножинах універсуму U. Тоді для довільних скінченних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n\subseteq U$ має місце рівність

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,n},\\ |I|=k}}\mu(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

► Доведення цієї формули цілком аналогічне доведенню формули включення й виключення. ◄

Приклад 4.2. Знайти суму натуральних чисел, що не перевищують 100 і не діляться на жодне з чисел 6, 10.

► Нехай $U=\overline{1,100}$ та $\mu(M)$ – сума елементів множини M, а μ – адитивна функція множини. Нехай A_6 – множина елементів, що діляться на 6, A_{10} – елементів, що діляться на 10, A_{30} – елементів, що діляться на 6 та 10. Зауважимо, що $A_{30} = A_6\cap A_{10}$. Шукана сума може бути подана як $\mu(U\backslash(A_6\cup A_{10})) = \mu(U)\text{-}\mu(A_6\cup A_{10})$.

За узагальненням формули включення й виключення маємо
$\mu(U\backslash(A_6\cup A_{10})) = \mu(U)\text{-}\mu(A_6\cup A_{10}) = \mu(U)\text{-}(\mu(A_6)+\mu(A_{10})\text{-}\mu(A_6\cap A_{10}))$
$= \mu(U)\text{-}\mu(A_6)\text{-}\mu(A_{10})+\mu(A_{30})$,

$\mu(U) = 1+2+\ldots+100 = 100\cdot101/2 = 5050$,
$\mu(A_6) = 6+12+\ldots+96 = 102\cdot [100/6]/2= 816$,
$\mu(A_{10}) = 10+20+\ldots+90+100 = 110\cdot [100/10]/2= 550$,
$\mu(A_{30}) = 30+60+90 = 180$,
$\mu(U\backslash(A_6\cup A_{10})) =5050\text{-}816\text{-}550+180 = 3864$.
Відповідь: 3864. ◄

4.2. Формули обертання послідовностей

Нехай числові послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n$ та $b_0, b_1, \ldots, b_n$ зв'язані співвідношенням

$$a_m = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{m,k}b_k \text{ для всіх } m\in\overline{0,n}, \quad (4.1)$$

де $\alpha_{m,k}$ – деякі дійсні числа. Уведемо до розгляду вектор-стовпчики $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ і матрицю $\alpha = (\alpha_{i,j})_{0\le i,j\le n}$. Нехай $\beta = (\beta_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ – матриця, обернена до α, тобто $\beta\alpha = \mathrm{I}$, де I – одинична матриця розміром $(n+1)\times(n+1)$. Перепишемо співвідношення (4.1) у матричному вигляді: $a = \alpha b$. Тоді $\beta a = \beta\alpha b$, звідки отримуємо еквівалентне матричне рівняння $b = \beta a$. Отже, маємо формулу для обертання послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n$ у послідовність $b_0, b_1, \ldots, b_n$:

$$b_m = \sum_{k=0}^{n}\beta_{m,k}a_k \text{ для всіх } m\in\overline{0,n}, \quad (4.2)$$

тобто

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{m,k}b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=\sum_{k=0}^{n}\beta_{m,k}a_k .$$

Цей метод дозволяє отримувати досить цікаві й корисні формули. Наведемо приклад. За наслідком 3.1 матриця $C^{-1} = ((-1)^{i+j}C_i^j)_{0\le i,j\le n}$ обернена до матриці $C = (C_i^j)_{0\le i,j\le n}$, а за наслідком 3.2 матриця $D = ((-1)^j C_i^j)_{0\le i,j\le n}$ дорівнює своїй оберненій. На основі попереднього отримуємо формули обертання:

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_m^k a_k ,$$

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k a_k .$$

Розглядаючи a та b не як вектор-стовпчики, а як вектор-рядки, при переході від матричного співвідношення $a = b\alpha$ до $b = a\beta$ отримуємо:

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,m}b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=\sum_{k=0}^{n}\beta_{k,m}a_k ,$$

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=\sum_{k=m}^{n}C_k^m b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}C_k^m a_k ,$$

$$\forall m\in\overline{0,n}\ \ a_m=(-1)^m\sum_{k=m}^{n}C_k^m b_k \Leftrightarrow \forall m\in\overline{0,n}\ \ b_m=(-1)^m\sum_{k=m}^{n}C_k^m a_k .$$

Розглянемо використання формул обертання. За наслідком 4.1 для скінченних підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скінченної множини U виконується рівність

$$|U\backslash(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)| = |U| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,n},\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I}A_i| .$$

Крім того, за формулою включення й виключення

$$|\bigcup_{k=1}^{n}A_k| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,n},\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I}A_i| .$$

Отже, ми знаємо, як знайти кількість елементів, що не належать жодній із множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, і кількість об'єктів, що належать хоча б одній із вказаних множин. У побудованих формулах фігурують величини S_k:

$$S_k = \sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,n},\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I}A_i|, \text{ де } k\in\overline{1,n} .$$

Для систематичності розсудів вважатимемо, що $S_0 = |U|$.

Спробуємо тепер знайти такі величини:

R_m – кількість елементів, що належать рівно m множинам ($m\in\overline{0,n}$);

M_m – кількість об'єктів, що належать хоча б m множинам ($m\in\overline{0,n}$).

Неважко бачити: $M_0 = S_0$. R_0 – це кількість елементів, що не належать жодній із вказаних множин, тому $R_0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k$, а також

$$R_n = M_n \text{ та } R_m = M_m\text{-}M_{m+1}, \text{ де } m\in\overline{0,n-1} .$$

За всіх $m\in\overline{0,n}$ виконується $S_m = \sum_{k=m}^{n}C_k^m R_k$, оскільки елемент, що належить рівно k множинам, рахується в сумі S_m рівно C_k^m разів. Тоді за формулою обертання для всіх $m\in\overline{0,n}$ маємо

$$R_m = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}C_k^m S_k .$$

З іншого боку, елементи, що належать хоча б m множинам, – це елементи, що належать рівно m, m+1, …, n множинам, тому

$$M_m = \sum_{k=m}^{n}R_k .$$

Підставимо в отриману формулу вираз для R_k і виконаємо перетворення для $m \geq 1$:

$$M_m = \sum_{k=m}^{n}(\sum_{i=k}^{n}(-1)^{k+i}C_i^k S_i) = \sum_{i=m}^{n}\sum_{k=m}^{i}(-1)^{k+i}C_i^k S_i =$$

$$= \sum_{i=m}^{n}(-1)^i S_i \sum_{k=m}^{i}(-1)^k C_i^k = \sum_{i=m}^{n}(-1)^i S_i (-1)^m C_{i-1}^{m-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}C_{k-1}^{m-1}S_k ,$$

оскільки $\sum_{k=m}^{i}(-1)^k C_i^k = (-1)^m C_{i-1}^{m-1}$ (див. задачу 3.7). Отже,

$$M_m = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+m} C_{k-1}^{m-1} S_k \text{, де } m \ge 1.$$

4.3. Комбінаторика функцій

Нагадаємо, що ***відповідністю*** між множинами A та B називається довільна підмножина C декартового добутку $A \times B$. ***Образом***, або ***повним образом***, елемента a при відповідності C називається множина всіх елементів, що відповідають елементу a, яка позначається $C(a)$. ***Прообразом***, або ***повним прообразом***, елемента b при відповідності C називається множина всіх елементів, яким відповідає елемент b (позначається $C^{-1}(a)$).

$C(a) = \{b \mid (a, b) \in C\}$.

$C^{-1}(b) = \{a \mid (a, b) \in C\}$.

Відповідність C між множинами A та B називається ***всюди визначеною***, якщо образ кожного елемента з множини A непорожній. Відповідність C між множинами A та B називається ***сюр'єктивною***, якщо прообраз кожного елемента з множини B непорожній. Відповідність C між множинами A та B називається ***функціональною***, якщо образ кожного елемента із множини A складається не більш ніж з одного елемента. Функціональну відповідність між множинами A та B називають ***функцією з A в B***. Усюди визначену функціональну відповідність між A та B називають ***відображенням*** з A в B. Відповідність C між множинами A та B називається ***ін'єктивною***, якщо прообраз кожного елемента із множини B містить не більш ніж один елемент. У цих термінах ***бієкція***, або ***взаємна однозначна відповідність***, між множинами A та B – це сюр'єктивне та ін'єктивне відображення з A в B.

У цих термінах:

– розміщення з повтореннями по k елементах елементів n-елементної множини A є відображенням із $\overline{1,k}$ в A;

– розміщення по k елементах елементів n-елементної множини A є ін'єктивним відображенням із $\overline{1,k}$ в A;

– перестановка n-елементної множини A є бієкцією між $\overline{1,n}$ та A.

Для подальших міркувань у нагоді стане **критерій рівності функцій**: дві функції з A в B рівні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові області визначення й на всіх елементах з області визначення набувають однакових значень.

У цьому підрозділі будемо вважати, що множина A складається з n елементів, а множина B – з m елементів, причому $n, m \ge 1$.

Приклад 4.3. Довести, що кількість функцій з A в B дорівнює $(m+1)^n$.

► За критерієм рівності функцій для однозначного задання функції з A в B для кожного елемента множини A достатньо визначити, чи належить він області визначення функції, і якщо належить, то задати на ньому значення функції – вибрати один елемент із множини B. Отже, існує $1+m$ способів задати функцію на цьому елементі. Оскільки функцію необхідно задати на n елементах множини A, то за правилом добутку всю функцію можна вибрати $(m+1)^n$ способами. ◄

Приклад 4.4. Довести, що кількість відображень з A в B дорівнює m^n.

► Аналогічно попередньому прикладу будемо задавати відображення, визначаючи його значення на елементах множини A. Воно всюди визначене, тому для кожного елемента з A достатньо вказати значення функції на ньому, що можна зробити m способами. За правилом добутку маємо m^n відображень. ◄

Приклад 4.5. Довести, що кількість ін'єктивних відображень з A в B дорівнює A_m^n, тобто $m!/(m-n)!$ за умови $m \ge n$ та 0 – за умови $m<n$.

► Ін'єктивність відображення накладає додаткову умову: на різних елементах множини A відображення має набувати різних значень. Зрозуміло, що за умови $m < n$ не існує жодного ін'єктивного відображення з A в B. Подальші міркування будемо вести за умови $m \ge n$.

Зафіксуємо перестановку елементів множини A й будемо послідовно вибирати значення відображення на цих елементах.

Значення на першому елементі можна вибрати m способами, на другому — m-1 способами і т. д., на останньому — m-n-1 способами. Отже, за умови $m \ge n$ кількість ін'єктивних відображень із A у B дорівнює $m!/(m-n)!$.

Поєднуючи отримані результати, маємо: шукана кількість дорівнює $m!/(m-n)!$ за умови $m \ge n$ та 0 – за умови $m < n$ (те саме, що A_m^n). ◄

Приклад 4.6. Довести, що кількість бієкцій між множинами A та B дорівнює $n!$ за умови $m = n$ і 0 – за умови $m \ne n$.

► У прикладі 2.7 було встановлено, що кількість бієкцій між двома n-елементними множинами дорівнює $n!$. З іншого боку, якщо скінченні множини мають різну кількість елементів, то бієкцію між ними встановити не можна. ◄

Приклад 4.7. Скільки існує сюр'єктивних відображень із множини A на множину B?

► Якщо $n < m$, то сюр'єктивних відображень з A на B очевидно не існує. У випадку $n \ge m$ скористаємося формулою включення й виключення.

Уведемо до розгляду такі множини відображень:

Y – множина всіх відображень із A в B, $|Y| = m^n$;

Y_0 – множина сюр'єктивних відображень із A на B;

Y_b, де $b \in B$, – множина відображень з A в $B \backslash \{b\}$, тобто множина відображень з A в B, область значень яких не містить елемента b;

Y_I, де $I \subseteq B$, – множина відображень з A в $B \backslash I$, тобто множина відображень з A в B, область значень яких не містить елементів із множини I.

За побудовою $\bigcup_{b \in B} Y_b$ є множиною всіх несюр'єктивних відображень з A в B, $Y_0 = Y \backslash \bigcup_{b \in B} Y_b$, $Y_I = \bigcap_{i \in I} Y_i$. За наслідком 4.1

$$|Y_0| = |Y \backslash (\bigcup_{b \in B} Y_b)| = |Y| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq B, \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} Y_i| =$$

$$= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq B, \\ |I|=k}} |Y_I|.$$

Оскільки для кожного $k \in \overline{1,n}$ існує точно C_m^k k-елементних множин $I \subseteq \overline{1,m}$, $|I| = k$, і для кожної такої множини I виконується $|Y_I| = (m-k)^n$, то

$$\sum_{\substack{I \subseteq B, \\ |I|=k}} |Y_I| = C_m^k (m-k)^n.$$

Звідси

$$|Y_0| = m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n .$$

Відповідь: $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$, якщо $n \ge m$, інакше – 0. ◄

Зауваження. Нехай $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Розглянемо довільну послідовність $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ таку, що $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ є розбиттям[14] множини A на m непорожніх класів. Задамо відношення f на множинах A та B:

$f = \{(a, b_i) \mid a \in A_i$ для деякого $i \in \overline{1,m}\}$.

Оскільки $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ є розбиттям множини A, то f є відображенням з A в B. З того, що кількість класів указаного розбиття збігається з кількістю елементів множини B і класи непорожні, випливає сюр'єктивність f. Крім того, $f^{-1}(b_i) = A_i$, $i \in \overline{1,m}$. З наведеної побудови випливає існування бієкції між усіма послідовностями $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ такими, що $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ є розбиттям

[14] Множина $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, елементами якої є множини $A_1, A_2, \ldots, A_m$, є розбиттям множини A на m класів, якщо множини $A_1, A_2, \ldots, A_m$ попарно не перетинаються та їх об'єднання дорівнює множині A.

множини A на m непорожніх класів, і усіма сюр'єктивними відображеннями з A на B.

З іншого боку, за довільним розбиттям $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ множини A на m непорожніх класів можна побудувати $m!$ різних послідовностей $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ таких, що $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ є розбиттям множини A на m непорожніх класів. Звідси маємо теорему.

Теорема 4.2. Кількість $T(n, m)$ розбиттів n-елементної множини A на m $(1 \le m \le n)$ непорожніх класів може бути обчислена за формулою

$$T(n, m) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n .$$

Зауважимо, що, виходячи з означення,

$$T(n, m) = 0 \text{ для } m > n;$$
$$T(n, 0) = 0 \text{ для } n > 0;$$
$$T(0, 0) = 1.$$

4.4. Комбінаторика графів

У цьому підрозділі розглянемо графи зі скінченною множиною вершин. Стисло нагадаємо необхідні означення.

Нехай V – непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двоелементних підмножин множини V. Нехай E – довільна підмножина $V^{(2)}$. Пара (V, E) називається ***графом***, елементи множини V – ***вершинами***, або ***вузлами***, а елементи множини E – ***ребрами***. Незважаючи на те, що кожне ребро $e \in E$ є двоелементною множиною $e = \{v, w\}$, у теорії графів його позначають (v, w).

Нехай $G = (V, E)$ – граф, $e = (v, w) \in E$ – ребро. Вершини v та w називаються ***суміжними***; кожна з них є ***інцидентною*** ребру e. Два різних ребра, інцидентних одній і тій самій вершині, називаються ***суміжними***.

Степенем вершини v у графі G називається кількість ребер, інцидентних вершині v (позначається $\delta(v)$). У графі з n вершинами степінь вершини може мати значення від 0 до n-1. Вершина степеня 0 називається ***ізольованою*** (вона не має інцидентних ребер і суміжних вершин), а степеня 1 – ***кінцевою,*** або ***висячою*** (має тільки одне інцидентне ребро).

Приклад 4.8. Скільки існує графів із множиною вершин $V = \overline{1,n}$?

► Кожен такий граф однозначно визначається своїми ребрами. Кожне ребро є двоелементною підмножиною множини вершин. Тому множина ребер є довільною підмножиною C_n^2-елементної множини всіх можливих ребер.

Відповідь: $2^{C_n^2}$.◄

Приклад 4.8. Скільки існує графів із множиною вершин $V = \overline{1,n}$ та m ребрами?

► Аналогічно попередній задачі із C_n^2-елементної множини всіх можливих ребер необхідно вибрати довільну m-елементну множину. Відповідь: $C_{C_n^2}^m$. ◄

Приклад 4.10. Скільки існує графів із множиною вершин $V = \overline{1,n}$ $(n \ge 2)$, жодна з яких не ізольована?

► Для відповіді на це питання скористаємось формулою включення й виключення. Нехай

Y – множина всіх графів, $|Y| = 2^{C_n^2}$,

Y_0 – множина всіх графів без ізольованих вершин,

Y_v, де $v \in \overline{1,n}$, – множина графів, в яких вершина v ізольована,

Y_I, де $I \subseteq \overline{1,n}$ – множина графів, в яких вершини з множини I є ізольованими, $Y_I = \bigcap_{i \in I} Y_i$.

Тоді $Y_0 = Y \setminus \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$. Підрахуємо $|\bigcup_{k=1}^{n} Y_k|$ за формулою включення й виключення:

$$|\bigcup_{k=1}^{n} Y_k| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I \subseteq \overline{1,n},\\ |I|=k}}|\bigcap_{i \in I} Y_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I \subseteq \overline{1,n},\\ |I|=k}}|Y_I| .$$

Оскільки для кожного $k \in \overline{1,n}$ існує точно C_n^k множин I таких, що $I \subseteq V$, $|I| = k$, і для кожної такої множини I виконується $N(Y_I) = 2^{C_{n-k}^2}$, то

$$\sum_{\substack{I \subseteq \overline{1,n}, \\ |I|=k}} |Y_I| = C_n^k 2^{C_{n-k}^2},$$

звідки

$$|\bigcup_{k=1}^{n} Y_k| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k 2^{C_{n-k}^2},$$

$$|Y_0| = |Y \setminus \bigcup_{k=1}^{n} Y_k| = |Y| - |\bigcup_{k=1}^{n} Y_k| = 2^{C_n^2} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k 2^{C_{n-k}^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}.$$

Відповідь: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}$. ◄

Приклад 4.11. Скільки існує графів із множиною вершин $V = \overline{1,n}$ $(n \geq 1)$, рівно m з яких є ізольованими?

► Нехай $\gamma(n)$ – кількість графів із фіксованою n-елементною множиною вершин. Для $n \geq 2$ за попереднім прикладом $\gamma(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}$.

Рівно n-1 або більше n вершин ізольованими у графі бути не можуть. Якщо $n = m$, то, очевидно, існує єдиний такий граф. Розглянемо задачу для випадку $0 \leq m \leq n$-2.

Якщо рівно m $(n \geq m+2)$ вершин графа є ізольованими, то задача зводиться до підрахунку кількості $(n\text{-}m)$-вершинних графів із фіксованою множиною вершин, жодна з яких не є ізольованою. Кількість таких графів дорівнює $C_n^m \cdot \gamma(n\text{-}m)$, оскільки необхідно обрати m ізольованих вершин, а потім на решті побудувати граф без ізольованих вершин.

Відповідь: $C_n^m \cdot \gamma(n\text{-}m)$ при $0 \leq m \leq n$-2, 1 – при $n = m$ та 0 – інакше. ◄

Контрольні запитання

1. В яких випадках застосовується формула включення й виключення?
2. Запишіть формулу включення й виключення для чотирьох множин.
3. Що таке адитивна функція множини?
4. Чи можна поширити формулу включення й виключення на випадок адитивної функції множини? Якщо так, то за яких умов?
5. Що таке формули обертання послідовностей?
6. Наведіть приклад задач, для розв’язання яких можливе використання формул обертання послідовностей.

Задачі

4.1. Нехай $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ – канонічний розклад натурального додатного числа n на прості множники. Довести, що кількість чисел із $\overline{1,n}$, взаємно простих із числом n, дорівнює $n \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i})$.

4.2. Нехай $p_1, p_2, ..., p_r$ – усі прості числа, що не перевищують $\sqrt{n}$, де $n \geq 2$. Знайти кількість простих чисел p таких, що $p \leq n$.

4.3. Знайти кількість простих чисел, менших ніж 225.

4.4. Знайти кількість підстановок n-елементної множини, в яких рівно m елементів відповідають самі собі, $0 \leq m \leq n$.

4.5. n осіб здають свої капелюхи до гардеробу, а потім отримують їх навмання.

а) У скількох випадках жоден не отримає свого капелюха?

б) У скількох випадках точно m осіб отримають власні капелюхи?

в) У скількох випадках хоча б m осіб отримають власні капелюхи?

4.6. Довести, що для $m \geq 1$ виконується рівність $S_m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1} M_k$ (величини S_k, M_k див. у підрозд. 4.2).

4.7. По пустелі ланцюгом іде караван із n верблюдів. Подорож триває багато днів і, нарешті, усім набридає бачити перед собою того самого верблюда. Скількома способами можна переставити верблюдів так, щоб перед кожним верблюдом ішов не той верблюд, що раніш?

4.8. На каруселі по колу розташовано n різних макетів. Скількома способами можна переставити макети так, щоб перед кожним був розташований не той макет, що раніш?

4.9. Скільки існує способів розміщення p пасажирів у n вагонах поїзда, за яких рівно m вагонів виявиться порожніми? Вагони й пасажирів вважати розрізнюваними; місця пасажирів до уваги не брати. Місткість кожного вагона не менша за p.

4.10. Нехай n та m – фіксовані натуральні числа, $|U| = n$. Скільки існує послідовностей $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ підмножин множини U таких, що:

а) $\varnothing \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_m \subset U$;

б) $\varnothing \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_m$;

в) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_m$?

4.11. Довести, що $(-1)^n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k k^n$.

4.12. Скількома способами можна організувати прямі авіарейси між n ($n \geq 2$) населеними пунктами так, щоб у кожному населеному пункті був хоча б один авіарейс? Вважаємо, що кожний авіарейс працює у двох напрямках: прямому й оберненому.

4.13. Скількома способами n ($n \geq 2$) населених пунктів можна з'єднати n-1 прямими авіарейсами так, щоб із кожного населеного пункту можна було дістатися до кожного іншого (можливо з кількома пересадками)? Вважаємо, що кожен авіарейс працює у двох напрямках: прямому й оберненому.

4.14. Довести, що $n(n+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{k-1} (n-k+1)^{n-k}$.

4.15. На іспит було винесено M питань із різними відповідями. При підготовці до іспиту Марійка підготувала письмові відповіді на всі M питань, але за браком часу не вказувала питання, на які відповідала. Екзаменаційний білет складається з m різних питань. В екзаменаційній роботі вона навмання переписала m різних підготованих раніше відповідей. У скількох випадках Марійка правильно відповіла рівно на k питань свого білета?

4.16. Знайти кількість n-місних булевих функцій, жодна змінна яких не є фіктивною[15].

4.17. Скільки існує графів із множиною вершин $V = \overline{1,n}$, що не мають ізольованих і кінцевих вершин?

---

[15] n-місною булевою функцією називають відображення з $\{0, 1\}^n$ у $\{0, 1\}$. Змінна функції називається фіктивною, якщо за будь-яких значень інших змінних її значення не впливає на значення функції. Наприклад, для функції, заданої формулою $f(x, y) = x$, змінна y є фіктивною.

ГЛАВА 5. Метод рекурентних співвідношень

Серед комбінаторних методів важливе місце посідає метод рекурентних співвідношень. Він дуже потужний і використовується не лише в комбінаторних підрахунках, але й для оптимізації обчислень. В останньому випадку в обчисленнях використовуються раніше накопичені знання, що може значно прискорити процес.

Розглянемо метод рекурентних співвідношень у загальних рисах. Іноді розв'язання задачі можна звести до меншої (менш складної) задачі. Тут ми навмисно не будемо уточнювати формальний зміст слова "менша", а лише пояснимо на прикладі. Щоб знайти суму n чисел, можна спочатку знайти суму n-1 числа, а потім додати до неї число, що не ввійшло до суми. Можна навести і складніші приклади. Тут існує і деяка паралель із методом трансфінітної математичної індукції. Уміючи розв'язувати базові задачі та зводити розв'язання складних задач до розв'язання менших (за значенням або кількістю параметрів), можна розв'язати майже довільну задачу.

Метод розв'язання комбінаторної задачі зведенням до меншої задачі (задач) має назву ***метода рекурентних співвідношень***, а менша задача найчастіше є задачею відносно меншої кількості предметів.

5.1. Рекурентні співвідношення й послідовності

У найзагальнішому випадку як рекурентне співвідношення можна розуміти закон (співвідношення), що визначає поточний елемент послідовності через деякі попередні та, можливо, номер поточного елемента[16].

[16] Поняття рекурентного співвідношення можна поширити на довільне відображення з індуктивною областю визначення, див. прикл. 5.6.

Спробуємо дещо уточнити поняття рекурентного співвідношення для послідовностей. Припустимо, що перші k членів послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$ [17] задано явно (тобто ***задано початкові умови***), а для всіх інших задано закон F, який дозволяє за номером елемента та/або деякими попередніми елементами знайти довільний інший, тобто

$a_i = F(i, a_{i-1}, \ldots, a_1, a_0)$ для всіх $i \geq k$.

Останнє співвідношення інколи називають ***рекурентним співвідношенням***. Отже, **кожне рекурентне співвідношення разом із початковими умовами задає точно одну послідовність**, що є його ***розв'язком***.

Зауважимо також, що **форма запису рекурентного співвідношення може бути різна**: головне, щоб воно задавало закон знаходження кожного елемента, що не ввійшов у початкові умови (відповідно в початкових умовах можуть бути задані не тільки перші елементи послідовності), за його номером та елементами з меншими номерами.

Якщо закон F лінійний і використовує тільки номер елемента та k попередніх елементів послідовності, то, слідуючи Муавру, послідовність α називають ***рекурентною***, або ***зворотною***, ***послідовністю***, при цьому k є її ***глибиною***. Кожну рекурентну послідовність $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$ можна задати рекурентним співвідношенням вигляду

$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ldots+p_ka_n = 0$ для всіх $n\in N_0$, причому $p_k \neq 0$,

і початковими умовами – значеннями перших k її членів $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Такі співвідношення ще називають ***лінійними однорідними рекурентними співвідношеннями зі сталими коефіцієнтами*** (ЛОРС).

Приклад 5.1. Рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n+d$, $n\in N_0$, з початковими умовами $a_0 = a$ задає арифметичну прогресію з початковим елементом a та кроком d. Відповідна послідовність є рекурентною.

[17] $N_0 = N\cup\{0\}$ – множина натуральних чисел із нулем.

Приклад 5.2. Рекурентне співвідношення $a_{n+1} = q \cdot a_n$, $n \in N_0$, з початковими умовами $a_0 = a$ задає геометричну прогресію з початковим елементом a та коефіцієнтом q.

Приклад 5.3. Рекурентне співвідношення $S_{n+1} = S_n + f(n+1)$, $n \in N_0$, з початковими умовами $S_0 = 0$, де f – деяке відображення з N у R, задає суму $\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Приклад 5.4. Рекурентне співвідношення $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in N_0$, з початковими умовами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ задає рекурентну послідовність, що має назву ***послідовність Фібоначчі***. Послідовність Фібоначчі має такий початок: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … .

Приклад 5.5. Співвідношення $a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0$, $n \in N_0$, та $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $n \in N$, – теж рекурентні.

Приклад 5.6. Рекурентним можна вважати співвідношення $C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k)$ для $n \geq k \geq 1$ із початковими умовами $C(0, 0) = 1$; $C(n, 0) = 0$, якщо $n \geq 1$; $C(n, k) = 0$, якщо $n < k$. Множиною номерів у даному випадку є множина $N_0 \times N_0$ з порядком $\leq_{(2)}$:

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ та $y_1 \leq y_2$.

Щоб знайти значення $C(6, 3)$, за порядком зростання номерів (n, k) послідовно побудуємо всі значення $C(n, k)$, доки не отримаємо шукане $C(6, 3)$. Для цього, використовуючи початкові умови й рекурентне співвідношення, заповнимо таку таблицю:

$C(n, k)$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	2	3	1
4	0	6	11	6
5	0	24	50	35
6	0	120	274	225

Отже, $C(6, 3) = 225$.

Надалі зустрінуться інші приклади рекурентних співвідношень, а також систем рекурентних співвідношень.

Лінійні однорідні рекурентні співвідношення можна подати в матричному вигляді. Розглянемо лінійне однорідне рекурентне співвідношення

$a_{n+k} = p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n$, $n \in N_0$,

і матрицю $\mathrm{A} = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$, де

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-1} & p_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{n+k} \\ a_{n+k-1} \\ \ldots \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \ldots \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{n+1} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \ldots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Наведене матричне співвідношення дозволяє обчислювати n-й елемент рекурентної послідовності за час $O(\log_2 n)$ (глибину послідовності k вважаємо константою).

5.2. Застосування методу рекурентних співвідношень

Метод рекурентних співвідношень такий само потужний, як і метод математичної індукції, можливо тому, що вони мають однакову природу.

Оскільки кожне рекурентне співвідношення разом із початковими умовами однозначно визначає єдину послідовність, то для знаходження елементів послідовності достатньо вказати для неї рекурентне співвідношення (тобто звести до меншої задачі) і початкові умови. Саме це й відбувається при застосуванні методу рекурентних співвідношень.

Найцікавіше питання таке: як від рекурентного співвідношення перейти до аналітичної відповіді? У деяких випадках знайдене рекурентне співвідношення вдається розв'язати аналітично. Інколи в задачі отримують рекурентне співвідношення й початкові умови, для яких аналітична відповідь була одержана раніше. Оскільки рекурентне співвідношення разом із початковими умовами задають єдину послідовність, то в цьому випадку також маємо відповідь в аналітичній формі. В інших випадках рекурентне співвідношення й початкові умови можна розглядати як **алгоритмічну відповідь**: щоб знайти конкретний елемент послідовності, заданої рекурентним співвідношенням, необхідно за порядком **зростання номерів** послідовно обчислити її елементи, доки не буде отримане шукане значення. Розглянемо приклади.

Приклад 5.7. На скільки частин розбивають площину n прямих, жодні дві з яких не паралельні й жодні три не перетинаються в одній точці?

► Нехай a_n – шукана кількість. Очевидно, що $a_0 = 1$. Розглянемо задачу для n+1 прямої. Вилучимо одну пряму. Тепер маємо n прямих та a_n утворених ними частин. Повернемо вилучену пряму. Вона перетинає n прямих, що розбивають її на n+1 частину, кожна з яких розділяє деяку частину площини. Тому додавання (n+1)-ї прямої додає n+1 частину. Звідси

$a_{n+1} = a_n+(n+1) = (n+1)+n+\ldots+3+2+1+a_0 = (n+1)(n+2)/2+1$, або

$a_n = n\cdot(n+1)/2+1$ для $n\geq 1$.

Оскільки $0(0+1)/2+1 = 1$, то вказана формула виконується для $n = 0$.

Відповідь: $n\cdot(n+1)/2+1$. ◄

У розглянутому прикладі спочатку було побудоване рекурентне співвідношення, за яким далі вдалося знайти аналітичну відповідь.

Приклад 5.8. Знайти кількість цілих невід'ємних чисел, що менші за 10^{10}, і сума цифр яких дорівнює 33.

► Розглянемо десяткове зображення $(a_9a_8\ldots a_1a_0)_{10}$ такого числа: деякі з його старших розрядів можуть бути нульовими, оскільки наше число не більш ніж 10-значне. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між шуканими числами й розв'язками в цілих невід'ємних числах рівняння $a_9+a_8+\ldots+a_1+a_0 = 33$, де $0 \leq a_i \leq 9$, $i\in\overline{0,9}$.

Ця задача належить до тих, що простіше розв'язувати в загальному вигляді, ніж із конкретними числовими значеннями. Отже, узагальнимо її. Для $n\geq 1$ через $F(n, m)$ позначимо кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах рівняння $a_1+a_2+\ldots+a_n = m$, де $0 \leq a_i \leq 9$, $i\in\overline{1,n}$. Тоді нам необхідно знайти величину $F(10, 33)$. Знайдемо для $F(n, m)$ рекурентне співвідношення[18] та початкові умови. Цифра a_n може набувати одного зі значень 0, 1, …, 9, тому при $n \geq 2$

$$F(n, m) = \sum_{k=0}^{t} F(n-1, m-k), \text{ де } t = \min\{m, 9\}.$$

Початкові умови:

$F(1, m) = 1$, якщо $m \leq 9$;

$F(1, m) = 0$, якщо $m > 9$.

Тепер, аналогічно пошуку значення $C(6, 3)$ у прикладі 5.6, побудуємо табличку значень $F(n, m)$ для n від 1 до 33 та m від 0 до 10, з якої отримаємо відповідь.

Відповідь: 187 761 310. ◄

Зауважимо, що в наведеному прикладі для $F(n, m)$ можна знайти аналітичну формулу (див. прикл. 6.27), яка забезпечує ефективніший спосіб підрахунку. Однак отримане рекурентне співвідношення також дозволяє достатньо ефективно (порівняно з перебором усіх натуральних чисел від 1 до 10^9-1) обчислити довільний елемент послідовності: для цього достатньо обчислити перші 33 рядки таблиці, тобто всього 363 значення, що значно менше за 10^9-1.

Приклад 5.9. Знайти формулу для обчислення суми $S_m(n)$, де

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m.$$

► Спробуємо знайти рекурентне співвідношення для послідовності сум $S_0(n)$, $S_1(n)$, …, $S_m(n)$, …. Зауважимо, що $S_0(n)$ є су-

---

[18] У даному випадку рекурентне співвідношення будується для відображення F із $N\times N_0$ у N_0.

мою n одиниць, тому $S_0(n) = n$. З використанням бінома Ньютона запишемо n рівностей і підсумуємо їх ліві та праві частини відповідно.

$$(1+1)^{m+1}–1^{m+1} = C_{m+1}^{m}\cdot 1^m + C_{m+1}^{m-1}\cdot 1^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{0}\cdot 1^0$$

$$(2+1)^{m+1}–2^{m+1} = C_{m+1}^{m}\cdot 2^m + C_{m+1}^{m-1}\cdot 2^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{0}\cdot 2^0$$

$$\ldots$$

$$(i+1)^{m+1}–i^{m+1} = C_{m+1}^{m}\cdot i^m + C_{m+1}^{m-1}\cdot i^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{0}\cdot i^0$$

$$\ldots$$

$$(n+1)^{m+1}–n^{m+1} = C_{m+1}^{m}\cdot n^m + C_{m+1}^{m-1}\cdot n^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{0}\cdot n^0$$

При підсумовуванні лівих частин перший аргумент рядка скорочується із другим аргументом наступного рядка; праві частини підсумуємо в стовпчик, виносячи однакові біномні коефіцієнти за дужки й відразу записуючи відповідні суми з послідовності. Отримаємо

$$(n+1)^{m+1}–1^{m+1} = C_{m+1}^{m}\cdot S_m(n)+ C_{m+1}^{m-1}\cdot S_{m-1}(n)+\ldots+ C_{m+1}^{0}\cdot S_0(n).$$

Оскільки $C_{m+1}^{m} = C_{m+1}^{1} = m+1$, то

$$(n+1)^{m+1}–1 = (m+1)\cdot S_m(n)+ \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^{k} S_k(n) .$$

Відповідь: $S_0(n) = n,\ S_m(n) = ((n+1)^{m+1}–1- \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^{k} S_k(n))/(m+1)$ для $m \geq 1$. ◄

У цьому прикладі у вигляді рекурентного співвідношення й початкових умов фактично було отримано алгоритм знаходження необхідної формули, за яким уже неважко побудувати аналітичну формулу для довільного конкретного значення m. Наприклад, за $m = 2$ отримаємо формулу обчислення суми квадратів перших n натуральних чисел:

$S_0(n) = n$;

$S_1(n) = ((n+1)^2–1-n)/2 = n(n+1)/2$;

$S_2(n) = ((n+1)^3–1–n– 3n(n+1)/2)/3 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Ще один цікавий нюанс наведеного прикладу: рекурентне співвідношення було побудуване для послідовності функцій $S_m(n)$, $m\in N_0$. Отже, рекурентні співвідношення можуть зв'язувати не лише числові послідовності.

Раніше нам уже зустрічалися слова Діка (див. підрозд. 3.3.7). Кількість слів Діка, що мають довжину $2n$, є числом Каталана C_n, для якого в прикл. 3.19 було знайдено аналітичний вираз. Тепер побудуємо рекурентне співвідношення.

Приклад 5.10. Знайти рекурентне співвідношення для кількості слів Діка, що мають довжину $2n$.

► Зрозуміло, що існує єдине слово Діка нульової довжини – порожнє. Тому отримуємо початкову умову $C_0 = 1$. Тепер знайдемо рекурентне співвідношення.

Нехай $w = a_1a_2\ldots a_{2n}$ – довільне слово Діка. Нехай $v = a_1a_2\ldots a_{2k}$, де $k\in \overline{1,n}$, – найкоротший непорожній префікс слова w, що також є словом Діка. Тоді з необхідністю $a_1 = x$ та $a_{2k} = y$, причому слова $a_2\ldots a_{2k-1}$ та $a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots a_{2n}$ також є словами Діка. Перше з них має довжину $2(k-1)$, а друге – $2(n-k)$. Звідси маємо рекурентне співвідношення

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k} = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0,\ n\in N.$$

Відповідь: $C_0 = 1$, $C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0$, $n\in N$. ◄

Приклад 5.11. Скількома способами у виразі $c_0\cdot c_1\cdot\ldots\cdot c_n$ можна розставити дужки, щоб однозначно задати результат його обчислення?

► Нехай a_n – шукана кількість. Очевидно, що $a_0 = 1$. Розглянемо задачу розставляння дужок для $n+1$ знака операції. Кожну з $n+1$ операцій можна обчислювати останньою. Нехай останньою обчислюємо k-ту операцію ($1 \leq k \leq n+1$), тоді існує $a_{k-1}\cdot a_{n+1-k}$ варіантів обчислень, оскільки ліворуч необхідно розставити дужки для $k–1$ операції, а праворуч – для $n+1–k$ операцій. Підсумовуючи за всіма можливими значеннями k, отримуємо рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_na_0$, що разом із початковими умовами можна переписати у вигляді

$a_n = a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+\ldots+a_{n-1}a_0$, $n\in N$, $a_0 = 1$.

Це співвідношення й початкові умови ті самі, що й для чисел Каталана. З урахуванням того, що рекурентне співвідношення разом із початковими умовами однозначно визначає послідовність, доходимо висновку, що $a_n = C_n$ для всіх $n \in N_0$. Ураховуючи формулу для числа Каталана, отриману в прикл. 3.19, маємо відповідь.

Відповідь: $C_n = C_{2n}^{n}/(n+1)$. ◄

Приклад 5.12. Знайти рекурентне співвідношення й початкові умови для $C(n, k)$ – кількості підстановок n-елементної множини, що мають рівно k циклів. (Якщо для підстановки φ $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(a_2) = a_3$, …, $\varphi(a_k) = a_1$, то кажуть, що елементи a_1, a_2, …, a_k утворюють цикл перестановки. Різними вважають цикли, що складаються з різних елементів.)

► Без обмеження загальності можна розглядати підстановки множини $\overline{1,n}$. Зрозуміло, що $C(0, 0) = 1$. За принципом Дірихле серед елементів послідовності 1, $\varphi(1)$, $\varphi(\varphi(1))$, … є однакові, тому підстановка непорожньої множини завжди має хоча б один цикл. Звідси $C(n, 0) = 0$, якщо $n \ge 1$. Цикли підстановки не мають спільних елементів, тому їх не більше ніж елементів, звідки $C(n, k) = 0$, якщо $n < k$.

За умови $n \ge k \ge 1$ рівно у $C(n\text{-}1, k\text{-}1)$ підстановках число n складає 1-цикл (відповідає само собі) і рівно у $(n\text{-}1)C(n\text{-}1, k)$ підстановках входить до складу більшого циклу. Маємо рекурентне співвідношення

$C(n, k) = C(n\text{-}1, k\text{-}1)+(n\text{-}1)C(n\text{-}1, k)$.

Відповідь: $C(n, k) = C(n\text{-}1, k\text{-}1)+(n\text{-}1)C(n\text{-}1, k)$, якщо $n \ge k \ge 1$; $C(0, 0) = 1$; $C(n, 0) = 0$, якщо $n \ge 1$; $C(n, k) = 0$, якщо $n < k$. ◄

Приклад 5.13. Знайти рекурентне співвідношення й початкові умови для $T(n, k)$ – кількості розбиттів n-елементної множини на k непорожніх підмножин.

► Без обмеження загальності можна розглядати розбиття множини $\overline{1,n}$. Зрозуміло, що $T(0, 0) = 1$, $T(n, 0) = 0$, $T(n, 1) = 1$, $n \ge 1$, $T(n, k) = 0$, $n < k$.

За умови $n \ge k \ge 2$ рівно в $T(n\text{-}1, k\text{-}1)$ розбиттях число n утворює одноелементну підмножину й рівно в $k \cdot T(n\text{-}1, k)$ розбиттях входить до складу більшої підмножини. Маємо рекурентне співвідношення

$T(n, k) = T(n\text{-}1, k\text{-}1)+k \cdot T(n\text{-}1, k)$.

Відповідь: $T(n, k) = T(n\text{-}1, k\text{-}1)+k \cdot T(n\text{-}1, k)$, якщо $n \ge k \ge 2$; $T(0, 0) = 1$; $T(n, 0) = 0$, $T(n, 1) = 1$, якщо $n \ge 1$; $T(n, k) = 0$, якщо $n < k$. ◄

Приклад 5.14. Знайти рекурентне співвідношення й початкові умови для $B(n)$ – кількості розбиттів n-елементної множини на непорожні класи.

► Без обмеження загальності можна розглядати розбиття множини $\overline{1,n}$. Очевидно, що $B(0) = 1$. У випадку $n \ge 1$ кількість розбиттів множини $\overline{1,n}$ на непорожні класи складається з кількості розбиттів, в яких число n утворює клас разом із k ($k \in \overline{1,n-1}$) іншими елементами. Ці k елементів можна обрати C_{n-1}^{k} способами, після чого решту – $(n\text{-}1\text{-}k)$ елементів – необхідно розбити на непорожні підмножини, а для цього є $B(n\text{-}1\text{-}k)$ способів. Маємо рекурентне співвідношення

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B(n-1-k) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-1-k} B(n-1-k) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B(k).$$

Відповідь: $B(0) = 1$, $B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B(k)$, $n \in N$. ◄

Контрольні запитання

1. Чи є співвідношення $a_{2n} = a_{3n} + a_n$ рекурентним?
2. Чи є співвідношення $(a_{2n})^2 = a_n$ рекурентним?
3. Які співвідношення називаються рекурентними?
4. Чи можна за допомогою рекурентного співвідношення задати функцію, що залежить від кількох аргументів? Якщо так, то наведіть приклад.
5. Наведіть приклад задачі з програмування, в якій застосування рекурентних співвідношень дозволяє пришвидшити процес обчислень.
6. Наведіть рекурентне співвідношення й початкові умови для послідовності Фібоначчі.
7. Знайдіть значення числа Фібоначчі F_{10}.

8. Наведіть рекурентне співвідношення й початкові умови для послідовності чисел Каталана.

Задачі

5.1. Знайти кількість цілих невід'ємних чисел, менших за 10^{11}, сума цифр яких дорівнює 44.

5.2. Знайти аналітичну формулу для обчислення суми $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

5.3. В опуклому n-кутнику проведено всі діагоналі. Виявилось, що жодні три діагоналі не перетинаються в одній точці. На скільки частин вони розбивають n-кутник?

5.4. Знайти кількість двійкових векторів, що мають довжину n та:

а) серед сусідніх координат яких немає двох одиниць поспіль;

б) серед сусідніх координат яких немає трьох одиниць поспіль.

5.5. На колі розташовано n точок. Скількома способами їх можна розфарбувати в білий і чорний кольори так, щоб жодні дві білі точки не були сусідніми?

5.6. На колі розташовано n, $n \geq 3$, точок. Скількома способами їх можна розфарбувати в m, $m \geq 2$, кольорів так, щоб сусідні точки мали різний колір? Використання всіх m кольорів не обов'язкове.

5.7. На колі розташовано $2n$ точок. Скількома способами можна попарно сполучити ці точки хордами так, щоб жодні дві хорди не мали спільних точок?

5.8. Скількома способами опуклий n-кутник ($n \geq 3$) можна розбити на трикутники діагоналями, жодні дві з яких не перетинаються всередині n-кутника?

5.9. Скількома способами на трикутній шаховій дошці зі стороною q можна розставити k тур, щоб жодна тура не била іншу?

5.10. Знайти значення суми $\sum_{k=0}^{m} C_{n-k+1}^{k}$, де $m = [(n+1)/2]$.

ГЛАВА 6. Твірні функції

Ще один потужний засіб комбінаторики – твірні функції[19], що фактично кодують числові послідовності. Наприклад, поліном $5x^4+5x^3+4x^2+x-1$ кодує скінченну послідовність (–1, 1, 4, 5, 5). Цей принцип можна поширити й на нескінченні послідовності, отримуючи при цьому твірну функцію послідовності. Важливо, що знаючи твірну функцію послідовності, можна знайти кожен її елемент.

Інколи набагато простіше аналітично знайти твірну функцію послідовності, а потім за твірною – саму послідовність, ніж безпосередньо аналітичний вираз для її елементів. Такий підхід становить загальну концепцію методу твірних функцій.

Поняття твірної функції вимагає знання елементарних відомостей із теорії степеневих рядів. Якщо існує скінченна границя $a = \lim\limits_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n$, то числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ називається ***збіжним***, а число a – його сумою: $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Функціональний ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ називається збіжним у точці x_0, якщо збіжним є відповідний числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$. Якщо $f_n(x) = a_n x^n$ для всіх $n\in N_0$, то такий функціональний ряд називають ***степеневим***.

6.1. Твірні функції числових послідовностей

Нехай задано послідовність $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$. Послідовності α поставимо у відповідність степеневий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ і розглянемо його суму за припущення[20], що в непорожньому інтервалі $(-R; R)$ цей **ряд – збіжний**. З математичного аналізу відомо, що на відрізку $[a; b]$, де $[a; b]\subset(-R; R)$, цей ряд буде рівномірно збіжним, отже, неперервно диференційовним; крім того, в області рівномірної збіжності такі ряди можна додавати, диференціювати та інтегрувати почленно.

За умови збіжності ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ функцію $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ будемо називати ***твірною функцією***, або просто ***твірною***, послідовності α. Ця назва походить із того факту, що твірна функція дозволяє відновлювати послідовність. Має місце така теорема.

Теорема 6.1. Якщо функція $f(x)$ є твірною функцією послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, то $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ для всіх $n\in N_0$.

Зрозуміло, що **твірна функція існує не для всіх числових послідовностей** α, оскільки збіжність степеневого ряду накладає умову $a_n x^n \to 0$ за умови $n\to\infty$. Інакше кажучи, у нашому випадку послідовність α не може зростати швидше степеневої функції. Послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$, задана рекурентним співвідношенням $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $n\in N_0$, з початковими умовами $a_0 = 1$, не має твірної.

Приклад 6.1. Деякі послідовності та їх твірні функції

Послідовність	Твірна функція
$a_n = 1,\ n\in N_0$	$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$
$a_n = 1,\ n\in \overline{0,m}$, $a_n = 0,\ n > m$	$f(x) = \sum_{n=0}^{m} x^n = (1-x^{m+1})/(1-x)$

---

[19] Інколи твірну функцію називають генератрисою.

[20] Згідно з [7] та [11] вважатимемо твірну функцію не формальним степеневим рядом, а дійсною функцією. Зауважимо, що в практичних задачах найчастіше зустрічаються саме дійсні функції, а не формальні степеневі ряди.

$a_n = C_m^n$, $n \in N_0$	$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_m^n x^n = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n = (1+x)^m$
$a_n = 1/n!$, $n \in N_0$	$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

6.2. Операції над послідовностями та твірними функціями

Щоб отримати твірні функції деяких інших послідовностей, уведемо операції над послідовностями й розглянемо їх із погляду перетворення твірних.

Результатом множення послідовності $(a_n)_{n \in N_0}$ на константу d є послідовність $(d \cdot a_n)_{n \in N_0}$. Послідовність $(a_n + b_n)_{n \in N_0}$ є ***сумою послідовностей*** $(a_n)_{n \in N_0}$ та $(b_n)_{n \in N_0}$. Суму послідовностей α та β інколи позначають α+β. ***Згорткою***, або ***композицією***, ***послідовностей*** $(a_n)_{n \in N_0}$ та $(b_n)_{n \in N_0}$ є послідовність $(c_n)_{n \in N_0}$, де $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Згортку послідовностей α та β інколи позначають α·β. Послідовність $(a_n \cdot b_n)_{n \in N_0}$ є результатом почленного множення послідовностей $(a_n)_{n \in N_0}$ та $(b_n)_{n \in N_0}$. Також можна розглядати зсуви індексації послідовності.

Теорема 6.2. Послідовність $\gamma = (c_n)_{n \in N_0}$, що є результатом множення послідовності $(a_n)_{n \in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ на константу d, має твірну функцію $h(x) = d \cdot f(x)$.

► $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d \cdot a_n x^n = d \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = d \cdot f(x)$. ◄

Теорема 6.3 про суму послідовностей. Послідовність $(c_n)_{n \in N_0}$, що є сумою послідовностей $(a_n)_{n \in N_0}$ та $(b_n)_{n \in N_0}$ із твірними функціями $f(x)$ та $g(x)$, відповідно, має твірну функцію $h(x) = f(x)+g(x)$, або

Твірна суми послідовностей дорівнює сумі твірних.

► $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n =$
$= f(x)+g(x)$. ◄

Теорема 6.4 про згортку послідовностей. Послідовність $(c_n)_{n \in N_0}$, що є згорткою послідовностей $(a_n)_{n \in N_0}$ та $(b_n)_{n \in N_0}$ із твірними функціями $f(x)$ та $g(x)$, відповідно, має твірну функцію $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, або

Твірна згортки послідовностей дорівнює добутку твірних.

► Почнемо доведення з множення степеневих рядів, розкриємо дужки та зведемо подібні. У результаті отримаємо ланцюжок

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = h(x). \blacktriangleleft$$

Розглянемо ще кілька прикладів знаходження твірних функцій при перетвореннях послідовності.

Приклад 6.2. Знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності $(c_n)_{n \in N_0}$, що є результатом почленного множення послідовності $(a_n)_{n \in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ на послідовність $(d^n)_{n \in N_0}$.

► $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (d \cdot x)^n = f(d \cdot x)$. ◄

Приклад 6.3. Знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності $(c_n)_{n \in N_0}$, утвореної з послідовності $(a_n)_{n \in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ за законом $c_n = a_{n+1}$, $n \in N_0$.

► $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n = x^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n =$

$= x^{-1}((\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) - a_0) = x^{-1}(f(x) - a_0) = (f(x) - a_0)/x$. ◄

Приклад 6.4. Знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності $(c_n)_{n\in N_0}$, утвореної з послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ за законом $c_0 = 0$, $c_n = a_{n-1}$ при $n \geq 1$.

► $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x \cdot f(x)$. ◄

Приклад 6.5. Знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності $(c_n)_{n\in N_0}$, що є результатом почленного множення послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ на послідовність $(n)_{n\in N_0}$.

$$► h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (n x^{n-1}) =$$

$$= x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x^n)' = x(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n)' = x \cdot (f(x) - a_0)' = x \cdot f'(x).\ ◄$$

Приклад 6.6. Знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності $(c_n)_{n\in N_0}$, утвореної з послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$ із твірною функцією $f(x)$ за законом $c_0 = 0$, $c_n = \frac{a_n}{n}$ для $n \geq 1$.

$$► h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (\int_0^x t^{n-1} dt) =$$

$$= \int_0^x (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^{n-1}) dt = \int_0^x t^{-1} (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n) dt = \int_0^x t^{-1} (f(t) - a_0) dt =$$

$$= \int_0^x \frac{f(t) - a_0}{t} dt.\ ◄$$

Побудуємо зведену таблицю отриманих результатів, в якій $f(x)$ та $g(x)$ – твірні функції послідовностей $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$ та $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$, відповідно.

Послідовність	Твірна функція
$c_n = d \cdot a_n$, $n\in N_0$	$h(x) = d \cdot f(x)$
$c_n = a_n + b_n$, $n\in N_0$	$h(x) = f(x) + g(x)$
$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n\in N_0$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
$c_n = d^n \cdot a_n$, $n\in N_0$	$h(x) = f(d \cdot x)$
$c_n = a_{n+1}$, $n\in N_0$	$h(x) = (f(x) - a_0)/x$
$c_0 = 0$, $c_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$	$h(x) = x \cdot f(x)$
$c_n = n \cdot a_n$, $n\in N_0$	$h(x) = x \cdot f'(x)$
$c_0 = 0$, $c_n = a_n/n$, $n \geq 1$	$h(x) = \int_0^x \frac{f(t) - a_0}{t} dt$

Наведені перетворення послідовностей дозволяють із твірних функцій простіших за структурою послідовностей будувати твірні функції складніших послідовностей. Розглянемо два приклади.

Приклад 6.7. За твірною функцією $f(x)$ послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$ знайти твірну функцію $f_m(x)$ послідовності $(n^m a_n)_{n\in N_0}$.

► Дамо відповідь у вигляді рекурентного співвідношення для твірних. За умовою $f_0(x) = f(x)$. Оскільки послідовність $(n^{m+1} a_n)_{n\in N_0}$ можна подати у вигляді $(n \cdot (n^m a_n))_{n\in N_0}$, то за раніше доведеним $f_{m+1}(x) = x\, f'_m(x)$.

Відповідь: $f_0(x) = f(x)$, $f_{m+1}(x) = x\, f'_m(x)$, $m\in N_0$. ◄

Приклад 6.8. За твірною функцією $f(x)$ послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$ знайти твірну функцію $g(x)$ послідовності $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$, де $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ для всіх $n\in N_0$.

► Розглянемо послідовність $\gamma = (c_n)_{n\in N_0}$, де $c_n = 1$ для всіх $n\in N_0$. Тоді послідовність β є згорткою послідовностей α та γ. Оскільки функція $1/(1-x)$ є твірною послідовності γ, то за теоремою про згортку послідовностей одразу маємо відповідь.

Відповідь: $f(x)/(1-x)$. ◄

Тепер, беручи за основу раніше побудовані твірні функції найпростіших послідовностей і використовуючи правила перетворення твірних, побудуємо твірні деяких інших послідовностей.

Приклад 6.9. Знайти твірну функцію послідовності $(c^n)_{n\in N_0}$.

► Дана послідовність утворюється з послідовності $(1)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $1/(1\text{-}x)$, почленним множенням на послідовність $(c^n)_{n\in N_0}$.

Відповідь: $1/(1\text{-}cx)$. ◄

Приклад 6.10. Знайти твірну функцію послідовності $(n)_{n\in N_0}$.

► Дана послідовність утворюється з послідовності $(1)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $1/(1\text{-}x)$, почленним множенням на послідовність $(n)_{n\in N_0}$. Оскільки $x\cdot(1/(1\text{-}x))' = x/(1\text{-}x)^2$, то маємо відповідь.

Відповідь: $x/(1\text{-}x)^2$. ◄

Приклад 6.11. Знайти твірну функцію послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, де $a_0 = 0$ та $a_n = 1/n$ для $n>0$.

► $f(x) = 1/(1\text{-}x)$ є твірною функцією послідовності $(1)_{n\in N_0}$. Аналогічно попереднім прикладам застосуємо відповідне правило, щоб знайти твірну функцію $h(x)$ послідовності α.

$$h(x) = \int_0^x \frac{f(t)-1}{t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \text{-}\ln(1\text{-}x).$$

Відповідь: $\text{-}\ln(1\text{-}x)$. ◄

6.3. Знаходження послідовностей за твірними функціями

Раніше зазначалось, що твірна функція дозволяє однозначно відновлювати послідовність: якщо функція $f(x)$ є твірною послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, то $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ для всіх $n\in N_0$. Отже, знаходження послідовності за твірною функцією зводиться до знаходження n-ї похідної твірної в точці $x = 0$. З іншого боку, за властивостями степеневих рядів n-та похідна функції $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ у точці $x = 0$ дорівнює $n!\cdot b_n$. Звідси маємо ще одне правило відновлення послідовності за твірною функцією.

Теорема 6.5. Якщо функція $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ є твірною для послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, то $a_n = b_n$ для всіх $n\in N_0$.

Це правило використовується, коли ми подаємо твірну функцію у вигляді добутку степеневих рядів, множимо їх і зводимо подібні.

Обидва підходи проілюструємо прикладами.

Приклад 6.12. Знайти формулу загального члена послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $f(x) = 1/(1\text{-}x)^m$, $m \ge 1$.

► $f^{(n)}(x) = m\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+(n-1))(1\text{-}x)^{-(m+n)} =$

$$= \frac{(m+(n-1))!}{(m-1)!}(1\text{-}x)^{-(m+n)},$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(m+(n-1))!}{n!(m-1)!} = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Відповідь: $a_n = C_{n+m-1}^{m-1}$. ◄

Приклад 6.13. Знайти формулу загального члена послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $f(x) = x^m/(1–x)^{m+1}$.

► Оскільки за попереднім прикладом функція $1/(1–x)^{m+1}$ є твірною для послідовності $(C_{n+m}^m)_{n\in N_0}$, то має місце розклад

$$f(x) = x^m/(1–x)^{m+1} = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+m}^m x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+m}^m x^{n+m} = \sum_{n=m}^{+\infty} C_n^m x^n,$$

оскільки $C_n^m = 0$ за умови $m > n$ та $\sum\limits_{n=0}^{m-1} C_n^m x^n = 0$.

Відповідь: $a_n = C_n^m$. ◄

Приклад 6.14. Знайти формулу загального члена послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $f(x) = (1+x)^m$.

► За формулою бінома Ньютона $f(x) = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_m^n x^n$,

оскільки $C_n^m = 0$ за умови $m > n$.

Відповідь: $a_n = C_n^m$. ◄

Приклад 6.15. Знайти формулу загального члена послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

► Спочатку знайдемо n-ту ($n \ge 1$) похідну функції $g(x) = \sqrt{1-4x}$ і розкладемо $g(x)$ у степеневий ряд:

$$g^{(n)}(x) = (-4)^n \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(1-4x)^{-n-1/2} =$$

$$= -2^n\cdot(2n-3)!!(1-4x)^{(-n-1/2)},$$

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{2^n(2n-3)!!}{n!},\ n \ge 1,\ g(0) = 1,$$

отже,

$$g(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(2n-3)!!}{n!} x^n.$$

Звідси

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n+1} x^n.$$

Відповідь: $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$. ◄

Оскільки для числа Каталана C_n справджується рівність $C_n = \dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$, то функція $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ є твірною для послідовності чисел Каталана.

6.4. Числа Стірлінга першого і другого роду

Спочатку введемо дві дуже корисні функції: ***спадний факторіальний степінь*** $[x]_n$ і ***зростаючий факторіальний степінь***[21] $[x]^n$, що визначаються формулами:

$[x]_n = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(n-1)),\ n\in N,\ [x]_0=1,$

$[x]^n = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)),\ n\in N,\ [x]^0=1.$

Мають місце такі співвідношення:

$[n]_m = A_n^m$,

$[x]_m = [x-m+1]^m$.

Спадний факторіальний степінь $[x]_n$ можна розглядати як твірну функцію послідовності $(s(n,k))_{k\in N_0}$, елементи якої називаються ***числами Стірлінга першого роду***. Інакше кажучи, число Стірлінга першого роду $s(n, k)$ визначається як коефіцієнт при x^k у поліномі $[x]_n$. За означенням

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k,$$

$s(0, 0) = 1$; $s(n, 0) = 0$ для $n \ge 1$; $s(n, k) = 0$ для $k > n$.

Оскільки $[x]^n = (-1)^n[-x]_n$, то

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k)x^k.$$

Сім'я $\{[x]_n\}_{n\in N_0}$ спадних факторіальних степенів становить лінійно незалежну систему функцій. Тому довільну функцію x^n можна однозначно подати у вигляді $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}[x]_k$.

Число Стірлінга другого роду $S(n, k)$ визначається як коефіцієнт при $[x]_k$ у розкладі x^n за спадними факторіальними степенями. Отже, за означенням

[21] Інколи замість позначень $[x]_n$ та $[x]^n$ використовують пару позначень $(x)_n$ та $[x]_n$, відповідно.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k \ ,$$

$S(0, 0) = 1$; $S(n, 0) = 0$, $n \geq 1$; $S(n, k) = 0$, $k > n$.

Лема 6.1. Числа Стірлінга першого роду є розв'язком рекурентного співвідношення

$s(n, k) = s(n\text{-}1, k\text{-}1)\text{-}(n\text{-}1)s(n\text{-}1, k)$ для $n \geq k \geq 1$

з початковими умовами

$s(0, 0) = 1$; $s(n, 0) = 0$ для $n \geq 1$ та $s(n, k) = 0$ для $k>n$.

► Справедливість початкових умов випливає з означення. Щоб довести рекурентне співвідношення для $n \geq k \geq 1$, розглянемо співвідношення $[x]_n = [x]_{n\text{-}1}(x\text{-}(n\text{-}1))$. З означення маємо

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x-(n-1))s(n-1,k)x^k =$$

$$= s(n,\ 0) + \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)s(n-1,k)x^k \overset{(s(n\text{-}1,\ n)\ =\ 0)}{=}$$

$$= s(n,\ 0) + \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)x^k - \sum_{k=1}^{n} (n-1)s(n-1,k)x^k =$$

$$= s(n,\ 0) + \sum_{k=1}^{n} (s(n-1,k-1)-(n-1)s(n-1,k))x^k \ .$$

Звідси для $n \geq k \geq 1$ маємо співвідношення

$s(n, k) = s(n\text{-}1, k\text{-}1)\text{-}(n\text{-}1)s(n\text{-}1, k)$. ◄

Теорема 6.6 про комбінаторний зміст чисел Стірлінга першого роду. Число Стірлінга першого роду $s(n, k)$ за абсолютною величиною дорівнює кількості підстановок n-елементної множини, що мають рівно k циклів, і

$C(n, k) = (\text{-}1)^{n+k}s(n, k)$.

► Для $C(n, k)$ – кількості підстановок n-елементної множини, що мають рівно k циклів, у прикл. 5.12 було отримано рекурентне співвідношення

$C(n, k) = C(n\text{-}1, k\text{-}1)+(n\text{-}1)C(n\text{-}1, k)$ для $n \geq k \geq 1$

з початковими умовами

$C(0, 0) = 1$; $C(n, 0) = 0$ для $n \geq 1$; $C(n, k) = 0$ для $n < k$.

Нехай $X(n, k) = (-1)^{n+k}s(n, k)$. Тоді для $n \geq k \geq 1$

$X(n, k) = (-1)^{n+k}s(n, k) = (-1)^{n+k}s(n\text{-}1, k\text{-}1)\text{-}(-1)^{n+k}(n\text{-}1)s(n\text{-}1, k) =$

$= (-1)^{(n\text{-}1)+(k\text{-}1)}s(n\text{-}1, k\text{-}1)+(-1)^{(n\text{-}1)+k}(n\text{-}1)s(n\text{-}1, k) =$

$= X(n\text{-}1, k\text{-}1)+(n\text{-}1)X(n\text{-}1, k)$,

крім того,

$X(0, 0) = 1$, $X(n, 0) = 0$ для $n \geq 1$ та $X(n, k) = 0$ для $k > n$.

Оскільки рекурентні співвідношення й початкові умови для $C(n, k)$ та $X(n, k)$ рівні, то $C(n, k) = X(n, k)$ за всіх $n, k \in N_0$. Звідси $C(n, k) = (\text{-}1)^{n+k}s(n, k)$. Теорему доведено. ◄

Лема 6.2. Числа Стірлінга другого роду є розв'язком рекурентного співвідношення

$S(n, k) = S(n\text{-}1, k\text{-}1)+k{\cdot}S(n\text{-}1, k)$ для $n \geq k \geq 1$

з початковими умовами

$S(0, 0) = 1$, $S(n, 0) = 0$ для $n \geq 1$ та $S(n, k) = 0$ для $k > n$.

► Справедливість початкових умов випливає з означення. Для $n \geq k \geq 1$ доведемо рекурентне співвідношення, розглянувши співвідношення $x^n = x^{n\text{-}1}x$. З означення маємо

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)[x]_k\, x \ .$$

$[x]_k{\cdot}x = [x]_{k+1}+k[x]_k$, оскільки $[x]_{k+1} = (x\text{-}k)[x]_k = x[x]_k\text{-}k[x]_k$. Тому

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)([x]_{k+1} + k[x]_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)[x]_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} kS(n-1,k)[x]_k \overset{(S(n\text{-}1,\ n)\ =\ 0)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k-1)[x]_k + \sum_{k=1}^{n} kS(n-1,k)[x]_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (S(n-1,k-1) + kS(n-1,k))[x]_k \ .$$

Звідси для $n \geq k \geq 1$ маємо співвідношення

$S(n, k) = S(n\text{-}1, k\text{-}1)+k{\cdot}S(n\text{-}1, k)$. ◄

Теорема 6.7 про комбінаторний зміст чисел Стірлінга другого роду. Число Стірлінга другого роду $S(n, k)$ дорівнює кількості $T(n, k)$ розбиттів n-елементної множини на k непорожніх підмножин.

► Доведення теореми випливає з того, що рекурентні співвідношення й початкові умови для $S(n, k)$ і кількості $T(n, k)$ розбиттів n-елементної множини на k непорожніх підмножин (див. прикл. 5.13) рівні. ◄

При підрахунку кількості сюр'єктивних відображень у гл. 4 було доведено, що $T(n, k) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$ для $n \geq k \geq 1$. Ураховуючи рівність $S(n, k) = T(n, k)$, маємо формулу для обчислення чисел Стірлінга другого роду.

$$S(n, k) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n \text{ для } n \geq k \geq 1.$$

З використанням чисел Стірлінга другого роду кількість сюр'єктивних відображень із n-елементної на k-елементну множину дорівнює $S(n, k)\cdot k!$.

Розглянемо приклад застосування чисел Стірлінга.

Приклад 6.16. Знайти значення суми $\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k$ для $n \geq 1$.

► Спочатку знайдемо значення суми $\sum_{k=0}^{n}[k]_m C_n^k$.

Оскільки $(x^n)^{(m)} = [n]_m x^{n-m}$ і за біномом Ньютона $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, то

$$[n]_m(1+x)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n}[k]_m C_n^k x^{k-m} ,$$

звідки за $x = 1$ отримуємо $\sum_{k=0}^{n}[k]_m C_n^k = [n]_m 2^{n-m}$.

$k^m = \sum_{i=0}^{m} S(m,i)[k]_i$, тому

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} S(m,i)[k]_i C_n^k = \sum_{i=0}^{m} S(m,i)\sum_{k=0}^{n}[k]_i C_n^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} S(m,i)[n]_i 2^{n-i} .$$

Відповідь: $\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k = \sum_{i=0}^{m} S(m,i)[n]_i 2^{n-i}$. ◄

Розглянемо матриці $s_{(n)} = (s(i, j))_{1\leq i,j\leq n}$ та $S_{(n)} = (S(i, j))_{1\leq i,j\leq n}$, складені з чисел Стірлінга першого й другого роду, відповідно.

Теорема 6.8. Матриці $s_{(n)}$ та $S_{(n)}$ $(n \geq 1)$ взаємно обернені, тобто $s_{(n)}\cdot S_{(n)} = \mathrm{I}$.

► Для доведення теореми достатньо довести рівність $\sum_{k=1}^{n} s(n,k)S(k,m) = \delta_{n,m}$.

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\sum_{m=0}^{k} S(k,m)[x]_m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} s(n,k)S(k,m)[x]_m = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n} s(n,k)S(k,m)[x]_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (\sum_{k=m}^{n} s(n,k)S(k,m))[x]_m .$$

Оскільки спадні факторіальні степені лінійно незалежні, то розклад за ними єдиний, а тому $\sum_{k=m}^{n} s(n,k)S(k,m) = \delta_{n,m}$. За умови $k < m$ $S(k, m) = 0$, звідки

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)S(k,m) = \sum_{k=m}^{n} s(n,k)S(k,m) = \delta_{n,m}. \text{ ◄}$$

З доведеної теореми випливає, що для чисел Стірлінга мають місце такі формули обертання:

$$\forall m\in \overline{0,n}\ \ a_m = \sum_{k=0}^{m} s(m,k)b_k \Leftrightarrow \forall m\in \overline{0,n}\ \ b_m = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)a_k ,$$

$$\forall m\in \overline{0,n}\ \ a_m = \sum_{k=m}^{n} s(k,m)b_k \Leftrightarrow \forall m\in \overline{0,n}\ \ b_m = \sum_{k=m}^{n} S(k,m)a_k .$$

6.5. Розв’язання рекурентних співвідношень та їх систем методом твірних функцій

Розглянемо, як за допомогою твірних функцій можна розв’язувати рекурентні співвідношення. Загальний план такий.

1. Припускаючи існування твірної функції послідовності, за рекурентним співвідношенням і початковими умовами методом еквівалентних перетворень побудуємо функціональне рівняння для твірної.
2. Знайдемо ***аналітичний*** (тобто нескінченно диференційовний у точці 0) розв’язок отриманого рівняння. Цей розв’язок є твірною шуканої послідовності.
3. Якщо аналітичних розв’язків не існує, то послідовність не мала твірної функції і треба шукати інший метод. Інакше за твірною функцією відновимо послідовність.

Розглянемо метод твірних фукнцій детальніше.

Приклад 6.17. Знайти розв’язок рекурентного співвідношення a_{n+2}-$3a_{n+1}$+$2a_n = 0$ з початковими умовами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

► Нехай функція $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ є твірною послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$. Розглянемо перетворення рекурентного співвідношення. Спочатку домножимо обидві частини рекурентного співвідношення на x^{n+2}:

$a_{n+2}x^{n+2}$-$3a_{n+1}x^{n+2}$+$2a_n x^{n+2} = 0$, $n\in N_0$,

і підсумуємо за всіма $n\in N_0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}x^{n+2} - 3a_{n+1}x^{n+2} + 2a_n x^{n+2}) = 0.$$

Далі, у припущенні існування твірної функції $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ розіб’ємо суму на три суми:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + 2x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Виділимо з сум твірну $f(x)$:

$(f(x)–a_1x–a_0)$-$3x(f(x)$-$a_0)$+$2x^2 f(x) = 0$,

$(f(x)–x)$-$3xf(x)$+$2x^2 f(x) = 0$,

$$f(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}.$$

Тоді $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Оскільки $\dfrac{x}{1-3x+2x^2} = -½(x–½)^{-1}+(x-1)^{-1}$ та $((x-c)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(x-c)^{-1-n} = (-1)^n n!(x-c)^{-1-n}$, то

$a_n = -½(-1)^n(-½)^{-1-n}+(-1)^n(-1)^{-1-n} = 2^n-1^n = 2^n-1.$

Відповідь: $a_n = 2^n$-1. ◄

Тепер перейдемо до загального випадку знаходження рекурентної послідовності. Нехай рекурентну послідовність $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, що має глибину k, задано лінійним однорідним рекурентним співвідношенням

$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ldots+p_k a_n = 0$, $n\in N_0$, де $p_k \neq 0$, (*)

і початковими умовами – значеннями перших k її членів a_0, a_1, …, a_{k-1}.

За рекурентним співвідношенням побудуємо рівняння для твірної функції $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Для цього обидві частини співвідношення (*) помножимо на x^{n+k}:

$a_{n+}kx^{n+k} + p_1 a_{n+k-1}x^{n+k} + p_2 a_{n+k-2}x^{n+k} + \ldots + pka_n x^{n+k} = 0,\ n \in N_0$,

підсумуємо отримані співвідношення за всіма $n\in N_0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+k}x^{n+k} + p_1 a_{n+k-1}x^{n+k} + p_2 a_{n+k-2}x^{n+k} + \cdots + p_k a_n x^{n+k}) = 0$$

та в припущенні існування твірної розіб’ємо на окремі суми:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}x^{n+k} + \sum_{n=0}^{+\infty} p_1 a_{n+k-1}x^{n+k} + \sum_{n=0}^{+\infty} p_2 a_{n+k-2}x^{n+k} +$$

$$+\ldots+\sum_{n=0}^{+\infty} p_k a_n x^{n+k} = 0,$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_{n+k}x^{n+k} + \sum_{n=0}^{+\infty} p_1 a_{n+k-1}x^{n+k} + p_2 x^2 \sum_{n=k-2}^{+\infty} a_n x^n +$$

$$+\ldots+\sum_{n=0}^{+\infty} p_k a_n x^{n+k} = 0.$$

Виділимо твірні функції:

$$p_i x^i \sum_{n=k-i}^{+\infty} a_n x^n = p_i x^i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n\right) = p_i x^i (f(x) - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n),$$

при цьому отримаємо рівність

$$(f(x) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n) + p_1 x^1 (f(x) - \sum_{n=0}^{k-2} a_n x^n) + p_2 x^2 (f(x) - \sum_{n=0}^{k-3} a_n x^n) +$$

$$+\ldots+ p_k x^k f(x) = 0.$$

Уведемо позначення

$p(x) = 1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + p_1 x^1 \sum_{n=0}^{k-2} a_n x^n + \ldots + p_{k-1}x^{k-1} \sum_{n=0}^{0} a_n x^n$$

і згрупуємо твірні в лівій частині:

$f(x)(1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k) = g(x)$,

$f(x)p(x) = g(x)$,

звідки маємо рівняння для твірної функції

$$f(x) = \frac{g(x)}{p(x)},$$

де $g(x)$ – поліном степеня не вище k-1, $p(x)$ – поліном степеня k.

Здійснені перетворення були еквівалентними, отримана дробово-раціональна функція $f(x)$ є аналітичною. Тому $f(x)$ є твірною функцією послідовності α, звідки $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Знайдемо загальний вигляд n-ї похідної функції $f(x)$.

Нехай поліном $1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k$ має s різних комплексних коренів $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_s$ кратністю $r_1, r_2, \ldots, r_s$, відповідно. Тоді має місце розклад

$\frac{g(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(x-\lambda'_i)^j}\right)$, де $\alpha_{i,j}$ – деякі комплексні числа, що залежать від чисел p_i, $i \in \overline{1,k}$, та a_i, $i \in \overline{0,k-1}$.

(Нагадаємо, що $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{x-b}$ для деяких констант c_1 та c_2. Застосувавши це перетворення достатню кількість разів, отримаємо вказаний розклад дробово-раціональної функції $\frac{g(x)}{p(x)}$. Тут слід узяти до уваги, що степінь полінома-діленого менший за степінь полінома-дільника.)

$$((x-c)^{-j})^{(n)}|_{x=0} = (-1)^n[j]^n(x-c)^{-j-n}|_{x=0} = (-1)^n[j]^n(-c)^{-j-n} = (-c)^{-j}[j]^n c^{-n},$$

$$[j]^n = \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!} = \frac{n![n+1]^{j-1}}{(j-1)!},$$

тому

$$\frac{(\alpha_{i,j}(x-\lambda'_i)^{(n)})|_{x=0}}{n!} = \frac{\alpha_{i,j}(-\lambda'_i)^{(-j)}}{(j-1)!}[n+1]^{j-1}(\lambda'_i)^{-n}.$$

Нехай $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}(-\lambda'_i)^{-j}/(j-1)!$, тоді

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i} \beta_{i,j}[n+1]^{j-1}(\lambda'_i)^{-n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i} \beta_{i,j}[n+1]^{j-1}\right)(\lambda'_i)^{-n}.$$

Нехай $q_i(n) = \sum_{j=1}^{r_i} \beta_{i,j}[n+1]^{j-1}$, тоді

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} q_i(n)(\lambda'_i)^{-n}.$$

Зауважимо, що поліном $q_i(n)$ відносно змінної n має степінь не вище r_i-1, тому його можна подати у вигляді $q_i(n) = \sum_{j=0}^{r_i-1} \gamma_{i,j} n^j$, де $\gamma_{i,j}$ – деякі константи, що залежать лише від чисел p_i, $i \in \overline{1,k}$, та a_i, $i \in \overline{0,k-1}$. Отже,

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=0}^{r_i-1}\gamma_{i,j}n^j)(\lambda'_i)^{-n}\ .$$

Розглянемо ***характеристичне рівняння*** рекурентного співвідношення (*):

$\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+\ldots+p_k\lambda^0 = 0.$

Зробимо заміну змінної $\lambda = x^{-1}$ та обидві частини помножимо на x^k. Оскільки $p_k \neq 0$, то $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння й така заміна коректна. У результаті отримаємо рівняння $1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k = 0$. Оскільки поліном $1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k$ має s різних коренів $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_s$ кратністю $r_1, r_2, \ldots, r_s$, відповідно, то поліном $\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+\ldots+p_k\lambda^0$ також має s різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратністю $r_1, r_2, \ldots, r_s$, відповідно, причому $\lambda_i = (\lambda'_i)^{-1}$, $i\in\overline{1,s}$. Тоді

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=0}^{r_i-1}\gamma_{i,j}n^j)\lambda_i^n\ ,$$

де $\gamma_{i,j}$ – деякі константи, що залежать від чисел p_i, $i\in\overline{1,k}$, та a_i, $i\in\overline{0,k-1}$.

З наведених викладок випливає теорема.

Теорема 6.9 про розв'язок ЛОРС. Нехай рекурентну послідовність $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, що має глибину k, задано лінійним однорідним рекурентним співвідношенням

$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ldots+p_ka_n = 0$, $n\in N_0$, де $p_k\neq 0$,

і початковими умовами – значеннями перших k її членів $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, а ***характеристичний поліном*** $\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+\ldots+p_k\lambda^0$ має s різних комплексних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратністю $r_1, r_2, \ldots, r_s$, відповідно.

Тоді загальний член послідовності має вигляд

$a_n = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=0}^{r_i-1}\gamma_{i,j}n^j)\lambda_i^n$, де $\gamma_{i,j}$ – деякі константи, що залежать від чисел p_i, $i\in\overline{1,k}$, та a_i, $i\in\overline{0,k-1}$.

Зауваження. У процесі викладок константи $\gamma_{i,j}$ визначаються однозначно й завжди існують. За теоремою для знаходження послідовності достатньо знайти ці константи. Для цього існують два способи: або акуратно зробити всі викладки й безпосередньо обчислити константи $\gamma_{i,j}$, або знайти ці константи методом невизначених коефіцієнтів. Останній підхід проілюструємо на прикладах.

Приклад 6.18. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$ із початковими умовами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

► Дане рекурентне співвідношення має характеристичний поліном $\lambda^2-\lambda-1$ із коренями $(1-\sqrt{5})/2$ та $(1+\sqrt{5})/2$. Отже, за теоремою 6.9 його розв'язок треба шукати у вигляді

$a_n = a\cdot((1-\sqrt{5})/2)^n+b\cdot((1+\sqrt{5})/2)^n$, де a та b – деякі константи.

Щоб визначити константи a та b, складемо систему рівнянь, виходячи з відомих початкових умов

$0 = a_0 = a\cdot((1-\sqrt{5})/2)^0+b\cdot((1+\sqrt{5})/2)^0 = a+b,$

$1 = a_1 = a\cdot((1-\sqrt{5})/2)^1+b\cdot((1+\sqrt{5})/2)^1 = (1-\sqrt{5})/2)a+(1+\sqrt{5})/2)b.$

Розв'язком системи є $a = -1/\sqrt{5}$, $b = 1/\sqrt{5}$.

Відповідь: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. ◄

Приклад 6.19. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення $a_{n+3} = a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$ із початковими умовами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$.

► Дане рекурентне співвідношення має характеристичний поліном $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$ із коренями 1, 1, -1. Отже, за теоремою 6.9 його розв'язок треба шукати у вигляді

$a_n = (a+b\cdot n)\cdot 1^n+c\cdot(-1)^n$, де a, b, c – деякі константи.

Щоб визначити константи a, b, c, складемо систему рівнянь, виходячи з відомих початкових умов

$0 = a_0 = (a+b\cdot 0)\cdot 1^0+c\cdot(-1)^0 = a+c,$

$1 = a_1 = (a+b\cdot 1)\cdot 1^1+c\cdot(-1)^1 = a+b-c,$

$6 = a_2 = (a+b\cdot 2)\cdot 1^2+c\cdot(-1)^2 = a+2b+c,$

звідки $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$.

Відповідь: $a_n = 3n+(-1)^n-1$. ◄

Цей метод можна застосовувати також для розв'язання систем лінійних рекурентних співвідношень. Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклад 6.20. Знайти послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=27\cdot 5^n$, $n\in N_0$, і початковими умовами $a_0=0$, $a_1=-9$.

► Як раніше, використаємо метод твірних фукнцій:

$a_{n+2}x^{n+2}=-2a_{n+1}x^{n+2}+8a_nx^{n+2}+27\cdot 5^nx^{n+2}$, $n\in N_0$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=-2x\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n+8x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+27x^2\sum_{n=0}^{+\infty}5^nx^n.$$

З останнього співвідношення маємо таке рівняння для твірної $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$:

$f(x)-a_1x-a_0=-2x(f(x)-a_0)+8x^2f(x)+27x^2/(1-5x)$,

$f(x)(1+2x-8x^2)=a_1x+a_0+2a_0x+27x^2/(1-5x)=4-x+27x^2/(1-5x)$,

$$f(x)=-\frac{(4-x)(1-5x)+27x^2}{40(x-1/5)(x-1/2)(x+1/4)}.$$

Отже, розв'язок необхідно має вигляд

$a_n=c_12^n+c_2(-4)^n+c_35^n$

Знайдемо коефіцієнти c_1, c_2, c_3, розв'язавши систему:

$0=a_0=c_1+c_2+c_3$,

$-9=a_1=2c_1-4c_2+5c_3$,

$45=a_2=4c_1+16c_2+25c_3$.

$c_1=-3$, $c_2=2$, $c_3=1$.

Відповідь: $a_n=-3\cdot 2^n+2\cdot(-4)^n+5^n$. ◄

Приклад 6.21. Розв'язати систему рекурентних співвідношень із початковими умовами

$a_{n+2}=a_{n+1}-7a_n-b_{n+1}-6b_n$, $n\in N$,

$b_{n+2}=a_{n+1}+6a_n+3b_{n+1}+5b_n$, $n\in N$,

$a_1=-1$, $a_2=3$, $b_1=2$, $b_2=1$.

► Зауважимо, що задані послідовності індексовані не з 0, а з 1. Однак це не завадить застосувати метод твірних функцій. Нехай $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$, $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n$. Використовуючи раніше викладений метод, перейдемо до системи рівнянь для твірних:

$f(x)-a_2x^2-a_1x=x(f(x)-a_1x)-7x^2f(x)-x(g(x)-b_1x)-6x^2g(x)$,

$g(x)-b_2x^2-b_1x=x(f(x)-a_1x)+6x^2f(x)+3x(g(x)-b_1x)+5x^2g(x)$.

Підставляючи початкові умови та зводячи подібні, маємо:

$(1-x+7x^2)f(x)+(x+6x^2)g(x)=6x^2-x$,

$(-x-6x^2)f(x)+(1-3x-5x^2)g(x)=-4x^2+2x$.

Розглядаючи отриману систему як лінійну відносно невідомих $f(x)$ та $g(x)$, знаходимо функції $f(x)$ та $g(x)$:

$$f(x)=\frac{-24x^4-24x^3+7x^2-x}{(x-1)^4},$$

$$g(x)=\frac{29x^4+15x^3-4x^2+2}{(x-1)^4},$$

що є дробово-раціональними, а отже, аналітичними. Таким чином, знайдено твірні функції заданих послідовностей. Виходячи з доведення теореми 6.9, розв'язок системи слід шукати у вигляді

$a_n=c_0+c_1n+c_2n^2+c_3n^3$, $n\ge 1$,

$b_n=d_0+d_1n+d_2n^2+d_3n^3$, $n\ge 1$.

Для знаходження коефіцієнтів c_0, c_1, c_2, c_3, d_0, d_1, d_2, d_3 використаємо початкові умови. Оскільки з рекурентного співвідношення випливає, що

$a_3=-3$, $a_4=-40$, $b_3=10$, $b_4=50$,

то, підставляючи в отримані формули як n значення 1, 2, 3, 4, маємо систему:

$-1=c_0+c_1+c_2+c_3$,

$3=c_0+2c_1+4c_2+8c_3$,

$-3=c_0+3c_1+9c_2+27c_3$,

$-40=c_0+4c_1+16c_2+64c_3$,

$2=d_0+d_1+d_2+d_3$,

$1=d_0+2d_1+4d_2+8d_3$,

$10=d_0+3d_1+9d_2+27d_3$,

$50=d_0+4d_1+16d_2+64d_3$.

$c_0=6$, $c_1=-19.5$, $c_2=16$, $c_3=-3.5$,

$d_0=-8$, $d_1=22.5$, $d_2=-16$, $d_3=3.5$.

Відповідь: $a_n=6-19.5n+16n^2-3.5n^3$, $b_n=-8+22.5n-16n^2+3.5n^3$. ◄

Наступний приклад ілюструє метод побудови рівняння для твірної функції за допомогою перетворень послідовностей.

Приклад 6.22. Знайти послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням $a_{n+1}=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_na_0$, $n\in N_0$, і початковими умовами $a_0=1$.

► Припустимо, що $f(x)$ є твірною для послідовності α. Уведемо до розгляду нову послідовність $\beta=(b_n)_{n\in N_0}$, де $b_n=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_na_0$. Оскільки послідовність β є згорткою послідовностей α та α, то вона має твірну функцію $f^2(x)$. Тоді послідовність $\gamma=(c_n)_{n\in N_0}$, де $c_0=1$, $c_n=b_{n-1}$, $n\geq 1$, має твірну функцію $x\cdot f^2(x)$. Твірною функцією послідовності $\delta=(d_n)_{n\in N_0}$, де $d_n=\delta_{n,0}$, є константа 1. Оскільки послідовність α є сумою послідовностей β та δ, то її твірна задовольняє рівняння

$$f(x)=x\cdot f^2(x)+1,$$

яке має два розв'язки:

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Оскільки функція $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ не аналітична, то вона не є твірною нашої послідовності. З іншого боку, ураховуючи спосіб побудови рівняння, кожен його аналітичний розв'язок необхідно є твірною функцією шуканої послідовності. Отже, знайдено твірну: $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. З урахуванням результату прикл. 6.15 маємо відповідь: $a_n=\dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$. ◄

Зауважимо, що рекурентне співвідношення й початкові умови з останнього прикладу відповідають послідовності чисел Каталана. Таким чином, фактично отримано другий спосіб знаходження формули для чисел Каталана.

6.6. Розбиття чисел на доданки

Метод твірних функцій застосовний і до розв'язання інших комбінаторних задач. Оскільки послідовність однозначно відновлюється за своєю твірною, то в деяких випадках послідовність можна знайти у вигляді її твірної, а потім за твірною обчислити члени послідовності. Можливо, коротку аналітичну формулу для обчислення загального члена послідовності ми й не знайдемо, але за допомогою твірної функції зможемо обчислити довільний елемент послідовності. Цей метод застосовний до задач, пов'язаних із розбиттями чисел на доданки.

Розглянемо задачу: скількома способами число n можна подати у вигляді суми $n=b_1+b_2+\ldots+b_m$, де m, b_1, b_2, …, b_m – натуральні числа? Суми, що відрізняються лише порядком доданків, вважаємо однаковими.

Ця задача еквівалентна такій: скільки існує непорожніх послідовностей $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, де $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_m\geq 1$, таких, що $n=b_1+b_2+\ldots+b_m$?

Такі послідовності $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ називаються ***розбиттями числа*** n на m доданків і задають невпорядкований розклад числа n на m доданків. Відкинувши умову $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_m$, отримуємо ***впорядковане розбиття числа*** n на m доданків. Кількість розбиттів числа n на m доданків позначимо $P(n, m)$. Загальну кількість розбиттів числа n на доданки позначимо $P(n)$. Наприклад, послідовності (5, 3, 1, 1) та (6, 2, 2) є розбиттями (а також упорядкованими розбиттями) числа 10 на доданки; послідовність (1, 3, 6) є впорядкованим розбиттям числа 10, але просто розбиттям не є. Для систематичності подальших міркувань вважатимемо порожню послідовність ( ) розбиттям числа 0.

Спочатку розглянемо впорядковані варіанти розбиттів, використавши для цього метод твірних функцій.

Приклад 6.23. Знайти твірну функцію й формулу загального члена послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість упорядкованих розбиттів числа n на m цілих невід'ємних доданків, $m\geq 1$.

► Неважко бачити, що a_n є кількістю розв'язків у цілих невід'ємних числах рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_m=n$. Покажемо, що функція

$$f(x)=(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\ldots(1+x+x^2+\ldots)\ \text{(}m\text{ множників)}$$

є твірною шуканої послідовності. Розкриємо в правому виразі дужки та зведемо подібні. Кожен розв'язок заданого рівняння додає одиницю до коефіцієнта при x^n. Дійсно, якщо до деякого добутку з першої дужки ввійшло x^{y_1}, із другої – x^{y_2}, …, з останньої – x^{y_m}, то цей добуток дорівнює x^u, де $u = y_1+y_2+\ldots+y_m$. Тому функція $f(x)$ є твірною послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$. Для відповіді перепишемо її в зручнішому вигляді та знайдемо загальний член за формулою $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ (див. прикл. 6.12).

Відповідь: $f(x) = (1-x)^{-m}$, $a_n = C_{n+m-1}^{m-1}$. ◄

Приклад 6.24. Знайти твірну функцію й формулу загального члена послідовності $(a_n)_{n\in N}$, де a_n – кількість упорядкованих розбиттів числа n на m доданків, $m \ge 1$.

► Аналогічно попередньому прикладу функція

$f(x) = (x+x^2+\ldots)(x+x^2+\ldots)\ldots(x+x^2+\ldots)$ (m множників) $= x^m\cdot(1-x)^{-m}$

є твірною шуканої послідовності. Використовуючи міркування з прикл. 6.13, знаходимо формулу загального члена послідовності.

Відповідь: $f(x) = x^m\cdot(1-x)^{-m}$, $a_n = C_{n-1}^{m-1}$. ◄

Приклад 6.25. Скількома способами суму в n коп. можна видати монетами по 2, 5 та 10 коп.?

► Шукана кількість способів a_n є кількістю розв'язків у цілих невід'ємних числах рівняння $2y_1+5y_2+10y_3 = n$. Твірною послідовності $(a_n)_{n\in N}$ є функція

$$f(x) = (1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots) = (1-x^2)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}.$$

Відповідь: $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, де $f(x) = (1-x^2)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}$. ◄

Зауваження. Насправді в попередньому прикладі твірна функція $f(x)$ дробово-раціональна, а корені знаменника є коренями відповідних степенів з 1, отже, метод доведення теореми 6.9 дозволяє знайти аналітичну формулу для a_n (пропонуємо розв'язати цю задачу як самостійну вправу).

Приклад 6.26. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах рівняння $k_1y_1+k_2y_2+\ldots+k_my_m = n$ із натуральними коефіцієнтами $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

► Шуканою твірною є функція

$$f(x) = (1+x^{k_1}+x^{2k_1}+\ldots)(1+x^{k_2}+x^{2k_2}+\ldots)\ldots(1+x^{k_m}+x^{2k_m}+\ldots).$$

Розкриємо в правому виразі дужки та зведемо подібні. Неважко бачити, що кожен розв'язок заданого рівняння додає одиницю до коефіцієнта при x^n. Дійсно, якщо в деякий добуток із першої дужки ввійшло $x^{y_1k_1}$, із другої – $x^{y_2k_2}$, …, з останньої – $x^{y_mk_m}$, то цей добуток дорівнює x^u, де $u = k_1y_1+k_2y_2+\ldots+k_my_m$. Тому функція $f(x)$ є твірною послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$. Для відповіді перепишемо твірну функцію в зручнішому вигляді.

Відповідь: $f(x) = (1-x^{k_1})^{-1}(1-x^{k_2})^{-1}\ldots(1-x^{k_m})^{-1}$. ◄

Приклад 6.27. Знайти твірну функцію й формулу загального члена послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість розв'язків у цілих числах рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_m = n$ за умов $0 \le l \le y_i \le p$, $1 \le i \le m$.

► Знайдемо твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$:

$$f(x) = (x^l+x^{(l+1)}+\ldots+x^p)^m = x^{lm}\,(1-x^{p-l+1})^m\,(1-x)^{-m}.$$

Тепер знайдемо формулу загального члена послідовності, розклавши співмножники твірної функції в ряд і перемноживши отримані в дужках вирази.

$$f(x) = x^{lm}\cdot\Big(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k x^{k(p-l+1)}\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}C_{k+m-1}^{m-1}x^k\Big).$$

Звідси знаходимо a_n, тобто коефіцієнт при x^n у розкладі $f(x)$.

Відповідь: $f(x) = x^{lm}(1-x^{p-l+1})^m(1-x)^{-m}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k C_m^k C_{n-lm-k(p-l+1)+m-1}^{m-1},$$

де $q = \min\{m, [(n-lm+m-1)/(p-l+1)]\}$. ◄

Перед розв'язанням задачі про кількість розбиттів числа на доданки введемо поняття ***нескінченного добутку***. Нескінченний добуток визначається майже так само, як сума нескінченного ряду: якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{k} a_n = a$, то $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a$.

Аналогічно $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ за умови існування скінченної границі $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$.

Нехай $(f_n(x))_{n\in N}$ – послідовність поліномів однієї змінної (або степеневих рядів), що задовольняє такі умови:

1) $f_n(0) = 1$ для всіх $n\in N$, тобто коефіцієнт при x^0 у розкладі $f_n(x)$ у степеневий ряд дорівнює 1 для всіх $n\in N$;

2) $p_n \to \infty$ при $n \to \infty$, де p_n – найменший ненульовий степінь із ненульовим коефіцієнтом у розкладі $f_n(x)$ у степеневий ряд;

3) $\prod\limits_{n=1}^{k} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} x^n$ для всіх $k\in N$;

4) $\forall n\in N\ \exists i_n, a_n\ \forall\, k > i_n\ a_{n,k} = a_n$,

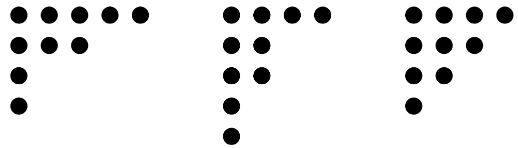
тоді нескінченний добуток можна подати у вигляді формального (тобто необов'язково збіжного) степеневого ряду:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Наведені умови є достатніми для переходу від нескінченного добутку до формального степеневого ряду.

Тепер повернемось до задачі знаходження $P(n)$ та $P(n, m)$. Кожному розбиттю $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ числа n на m доданків поставимо у відповідність ***діаграму Феррерса***, що утворюється таким чином: в i-му рядку ставимо b_i крапок у послідовних вузлах цілочислової сітки (кожен рядок починається з тієї самої вертикалі), $i\in\overline{1,m}$. При транспонуванні отримуємо діаграму Феррерса, що відповідає ***спряженому розбиттю***. Розбиття називається ***самоспряженим***, якщо воно дорівнює своєму спряженому розбиттю.

На рис. 6.1 а зображено діаграму Ферререса розбиття (5, 3, 1, 1), спряженим до якого є розбиття (4, 2, 2, 1, 1) (рис. 6.1 б). Розбиття (4, 3, 2, 1) є самоспряженим (рис. 6.1 в).



а) **б)** **в)**

Рис. 6.1. Діаграми Феррерса для розбиттів чисел на доданки

З наведеного перетворення діаграми Феррерса випливає теорема, що дає можливість знайти твірну фукнцію для послідовності $(P(n,m))_{n\in N_0}$.

Теорема 6.10. Кількість розбиттів числа n на m доданків ($m \geq 1$) дорівнює кількості розбиттів числа n із найбільшим доданком, що дорівнює m.

Приклад 6.28. Знайти твірну функцію послідовності $(P(n,m))_{n\in N_0}$, $m \geq 1$.

► Нехай у розбиття $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ числа n число i входить y_i разів. Тоді n можна подати у вигляді

$n = 1\cdot y_1+2\cdot y_2+\ldots+i\cdot y_i+\ldots$,

але за теоремою 6.10 достатньо розглядати лише розбиття числа n із найбільшим доданком, рівним m. Тому $P(n, m)$ є кількістю розв'язків рівняння

$1\cdot y_1+2\cdot y_2+\ldots+m\cdot y_m = n$, де $y_i \geq 0$ для $i\in\overline{1,k-1}$ та $y_m \geq 1$.

Звідси отримуємо твірну функцію $f(x)$ послідовності $P(n, m)$

$f(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^{m-1}+x^{2(m-1)}+\ldots)\times$

$\times(x^m+x^{2m}+\ldots) = x^m\cdot\prod\limits_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1}$.

Відповідь: $f(x) = x^m\cdot\prod\limits_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1}$. ◄

Приклад 6.29. Знайти твірну функцію послідовності $(P(n))_{n\in N_0}$.

► Аналогічно попередньому кожне розбиття $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ числа n однозначно визначається послідовністю $(y_1, y_2, \ldots)$, де

y_k – кількість входжень числа k у розбиття. Тоді n можна подати у вигляді

$$n = 1\cdot y_1+2\cdot y_2+\ldots+k\cdot y_k+\ldots,$$

звідки маємо формулу для твірної функції послідовності

$$f(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^k+x^{2k}+\ldots)\cdot\ldots=$$

$$=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n)^{-1}.$$

Відповідь: $f(x)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n)^{-1}$. ◄

6.7. Кодування послідовностей і множин

Раніше вже зазначалося, що за твірною функцією можна відновити послідовність. Отже, можна казати, що твірна функція кодує відповідну послідовність: нескінченній послідовності у відповідність ставиться функція. Той самий метод застосовний і для скінченних послідовностей: відсутні елементи можна вважати нульовими. У цьому випадку твірною буде функція вигляду $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$. Однак для кодування скінченних послідовностей цілих невід'ємних чисел можна запропонувати також інші методи, в яких послідовності у відповідність ставиться число. Таке кодування фактично буде нумерацією послідовностей, яка кожній послідовності ставить у відповідність якесь число – її номер, причому різним послідовностям відповідають різні номери. Аналогічно можна будувати нумерації скінченних підмножин множини цілих невід'ємних чисел. Розглянемо кілька таких прийомів.

Приклад 6.30. Побудувати взаємно однозначну нумерацію скінченних підмножин множини цілих невід'ємних чисел.

► Нехай M – скінченна підмножина множини N_0. Поставимо їй у відповідність натуральне число $f(M)$ за правилом $f(M)=\sum_{a\in M}2^a$. Також будемо вважати, що $f(\varnothing) = 0$. Неважко бачити, що f є шуканою взаємно однозначною нумерацією. ◄

Приклад 6.31. Побудувати взаємно однозначну нумерацію скінченних послідовностей цілих невід'ємних чисел.

► *Перший спосіб*. Послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ цілих невід'ємних чисел поставимо у відповідність число $(1\underbrace{00\ldots0}_{a_1}1\underbrace{00\ldots0}_{a_2}\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{a_n})_2$[22]. Порожній послідовності поставимо у відповідність число 0. Побудована відповідність є шуканою взаємно однозначною нумерацією. ◄

Зауваження. Дещо іншу нумерацію (не взаємно однозначну) скінченних послідовностей натуральних чисел можна побудувати таким чином. Нехай $p_1, p_2, \ldots$ – зростаюча послідовність усіх простих чисел. Тоді послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ натуральних чисел поставимо у відповідність число $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}$. Порожній послідовності поставимо у відповідність число 1.

Контрольні запитання

1. Для чого використовують твірні функції послідовностей?
2. Наведіть приклади перетворень над послідовностями й відповідних перетворень їх твірних функцій.
3. У чому полягає комбінаторний зміст чисел Стірлінга першого та другого роду?
4. Сформулюйте загальний метод розв'язання лінійних однорідних співвідношень зі сталими коефіцієнтами. Чи можна його поширити на системи таких співвідношень?
5. Чи існує алгоритм знаходження кількості розбиттів $P(n)$ числа n на доданки, швидший за алгоритм перебирання всіх таких розбиттів?

---

[22] Запис $(b_n\ldots b_1b_0)_2$, де $b_i\in\{0, 1\}$, позначає число, для якого $b_n\ldots b_1b_0$ є двійковим записом, тобто $(b_n\ldots b_1b_0)_2=\sum_{i=0}^{n}b_i2^i$.

Задачі

6.1. Нехай $f(x)$ – твірна функція послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$. Знайти твірну функцію послідовності $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$ за умови:

а) $b_0 = 0$ та $b_n = a_n$, якщо $n \geq 1$;
б) $b_n = 0$, якщо $n \leq m$, і $b_n = a_n$, якщо $n > m$;
в) $b_n = a_{n+m}$, $n\in N_0$;
г) $b_n = 0$, якщо $n \leq m$-1, і $b_n = a_{n-m}$, якщо $n \geq m$;
д) $b_n = a_{n+1}-a_n$, $n\in N_0$;
е) $b_0 = 0$ та $b_{n+1} = a_{n+1}-a_n$, $n\in N_0$.

6.2. Нехай $f(x)$ – твірна функція послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$. Знайти твірну функцію послідовності $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$, якщо за всіх $n\in N_0$:

а) $b_n = a_n+1$; в) $b_n = c^n\cdot a_n$; д) $b_n = a_n/(n+1)$;
б) $b_n = c\cdot a_n+d$; г) $b_n = n^2\cdot a_n$; е) $b_n = a_{2n}$.

6.3. Нехай $f(x)$ – твірна функція послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$. Знайти твірну функцію послідовності $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$, де $b_n = c^n a_0+c^{n-1}a_1+\ldots+c a_{n-1}+a_n$, $n\in N_0$.

6.4. Нехай $f(x)$ – твірна функція послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$. Знайти аналітичну формулу для твірної функції послідовності $\beta = (b_n)_{n\in N_0}$, якщо за всіх $n\in N_0$:

а) $b_n = [n]_m a_n$; б) $b_n = n^m\cdot a_n$; в) $b_n = n^m$.

6.5. Знайти твірну функцію послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, якщо за всіх $n\in N_0$:

а) $a_n = c$; в) $a_n = cn$; д) $a_n = nc^n$; є) $a_n = n^2-n$;
б) $a_n = c^n$; г) $a_n = n+c$; е) $a_n = n^2$; ж) $b_n = 1/(n+1)$.

6.6. Визначити формулу загального члена послідовності $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$, твірною якої є функція $f(x)$:

а) $f(x) = c$; г) $f(x) = x^m(1-x)^m$, де $m\in N$;
б) $f(x) = x^m$; д) $f(x) = 1/(1-cx)$;
в) $f(x) = (c+dx)^m$, де $m\in N$; е) $f(x) = x^m/(1-x)^m$, де $m\in N$.

6.7. Довести, що $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$.

6.8. Довести, що $[x]^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k)x^k$.

6.9. Довести, що:

а) $[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [x]_k [y]_{n-k}$; б) $[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [x]^k [y]^{n-k}$.

6.10. Довести, що матриці $s_{(n)} = (s(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$ та $S_{(n)} = (S(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$, $n \geq 1$, складені з чисел Стірлінга першого та другого роду, відповідно, взаємно обернені.

6.11. Знайти послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням і початковими умовами:

а) $a_{n+3}+3a_{n+2}-4a_{n+1}-12a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 10$;
б) $a_{n+3}-5a_{n+2}-2a_{n+1}+24a_n = 0$, $a_0 = 13$, $a_1 = 13$, $a_2 = 115$;
в) $a_{n+3}-2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n = 0$, $a_0 = 15$, $a_1 = 19$, $a_2 = 45$;
г) $a_{n+3}-7a_{n+2}+16a_{n+1}-12a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$;
д) $a_{n+3}-4a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n = 0$, $a_0 = 7$, $a_1 = 13$, $a_2 = 23$;
е) $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -5$.

6.12. Знайти послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням і початковими умовами:

а) $a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -11$;
б) $a_{n+2}^3 - 2a_{n+1}^3 + a_n^3 = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
в) $a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n = 0$, $a_0 = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$;
г) $a_{n+3}-a_{n+2}+4a_{n+1}-4a_n = 0$, $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$.

6.13. Знайти послідовність $(a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням і початковими умовами:

а) $a_{n+2}-4a_{n+1}-5a_n = 8\cdot 3^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$;
б) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n = 2^n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 9$.

6.14. Розв'язати систему рекурентних співвідношень
$a_{n+2} = a_{n+1}-6a_n-3b_{n+1}+3b_n$, $n\in N_0$,
$b_{n+2} = -3a_{n+1}+5a_n+3b_{n+1}-2b_n$, $n\in N_0$,

з початковими умовами $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$.

6.15. Знайти послідовність $\alpha = (a_n)_{n\in N_0}$ за рекурентним співвідношенням і початковими умовами:

$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_n a_0 = 2^n \cdot a_n$, $n \in N_0$, $a_0 = a_1 = 1$.

6.16. Знайти значення суми:

а) $\sum_{k=1}^{n} C_n^k F_k$; б) $\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k F_k$; в) $\sum_{k=1}^{n} F_{3k}$.

6.17. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N}$, де a_n – кількість розв'язків у натуральних числах рівняння $k_1y_1+k_2y_2+\ldots+k_my_m = n$ із натуральними коефіцієнтами $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

6.18. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість розв'язків у цілих числах рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_m = n$, $l_i \le y_i \le p_i$, $1 \le i \le m$.

6.19. Знайти значення суми $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k C_{20n-10k}^n$, де $n \ge 1$.

6.20. Знайти значення суми $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{3n+1}^k C_{4n-2k}^{3n}$.

6.21. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість розбиттів числа n, в яких усі доданки не більші m, де $m \ge 1$.

6.22. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість розбиттів числа n :

а) на непарні доданки;

б) на попарно різні доданки;

в) на попарно різні непарні доданки.

6.23. За допомогою комбінаторних міркувань довести, що кількість розбиттів числа n на попарно різні доданки дорівнює кількості розбиттів числа n на непарні доданки.

6.24. Знайти твірну функцію послідовності $(a_n)_{n\in N_0}$, де a_n – кількість самоспряжених розбиттів числа n.

6.25. Скільки розв'язків у натуральних числах має рівняння:

а) $y_1+2y_2+5y_3 = n$; б) $3y_1+y_2+4y_3 = n$?

6.26. Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння:

а) $y_1+3y_2+2y_3 = n$, де $3 \le y_1 \le 90$, $-3 \le y_2 \le 100$, $1 \le y_3$;

б) $2y_1+5y_2+2y_3 = n$, де $3 \le y_1 \le 90$, $0 \le y_2$, $1 \le y_3$?

6.27. Скількома способами число 11^n можна зобразити у вигляді добутку трьох натуральних співмножників (зображення, що відрізняються лише порядком співмножників, вважаються однаковими)?

Відповіді, вказівки, розв'язання

Відповіді

Глава 1

1.1. а) 2; б) 6; в) 3. **1.2**. 3. **1.3**. 121. **1.6**. а) 4571; б) 7334; в) 115; г) 319; д) 1455; е) 1709. **1.7**. 10. **1.8**. 2^r. **1.9**. а) $(7+1)\cdot(9+1)\cdot(3+1) = 320$; б) $(21+1)\cdot(21+6+1)\cdot(6+1) = 4312$; в) 2007^2; г) $(3m+1)(n+1)(n+m+1)$; д) $(2n+m+1)(2m+1)$; е) $(2n+1)^2(m+1)$. **1.10**. $9\cdot10^{n-1}$. **1.11**. а) $9\cdot10^{n-3}\cdot1\cdot1$; б) $9\cdot1\cdot10^{n-2}$; в) 9^n; г) $4\cdot5^{n-1}$; д) $5\cdot6^{n-2}\cdot2$. **1.12**. а) $8\cdot9^{n-1}$; б) $9\cdot10^{n-1}-8\cdot9^{n-1}$; в) $9^{n-1}+(n-1)\cdot8\cdot9^{n-2}$; г) 5^n; д) $9\cdot10^{n-1}-5^n$; е) $4\cdot5^{n-1}+(n-1)\cdot5^n$. **1.13**. а) $9\cdot10^{n-1}-7\cdot8^{n-1}$; б) $9\cdot10^{n-1}-2\cdot8\cdot9^{n-1}+7\cdot8^{n-1}$; в) $8\cdot9^{n-1}-7\cdot8^{n-1}$; г) $8^{n-1}+7(n-1)\cdot8^{n-2}$; д) $9^{n-1}-8^{n-1}+(n-1)(8\cdot9^{n-2}-7\cdot8^{n-2})$; е) $7(n-1)(n-2)\cdot8^{n-3}+2(n-1)8^{n-2}$. **1.14**. $9\cdot10^{n-1}$ при $n \ge 11$, $9\cdot10^{n-1}-9\cdot9!/(10-n)!$ при $n \le 10$. **1.15**. а) $4\cdot5^{n-1}$; б) $4\cdot5^{m-1}\cdot3^{n-2m}$, де $m = [n/2]$; в) $4\cdot5^{n-2}\cdot4$; г) $8\cdot5^{n-2}-2\cdot5^{m-1}\cdot3^{n-2m}$, де $m = [n/2]$; д) $12\cdot5^{n-2}-2\cdot5^{m-1}\cdot3^{n-2m}$, де $m = [n/2]$.

Глава 2

2.1. 2^{nm}. **2.2**. $A_{2^m}^n$. **2.3**. $2^n\cdot(2^n-1)^{m-1}$. **2.4**. а) 3^n; б) $n\cdot2^n$; в) 3^n. **2.5**. а) $(2^m-1)^n$; б) $(m+1)^n$. **2.6**. $n!\cdot n!$. **2.7**. $n!-2(n-1)!$. **2.8**. $C_n^k\, k!\cdot2!(n-k+1)!$. **2.9**. а) 2^{n-1}; б) 2^{n-1}. **2.10**. а) C_n^k; б) C_{n-1}^{k-1}; в) C_{n-1}^k. **2.11**. а) 2^n; б) $(2^n-1)2^n$; в) $n\cdot2^n$. **2.14**. 2^{n-k}. **2.15**. $n+1$. **2.16**. $n\cdot2^n$. **2.17**. $n\cdot2^{n-1}$. **2.18**. а) $C_n^k\cdot2^n$; б) $C_n^k\cdot3^k$; в) $C_n^k\cdot3^k$. **2.19**. 2^m. **2.20**. 2^{nm}. **2.21**. а) 2^{n^2-n}; б) $2^{n^2}-2^{n^2-n}$; в) $2^{n^2}-2^{n^2-n}$; г) $2^{n^2}-2^{(n+C_n^2)}$; д) $2^{n^2}-2^n\cdot2^{C_n^2}$. **2.22**. а) $(2^n-2)\cdot2^{n^2-n}$; б) $2^{C_n^2}$; в) $3^{C_n^2}$; г) $2^{n^2-n}-2^{C_n^2}$; д) $2^{n^2-n}-3^{C_n^2}$. **2.23**. а) $2^{n^2-n}+2^n\cdot2^{C_n^2}-2^{C_n^2}$; б) $2^{n^2-n}+2^n\cdot3^{C_n^2}-3^{C_n^2}$; в) $2^{n^2}-2^{n^2-n}+2^{C_n^2}$; г) $2^{n^2}-2^{n^2-n}+3^{C_n^2}$; д) $2^{n^2}-2^n\cdot2^{C_n^2}+2^{C_n^2}$; е) $2^{n^2-n}-2^n\cdot3^{C_n^2}+3^{C_n^2}$. **2.24**. а) $2^{n^2}-2^{C_n^2}$; б) $(2^n-1)(2^{n^2-n}-2^{C_n^2})$; в) $(2^n-1)(2^{n^2-n}-3^{C_n^2})$. **2.25**. а) $C_9(3, 2, 2, 1, 1, 1) = 9!/24$; б) $C_8(3, 2, 1, 1, 1) = 8!/12$. **2.26**. $C_{75}(25, 25, 25) = \dfrac{75!}{(25!)^3}$. **2.27**. $C_n^m C_{n-m}^{k-m} C_{n-k}^{k-m}$.

2.28. $C_{n+m-1-a}^{m-1}$, де $a = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$. **2.29**. C_{n+m-1}^m. **2.30**. а) C_n^m; б) C_{n-1}^m.

2.31. $\sum\limits_{i=0}^{m-1} 2^{m-i} C_m^i C_{n-1}^{m-i-1}$. **2.32**. $\sum\limits_{i=0}^{m-1} 2^{m-i} C_m^i C_n^{m-i}$.

2.33. а) $C_{2n}^m - C_{n-1}^m$; б) $C_{2n+1}^m - C_n^m$. **2.34**. а) $C_{2n+m}^m - C_{n+m-1}^m$; б) $C_{2n+m+1}^m - C_{n+m}^m$. **2.35**. C_{n+1}^m. **2.36**. $\dfrac{n+m}{m} C_n^m$ при $m \ge 1$; 1 при $m = 0$. **2.37**. C_{n-m+2}^m. **2.38**. C_{11}^4. **2.39**. $(C_9^5)^3$. **2.40**. $C_k^m C_{n-1}^{k-m-1}$. **2.41**. а) C_{14}^4; б) $C_4^1 C_{14}^3$; в) $C_4^2 C_{14}^2$; г) $C_{19}^4 - C_{14}^4 - C_4^1 C_{14}^3 - C_4^2 C_{14}^2$; д) $C_{14}^4 + C_4^1 C_{14}^3 + C_4^2 C_{14}^2$. **2.42**. а) $6+A_6^3$; б) 6^3-5^3; в) C_5^2. **2.43**. а) $6+C_6^3$; б) $C_8^5 - C_7^4$. **2.44**. $7\cdot C_7^2$. **2.45**. а) $C_6^4 C_{54-6}^2\cdot6!$; б) $(C_6^3 C_{54-6}^3 + C_6^4 C_{54-6}^2 + C_6^5 C_{54-6}^1 + C_6^6 C_{54-6}^0)\cdot6!$; в) $(C_{54-6}^6 + C_6^1 C_{54-6}^5 + C_6^2 C_{54-6}^4)\cdot6!$. **2.46**. $C_n^k - C_{n-m}^k$. **2.47**. а) C_{52-4}^6; б) $C_{52}^6 - C_{52-4}^6$; в) $C_4^1 C_{52-4}^5$; г) $(C_{52}^6 - C_{52-4}^6) - C_4^1 C_{52-4}^5$; д) $C_4^2 C_{52-4}^4$; е) C_{52-4}^2. **2.48**. а) $4C_{13}^5$; б) $(13-4)\cdot4^5$; в) $A_{13}^5\cdot4^5/5!$; г) $13\cdot(52-4)$; д) $13C_4^3 C_{52-4}^2$; е) $13C_4^3\cdot12C_4^2$; ж) $13C_{52-4}^1 + 13C_4^3 C_{52-4}^2$; з) $13C_4^2 A_{12}^3\cdot5^3/3!$. **2.49**. а) $4C_{13}^5\cdot5!$; б) $(13-4)\cdot4^5\cdot5!$; в) $A_{13}^5\cdot4^5$; г) $13C_{52-4}^1\cdot5!$; д) $13C_4^3 C_{52-4}^2\cdot5!$; е) $13C_4^3\cdot12C_4^2\cdot5!$; ж) $(13C_{52-4}^1 + 13C_4^3 C_{52-4}^2)\cdot5!$; з) $(13C_4^2 A_{12}^3\cdot5^3/3!)\cdot5!$. **2.50**. $C_{32}(10, 10, 10, 2)$.

2.51. а) $8C_4^2\, C_{30}(10, 10, 10)$; б) $4C_8^2\, C_{30}(10, 10, 10)$; в) $C_4^2\, C_{30}(10, 10, 10)$; г) $7C_4^2\, C_{30}(10, 10, 10)$; д) $7C_4^1\, C_{30}(10, 10, 10)$; е) $(A_4^2 \cdot 8^2 / 2!)\, C_{30}(10, 10, 10)$; ж) $(A_8^2 \cdot 4^2 / 2!) \cdot C_{30}(10, 10, 10)$; з) $(A_8^2 A_4^2 / 2!)\, C_{30}(10, 10, 10)$. **2.52**. а) $52!/(4!)^{13}$; б) $(13!)^4$; в) $(4!)^{13}$; г) $13\cdot C_{12}(3, 3, 3, 3)\cdot(C_{13}(4, 4, 4, 1))^4 = \dfrac{(13!)^5}{(3!)^4(4!)^{12}}$. **2.53**. C_n^4.
2.54. $((k+2)^n-k^n)/2$. **2.55**. $8r$. **2.56**. $m(m-1)^{n-1}$.

Глава 3

3.1. а) $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=n-i}^{n} a_{k,i}$; б) $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{i} a_{k,i}$; в) $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{n-i} a_{k,i}$; г) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{k,i}$; д) $\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{k=0}^{i-2} a_{k,i}$. **3.2**. а) 10^n; б) 1; в) 4^n-3^n; г) $(3n+4)\cdot 2^{n-1}$; д) $(2n-1)\cdot 2^n$; е) $2n\cdot 3^{n-1}$. **3.3**. а) $2n\cdot 5^{n-1}$; б) $n(n-1)\cdot 2^{n-2}$; в) $n(n+1)2^{n-2}$; г) -1 за $n = 1$; 2 за $n = 2$, інакше 0; д) $(4n^2+2n)\cdot 3^{n-2}$; е) $(4n^2+n)\cdot(5/2)^{n-2}$.
3.4. а) $\dfrac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$; б) $\dfrac{4^{n+1}-1}{3(n+1)}$; в) 0 за непарних n, $\dfrac{1}{n+1}$ за парних n; г) $\dfrac{1-(-2)^{n+1}}{3(n+1)}$; д) $\dfrac{7^{n+1}-5^{n+1}}{2(n+1)}$. **3.5**. $\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$. **3.8**. а) $n2^{n-3}$ за $n \ge 2$, інакше 0; б) $n2^{n-2}$ за $n \ge 2$, 1 за $n = 1$, 0 за $n = 0$.
3.9. а) $(2^n+2\cos(\pi n/3))/3$; б) $(2^n+2\cos(\pi(n-2)/3))/3$; в) $(2^n+2\cos(\pi(n+2)/3))/3$. **3.10**. $(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos(\pi n/4))/2$ за $n \ge 1$, 1 за $n = 1$. **3.11**. а) $2^{n/2}\cos(\pi n/4)$; б) $2^{n/2}\sin(\pi n/4)$. **3.12**. 0 за непарних n, $(-1)^{n/2}C_n^{n/2}$ за парних n. **3.13**. а) C_{3n}^n; б) C_{4n}^n; в) C_{5n}^n; г) C_{6n}^n; д) C_{7n}^n. **3.15**. $\dfrac{A_{n+1}^{m+1}}{m+1}$. **3.16**. $\dfrac{A_{n+1}^{m+1}-A_{p+1}^{m+1}}{m+1}$. **3.17**. 0.
3.19. $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. **3.21**. $\dfrac{n-m+1}{n+1}(m+n)!$ для $n \ge m$, інакше 0.
3.22. 378. **3.23**. 1330. **3.24**. -555.

Глава 4

4.1. $n\cdot\prod\limits_{i=1}^{r}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$. **4.2**. $(n-1+r)+\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^k\sum\limits_{\substack{I\subseteq\overline{1,r},\\ |I|=k}}\left[n/\prod\limits_{i\in I}p_i\right]$.
4.3. 48. **4.4**. $\dfrac{n!}{m!}\sum\limits_{k=0}^{n-m}\dfrac{(-1)^k}{k!}$. **4.5**. а) $n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$; б) $\dfrac{n!}{m!}\sum\limits_{k=0}^{n-m}\dfrac{(-1)^k}{k!}$; $n!\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\dfrac{C_{k-1}^{m-1}}{k!}$ для $m \ge 1$, $n!$ для $m = 0$.
4.7. $(n-1)!\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k(n-k)}{k!}$. **4.9**. $C_n^m\sum\limits_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_{n-m}^k(n-m-k)^p$.
4.10. а) $(m+1)!\cdot T(n, m+1)$; б) $(m+1)!\cdot T(n, m+1)+m!\cdot T(n, m)$; в) $(m+1)!\cdot T(n, m+1)+2\cdot m!\cdot T(n, m)+(m-1)!\cdot T(n, m-1)$.
4.12. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\, 2^{C_{n-k}^2}$. **4.13**. n^{n-2}.

Глава 5

5.1. 3 525 659 402. **5.2**. $n^2(n+1)^2/4$. **5.3**. $C_n^2+C_n^4-n+1$.
5.4. а) F_{n+2}, де F – послідовність Фібоначчі. **5.7**. $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$.
5.8. $C_{n-2} = C_{2n-4}^{n-2}/(n-1)$. **5.9**. $T(q+1, q+1-k)$. **5.10**. F_{n+2}.

Глава 6

6.1. а) $f(x)-a_0$; б) $f(x)-\sum\limits_{n=0}^{m}a_nx^n$; в) $x^{-m}(f(x)-\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_nx^n)$; г) $x^m f(x)$; д) $x^{-1}(f(x)-a_0)-f(x)$; е) $(f(x)-a_0)-xf(x)$. **6.2**. а) $f(x)+1/(1-x)$; б) $cf(x)+d/(1-x)$; в) $f(cx)$; г) $x^2f''(x)+xf'(x)$; д) $x^{-1}\int\limits_0^x f(t)dt$;

е) $\dfrac{f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})}{2}$. **6.3**. $f(x)/(1-cx)$. **6.4**. а) $x^m f^{(m)}(x)$; б) $\sum_{k=0}^{m} S(m,k)x^k f^{(k)}(x)$; в) $\sum_{k=0}^{m} S(m,k)\dfrac{(-x)^k}{(1-x)^{k+1}}$. **6.5**. а) $c/(1-x)$; б) $1/(1-cx)$; в) $cx/(1-x)^2$; г) $x/(1-x)^2+c/(1-x)$; д) $cx/(1-cx)^2$; е) $x(1+x)/(1-x)^3$; є) $2x^2/(1-x)^3$; ж) $-x^{-1}\cdot ln(1-x)$. **6.6**. а) $a_0=c$, $a_n=0$ для $n\ge 1$; б) $a_n=0$, якщо $n\ne m$, $a_m=1$; в) $a_n=C_m^n d^n c^{m-n}$, якщо $n\le m$, $a_n=0$, якщо $n>m$; г) $a_n=0$, якщо $n<m$ або $n>2m$; $a_n=(-1)^{n-m}C_m^n$, якщо $m\le n\le 2m$; д) $a_n=c^n$; е) $a_0=0$, $a_n=C_{n-1}^{m-1}$, $n\ge 1$. **6.11**. а) $2\cdot(-3)^n-5\cdot(-2)^n+3\cdot 2^n$; б) $6\cdot(-2)^n+3^{n+1}+4^{n+1}$; в) $2+3\cdot(-1)^n+10\cdot 2^n$; г) $(5+2n)\cdot 2^n-4\cdot 3^n$; д) $3+2n+4\cdot 2^n$; е) $1-n-n^2$. **6.12**. а) $2^{n+1}-3^n$; б) $\sqrt[3]{1+26n}$; в) $2^n+3i^n+3(-i)^n$; г) $3+(2i)^n+(-2i)^n$. **6.13**. а) $(-1)^n-3^n+5^n$; б) $3+4n+2^n$. **6.14**. $a_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{4}\cdot(-1)^n-\dfrac{3}{4}\cdot 3^n$, $b_n=\dfrac{1}{2}-5n-(-1)^n-\dfrac{3}{2}\cdot 3^n$. **6.15**. $a_n=1/n!$. **6.16**. а) F_{2n}; б) F_{3n}; в) $(F_{3n+2}-1)/2$.
6.17. $f(x)=x^{k_1+k_2+\ldots+k_m}(1-x^{k_1})^{-1}(1-x^{k_2})^{-1}\ldots(1-x^{k_m})^{-1}$. **6.19**. 0. **6.20**. C_{3n+1}^n. **6.21**. $\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1}$. **6.22**. а) $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}$; б) $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)$; в) $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^{2n-1})$.

Вказівки

Глава 1

1.6. Шукана кількість – це: г) $|A_{11}\backslash(A_2\cup A_5\cup A_7)|$; д) $|A_6\backslash(A_{10}\cup A_{14})|$. **1.8**. Кожен такий дільник має вигляд $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\ldots p_r^{i_r}$, де $i_j\in\{0,1\}$ для $j\in\overline{1,r}$. Тому існує бієкція між указаною множиною дільників і множиною $\{0,1\}^r$. **1.9**. б) Розкладіть на прості множники: $6^{21}\cdot 21^6=2^{21}\cdot 3^{27}\cdot 7^6$. в) $2005^{2006}=5^{2006}\cdot 401^{2006}$. **1.12**. б) Це всі n-значні числа без тих, у запису яких відсутня цифра 9; д) усі n-значні без тих, у запису яких немає жодної парної цифри; е) див. п. в. **1.15**. а) Такі числа можуть складатися лише з цифр 0, 1, 6, 8, 9; б) Достатньо визначити одну половину десяткового запису числа, а інша половина визначається дзеркально. Розглянути випадки парного й непарного n. в) 0 не може бути останньою цифрою такого числа. д) Від кількості чисел, що не втрачають значення, відняти кількість тих, що не змінюються, і тих, що не збільшуються.

Глава 2

2.1. Кожна така матриця є розміщенням елементів множини $\{0, 1\}$ за $\overline{1,n}\times\overline{1,m}$ позиціями. **2.2**. Рядки матриці набувають значення у 2^m-елементній множині. Кожна така матриця є розміщенням рядків по n. **2.3**. Стовпчики матриці набувають значення у 2^n-елементній множині. Перший стовпчик може набувати довільного значення, а кожен наступний має відрізнятися від попереднього. **2.4**. а) Кожен елемент множини U потрапляє або в множину X, або в множину Y, або в жодну з них; тобто для нього є рівно 3 можливості. б) За умовою задачі або $Y=X\cup\{a\}$, де $a\in U\backslash X$; або $X=Y\cup\{a\}$, де $a\in U\backslash Y$. У першому випадку вибір пари (X, Y) зводиться до вибору елемента $a\in U$ й довільної множини $X\subseteq U\backslash\{a\}$ і може бути виконаний $n\cdot 2^{n-1}$ способами. Другий випадок аналогічний першому. в) Дане рівняння еквівалентне співвідношенню $Z\subseteq X=U\backslash Y$. Отже, множина Y однозначно визначається множиною X. Залишається обрати пару множин $(Z, X\backslash Z)$, що не перетинаються; звести до п. а. **2.6**. Окремо розставити парні й непарні числа. **2.8**. Спочатку виберемо й розставимо k елементів, що будуть розташовані між 1 та 2; потім по їх боках розставимо 1 та 2; отримана часткова розстановка разом із залишком елементів складає n-k+1 об'єкт, який необхідно розмістити на n-k+1 місцях. **2.9**. а) Із множини $\overline{2,n}$ обрати довільну підмножину й додати до неї 1. б) Із множини $\overline{2,n}$ обрати довільну підмножину. **2.11**. б) Вибрати непорожню підмножину з парних чисел і довільну підмножину – з непарних; в) вибрати одне парне число й довільну підмножину з непарних чисел. **2.15**. У таких векторах спочатку йде певна кількість нулів (можливо, жодного), а потім – певна кількість одиниць, тому достатньо визначити кількість одиниць (від 0 до n). **2.17**. Оскільки сусідні вектори різні, то з кожної невпорядкованої їх пари можна утворити рівно дві впорядковані. Далі див. задачу 2.16. **2.18**. а) $\|a\oplus b\| = k \Leftrightarrow \rho(a, b) = k$. Далі див. прикл. 2.18. б) Серед n пар координат (a_i, b_i) (див. прикл. 2.18) рівно k мають належати множині $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, а решта – бути парами $(0, 0)$. **2.21**. а) Див. прикл. 2.20; б) від кількості всіх відношень на A відняти кількість антирефлексивних. **2.22**. а) Діагональ матриці відношення не може складатися тільки з 0 або тільки з 1; решта елементів матриці заповнюється довільним чином. б) На головній діагоналі матриці мають бути одиниці, а решта елементів матриці однозначно визначається елементами над головною діагоналлю. г) Це різниця кількостей рефлексивних та одночасно рефлексивних і симетричних відношень. **2.23**. в) Це нерефлексивні та одночасно рефлексивні й симетричні відношення; д) це несиметричні та одночасно рефлексивні й симетричні відношення. **2.24**. а) Це всі відношення без одночасно рефлексивних і симетричних; б) це всі відношення без рефлексивних або симетричних, або інакше: обрати нерефлексивну діагональ і несиметричну решту матриці відношення. **2.25**. Використати перестановки з повтореннями. **2.26**. Див. прикл. **2.13**. **2.27**. Кожній такій парі множин бієктивно відповідає трійка (X_1, Y_1, Z) попарно диз'юнктних підмножин множини U, для яких $|X_1| = |Y_1| = k\text{-}m$, $|Z| = k$; причому $X = X_1 \cup Z$, $Y = Y_1 \cup Z$. **2.29**. Перейти до еквівалентної нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n\text{-}1$ і використати прикл. 2.24. **2.30**. а) Аналогічно прикл. **2.24** кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вхідної нерівності у взаємно однозначну відповідність поставимо розв'язок $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1} = n$, $x_i \ge 1$, $i \in \overline{1,m}$, $x_{m+1} \ge 0$ за правилом $x_{m+1} = n\text{-}(x_1+x_2+\ldots+x_m)$. Далі використати задачу **2.28**. б) Перейти до еквівалентної нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n\text{-}1$ і використати п. а. **2.31**. Кількість розв'язків із рівно i нульовими координатами дорівнює добутку кількості способів вибору i нульових координат на кількість способів розставити знаки ("+" або "–") для ненульових координат і на кількість розв'язків рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_{m-i} = n$ у натуральних числах, тобто $C_m^i \cdot 2^{m-i} C_{n-1}^{m-i-1}$. Далі залишається підсумувати за всіма можливими кількостями нульових координат розв'язку. **2.33**. а) Від кількості розв'язків нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le 2n$ відняти кількість розв'язків нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n\text{-}1$. б) Від кількості розв'язків нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le 2n+1$ відняти кількість розв'язків нерівності $x_1+x_2+\ldots+x_m \le n$. **2.36**. При $m \ge 1$ кількість таких послідовностей, в яких перший і останній елементи одночасно одиниці, аналогічно задачі 2.35 дорівнює кількості розв'язків рівняння $x_1+\ldots+x_{m\text{-}1} = n$, $x_i \ge 1$, $i \in \overline{1, m-1}$, тобто C_{n-1}^{m-2}. Отже, шукана кількість $C_{n+1}^m \text{-} C_{n-1}^{m-2} = \dfrac{n+m}{m} C_n^m$. **2.37**. Див. перший спосіб розв'язання задачі 2.35. **2.38**. Аналогічно прикл. 2.15. **2.39**. Кулі кожного кольору розкладаємо по пакетах незалежно від куль інших кольорів. **2.40**. Виберіть порожні урни й розкладіть кулі в решту. **2.41**. б) Спочатку оберіть одну порожню урну, а потім 15 однакових куль розкладіть по чотирьох інших урнах так, щоб серед них не було жодної порожньої. г) Від кількості всіх можливих способів розподілу куль по урнах відняти кількість тих, що не задовольняють умову. **2.42**. Зверніть увагу на те, що порядок кубиків суттєвий. Отже, ідеться про кількість послідовностей (a_1, a_2, a_3). б) Від загальної кількості способів відняти кількість тих, в яких немає жодної шістки. в) Задача зводиться до кількості розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 5$ у натуральних числах. **2.43**. Зверніть увагу на те, що порядок кубиків несуттєвий. б) Загальна кількість способів кинути три кубики є розв'язком рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 3$ у цілих невід'ємних числах (x_i – кількість кубиків, на яких випало i). Далі див. п. б. **2.44**. Усього є $C_7^2 + 7 = 28$ кісток доміно. Якщо n (від 0 до 6) очок є на обох кістках, то для кожного n існує C_7^2 варіантів вибору двох кісток із фіксованим спільним номером n. **2.46**. Від загальної кількості способів вибору k карт відняти кількість способів вибору k непозначених карт. **2.48**. а) Вибрати одну масть і 5 вартостей карт. б) Вибрати вартість старшої карти, а потім для кожної з п'яти карт обрати масть. в) Вибрати послідовність карт (див. задачу 2.49), а потім урахувати наявність упорядкування послідовності. г) Вибрати вартість чотирьох карт, а потім ще одну карту. д) Для трьох карт вибрати вартість, а потім масті; далі обрати ще дві карти. е) Для трьох карт вибрати вартість, а потім масті; далі для двох карт обрати номер і масті. ж) Треба, щоб було або чотири карти однієї вартості, або рівно три. з) Вибрати пару карт однієї вартості ($13C_4^2$). Потім серед карт іншої вартості вибрати послідовність трьох карт різної вартості ($A_{12}^3 \cdot 5^3$) і врахувати наявність упорядкування послідовності, поділивши на кількість перестановок із трьох карт (3!). **2.49**. Оскільки вибираються п'ять різних карт, то від вибору множини в задачі 2.48 до вибору послідовності можна перейти врахуванням усіх можливих перестановок, тобто помноживши на 5!. в) Вибрати п'ять вартостей карт, а потім для кожної карти обрати масть. **2.51**. Спочатку виберіть дві нероздані карти, а потім решту карт роздайте гравцям. **2.52**. б) Карти кожної масті роздаємо окремо. в) Карти кожної вартості роздаємо окремо. **2.53**. Кожні чотири вершини n-кутника визначають рівно одну точку перетину діагоналей.

Глава 3

3.5. Використати правило Паскаля у формі $C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$ і приклад 3.6. **3.7**. Використати індукцію за m і правило Паскаля. **3.8**. Див. прикл. 3.12, 3.4, 3.5. **3.9**. Позначимо суми пп. а–в через S_0, S_1, S_2, відповідно. Нехай $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(2\pi/3) + i \cdot \sin(2\pi/3)$. Виразити $(1+\varepsilon)^n$, $(1+\varepsilon^2)^n$, $(1+\varepsilon^3)^n$ через суми S_0, S_1, S_2, використавши рівності $\varepsilon^3 = 1$, $1+\varepsilon+\varepsilon^2 = 0$, та отримати лінійну систему з трьох рівнянь із невідомими S_0, S_1, S_2. **3.10**. Аналогічно задачі 3.9. **3.12**. Аналогічно прикл. 3.14 у тотожності $(1-x)^n(1+x^{-1})^n = (1-x^2)^n/x^n$ розглянути коефіцієнт при x^0. **3.13**. а) Аналогічно прикл. 3.14 у тотожності $(1+x)^n(1+x)^n(1+x^{-1})^n = = (1+x)^{3n}/x^n$ розглянути коефіцієнт при x^0. **3.16**. Див. задачу 3.15. **3.18**. Роздайте двом особам по m карток із двох однакових n-елементних наборів. k – кількість спільних карток. **3.21**. Скористайтесь методом траєкторій, щоб знайти кількість розташувань у чергу монет по 1 грн. і по 50 коп. Далі слід урахувати те, що люди різні.

Глава 4

4.2. Кожне складене число з $\overline{2,n}$ обов'язково має дільники серед чисел $p_1, p_2, ..., p_r$. За означенням простого числа 1 не є простим числом. За формулою включення й виключення знайдемо кількість тих чисел, що не діляться на жодне з чисел $p_1, p_2, ..., p_r$. Однак серед таких чисел є 1, яка не є простим числом, і немає чисел $p_1, p_2, ..., p_r$, які є простими. **4.4**. Виберіть m елементів, що відповідають самі собі. Тоді решта, $n-m$, утворює безлад, далі див. приклад 4.1. **4.5**. а) Задача зводиться до знаходження кількості безладів; див. прикл. 4.1. б) Див. задачу 4.4. в) Відповіддю є число M_m (див. підрозд. 4.2). Урахувати, що в цій задачі $S_k = \frac{n!}{k!}$. 4.6. Аналогічно наслідку 3.1 матриця $\alpha = (C_{i-1}^{j-1})_{1 \le i, j \le n}$ обернена до матриці $((-1)^{i+j} C_{i-1}^{j-1})_{1 \le i, j \le n}$, тому, розглядаючи вектор-рядки $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ та $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$, маємо $M = S\alpha^{-1}$, звідки $S = M\alpha$. Далі використати формулу обертання. **4.7**. Деякі верблюди можуть залишитись на своїх місцях у каравані, тому ця задача не зводиться до задачі про безлади. Проте за всіх $i \in \overline{1, n-1}$ після i-го верблюда не може йти $(i+1)$-й. Далі скористатись наслідком 4.1. **4.9**. Спочатку виберіть порожні вагони, тоді розподіл пасажирів задаватиме сюр'єктивне відображення із множини пасажирів у множину непорожніх вагонів. **4.11**. Використайте той факт, що для скінченної множини A сюр'єктивне відображення з A в A є бієкцією. **4.14**. Знайдіть комбінаторну інтерпретацію лівої та правої частин рівності.

Глава 5

5.3. Ця задача може бути розв'язана не тільки методом рекурентних співвідношень, але й з використанням теореми Ейлера. **5.10**. *Перший спосіб.* Спробуйте знайти для суми рекурентне співвідношення й початкові умови. *Другий спосіб.* З використанням задачі 2.35 побудуйте комбінаторну інтерпретацію суми й використайте задачу 5.4 а.

Глава 6

6.3. $\beta = \alpha\cdot(c^n)_{n\in N_0}$. **6.4**. б) Використайте розклад $n^m = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)[n]_k$ та п. а. **6.7**. Див. означення числа $B(n)$ і комбінаторний зміст чисел Стірлінга другого роду. **6.8**. Використати рівність $[x]^n = (-1)^n[-x]_n$. **6.9**. Використайте математичну індукцію за n. **6.12**. а) Спочатку за початковими умовами знайдіть значення параметрів b та c, склавши систему рівнянь $-1 = a_2 = -b\cdot a_1 - c\cdot a_0 = -b-c$, $-11 = a_3 = -b\cdot a_2 - c\cdot a_1 = b-c$. б) Виконайте заміну $b_n = a_n^3$ і розгляньте нове рекурентне співвідношення $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$ із початковими умовами $b_0 = 1$, $b_1 = 27$. **6.15**. Використайте метод твірних функцій. **6.16**. Використайте аналітичну формулу числа Фібоначчі та біном Ньютона. **6.19**. Знайдіть комбінаторну інтерпретацію. **6.20**. Знайдіть комбінаторну інтерпретацію. **6.24**. Кількість самоспряжених розбиттів числа n дорівнює кількості розбиттів числа n на попарно різні непарні доданки.

Розв'язання

Глава 1

1.1. в) $|A\backslash((A\cap H)\cup(A\cap \Phi))| = |A| - |(A\cap H)\cup(A\cap \Phi)| =$
$= |A| - |(A\cap H)\cup(A\cap \Phi)| = |A| - |A\cap H| - |A\cap \Phi| + |(A\cap H)\cap(A\cap \Phi)| =$
$= 10 - 5 - 4 + |A\cap H\cap \Phi| = 1 + 2 = 3$, де A, H, Φ – множини осіб, що знають англійську, німецьку, французьку, відповідно.

1.6. Нехай $U = \overline{1{,}10000}$; A_i – множина чисел з U, що діляться на i. За задачею 1.4 $|A_i| = [10000/i]$. За задачею 1.5 $A_i \cap A_j = A_{\text{НСК}(i,j)}$.

а) Необхідно знайти кількість елементів множини $U\backslash(A_3\cup A_5\cup A_7)$:

$|U\backslash(A_3\cup A_5\cup A_7)| = |U| - |A_3\cup A_5\cup A_7| =$
$= |U| - (|A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3\cap A_5| - (A_5\cap A_7| - |A_3\cap A_7| + |A_3\cap A_5\cap A_7|) =$
$= |U| - |A_3| - |A_5| - |A_7| + |A_{15}| + |A_{35}| + |A_{21}| - |A_{105}| = 4571.$

б) Необхідно знайти кількість елементів множини $U\backslash(A_6\cup A_{10}\cup A_{15})$:

$|U\backslash(A_6\cup A_{10}\cup A_{15})| = |U| - |A_6\cup A_{10}\cup A_{15}| =$
$= |U| - (|A_6| + |A_{10}| + |A_{15}| - |A_6\cap A_{10}| - |A_{10}\cap A_{15}| - |A_6\cap A_{15}| + |A_6\cap A_{10}\cap A_{15}|) =$
$= |U| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}| + |A_{30}| + |A_{30}| - |A_{30}| = 7334.$

в) Необхідно знайти кількість елементів множини $(A_{10}\cap A_{25})\backslash(A_3\cup A_7)$:

$|(A_{10}\cap A_{25})\backslash(A_3\cup A_7)| = |A_{50}\backslash(A_3\cup A_7)| = |A_{50}| - |A_{50}\cap(A_3\cup A_7)| =$
$= |A_{50}| - |(A_{50}\cap A_3)\cup(A_{50}\cap A_7)| = |A_{50}| - (|A_{50}\cap A_3| + |A_{50}\cap A_7| -$
$- |(A_{50}\cap A_3)\cap(A_{50}\cap A_7|) = |A_{50}| - (|A_{150}| + |A_{35}0| - |A_{1050}|) = 115.$

1.7. Нехай $Д$, M, A, $П$ – множини студентів, що не склали іспит із дискретної математики, математичного аналізу, алгебри, програмування, відповідно. Тоді $|Д| \le 100 - 70 = 30$, $|M| \le 100 - 75 = 25$, $|A| \le 100 - 80 = 20$, $|П| \le 100 - 85 = 15$; $Д\cup M\cup A\cup П$ – множина студентів, що не склали хоча б один із чотирьох іспитів. За наслідком 1.5

$|Д\cup M\cup A\cup П| \le |Д| + |M| + |A| + |П| \le 30 + 25 + 20 + 15 = 90.$

Звідси принаймні $100 - 90 = 10$ студентів успішно склали всі чотири іспити.

1.10. Кожне n-значне натуральне число єдиним чином можна подати у вигляді $(a_{n-1}\ldots a_1 a_0)_{10}$, де $a_{n-1} \in \overline{1{,}9}$, $a_i \in \overline{0{,}9}$, $i \in \overline{0, n-2}$. Отже, існує 9 способів вибору старшого розряду і 10 способів вибору кожного іншого розряду. Звідси за правилом добутку існує $9\cdot 10^{n-1}$ n-значних натуральних чисел.

1.12. в) n-значні числа, у запису яких є рівно одна цифра 9, можна розбити на дві множини, які не перетинаються: ті, що, починаються з цифри 9, і ті, що починаються не з 9. Перша множина містить 9^{n-1} елементів.

Позначимо другу множину A та знайдемо кількість її елементів. Розглянемо довільне число $m = (a_{n-1}\ldots a_1a_0)_{10}\in A$. У його запису є єдина цифра 9; нехай $a_i = 9$, причому $i \neq n$-1. Тоді йому можна зіставити пару $(i, (a_{n-1}\ldots a_{i+1}a_{i-1}\ldots a_0)_{10})$, перший елемент якої задає позицію цифри 9 у числі m, а другий є числом, що утворюється з числа m викресленням цифри 9. Указане відображення з множини A в декартів добуток множини $\overline{0, n-2}$ і множини n-значних чисел, у запису яких немає цифри 9, є бієкцією. Отже, за основним принципом комбінаторики $|A| = (n-1)\cdot 8\cdot 9^{n-2}$.

За правилом суми отримуємо загальну відповідь: $9^{n-1}+(n-1)\cdot 8\cdot 9^{n-2}$.

1.13. Нехай U – множина всіх n-значних чисел, A_i – множина n-значних чисел, у запису яких є хоча б одна цифра i, W_i – множина n-значних чисел, у запису яких є рівно одна цифра i. Тоді $U\backslash A_i$ – множина n-значних чисел, у запису яких відсутня цифра i. Аналогічно задачам 1.10, 1.12 при $i, j\in \overline{1, 9}$, $i \neq j$, маємо:

$|U| = 9\cdot 10^{n-1}$, $|U\backslash A_i| = 8\cdot 9^{n-1}$, $|U\backslash(A_i\cup A_j)| = 7\cdot 8^{n-1}$, $|A_i| = 9\cdot 10^{n-1}-8\cdot 9^{n-1}$,

$|W_i| = 9^{n-1}+(n-1)\cdot 8\cdot 9^{n-2}$, $|W_i\backslash A_j| = 8^{n-1}+(n-1)\cdot 7\cdot 8^{n-2}$.

Тепер пп. а-д задачі звелись до знаходження значень $|A_7\cup A_8|$, $|A_7\cap A_8|$, $|A_7\backslash A_8|$, $|W_7\backslash A_8|$, $|W_7\cap A_8|$, відповідно.

$|A_7\cup A_8| = |U\backslash(U\backslash(A_7\cup A_8))| = |U|-|U\backslash(A_7\cup A_8)| = 9\cdot 10^{n-1}-7\cdot 8^{n-1}$,

$|A_7\cap A_8| = |A_7|+|A_8|-|A_7\cup A_8| = 9\cdot 10^{n-1}-2\cdot 8\cdot 9^{n-1}+7\cdot 8^{n-1}$,

$|A_7\backslash A_8| = |A_7|-|A_7\cap A_8| = 8\cdot 9^{n-1}-7\cdot 8^{n-1}$,

$|W_7\backslash A_8| = 8^{n-1}+(n-1)\cdot 7\cdot 8^{n-2}$,

$|W_7\cap A_8| = |W_7|-|W_7\backslash A_8| = 9^{n-1}-8^{n-1}+(n-1)(8\cdot 9^{n-2}-7\cdot 8^{n-2})$.

1.15. г) Нехай U – множина n-значних чисел, що при перевертанні залишаються n-значними й не втрачають значення. Кожне число із множини U при перевертанні або не змінюється, або зменшується, або збільшується. Таким чином, утворюється розбиття множини U на множини A, B, C, відповідно; $|U| = |A|+|B|+|C|$. Якщо число перевернути двічі, то отримаємо те саме число. Тому між множинами B та C існує бієкція, і $|B| = |C|$. Звідси $|C| = (|U|-|A|)/2$. Значення $|U|$ та $|A|$ були знайдені у пп. в та б.

Глава 2

2.7. Знайдемо кількість перестановок, в яких 1 та 2 розташовані поруч. Нехай 1 іде після 2; викресливши 1, отримаємо перестановку множини $\overline{2, n}$. Отже, між перестановками множини $\overline{1, n}$ вигляду (…, 1, 2, …) і множини $\overline{2, n}$ існує бієкція. Тому існує $(n-1)!$ перестановок вигляду (…, 1, 2, …). Аналогічно існує $(n-1)!$ перестановок вигляду (…, 2, 1, …). Тому у $2(n-1)!$ перестановках 1 та 2 розташовані поруч. Залишається цю кількість відняти від $n!$ – загальної кількості перестановок.

2.16. Для кожного двійкового вектора, що має довжину n, існує рівно n сусідніх векторів. Усього векторів 2^n. За правилом добутку отримуємо відповідь: $n\cdot 2^n$.

2.28. Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вхідного рівняння у взаємно однозначну відповідність поставимо розв'язок $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_m = n-(\sum_{i=1}^{m} a_i)$ у цілих невід'ємних числах за правилом: $y_i = x_i-a_i$, $i\in \overline{1, m}$. Далі залишається використати теорему 2.6.

2.35. *Перший спосіб*. Аналогічно доведенню теореми 2.6 кожна така послідовність відповідає цілочисловому розв'язку рівняння $x_0+x_1+\ldots+x_m = n$, $x_0 \geq 0$, $x_i \geq 1$, $i\in \overline{1, m-1}$, $x_m \geq 0$. За задачею 2.28 маємо відповідь C_{n+1}^{m}. *Другий спосіб*. Спочатку розставимо всі нулі, а потім у проміжки між ними й, можливо, по краях – одиниці. Отже, m одиниць слід розставити на n+1 позицію.

2.52. г) Виберемо гравця, який отримує карти всіх чотирьох мастей (13 варіантів). Для кожного іншого гравця виберемо масть, карти якої він отримує. Це можна зробити $C_{12}(3, 3, 3, 3) = 12!/(3!)^4$ способами. Далі роздамо кожну масть відповідним гравцям. Роздачу однієї масті можна здійснити $C_{13}(4, 4, 4, 1) = 13!/(4!)^3$, тому роздати всі чотири масті можна $(13!/(4!)^3)^4$ способами.

Глава 3

3.11. $(1+i)^n = (\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\cdot\sin(\pi/4))^n =$
$= 2^{n/2}(\cos(\pi n/4)+i\cdot\sin(\pi n/4))$,

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k} + i\cdot\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k+1}\text{, звідки}$$

$$2^{n/2}(\cos(\pi n/4)+i\cdot\sin(\pi n/4)) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k} + i\cdot\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k+1}.$$

Прирівнюючи дійсну й уявну частини, маємо відповідь.

3.14. Існує C_n^m способів вибрати m елементів із n. Подивимось на процес вибору інакше. Упорядкуємо n елементів. Нехай перший за цим порядком елемент, що не був вибраний, має номер k+1. Тоді були вибрані перші k і ще деякі m-k із n-k-1 останніх елементів. Отже, за фіксованого k є C_{n-k-1}^{m-k} способів обрати m елементів. Параметр k може набувати значення від 0 до m, причому різним значенням k відповідають різні підмножини, тому за правилом суми вибір m елементів можна здійснити $\sum_{k=0}^{m} C_{n-k-1}^{m-k}$ способами. Звідси з комбінаторних міркувань маємо шукану рівність.

3.15. Розглянемо таку задачу: знайти кількість розміщень чисел $\overline{1,n+1}$ по m+1, в яких перший елемент є найбільшим. Таких розміщень із першим елементом k+1 буде рівно A_k^m. Перебравши всі можливі перші елементи, отримаємо вказану в умові суму.

З іншого боку, з кожного такого розміщення циклічними зсувами можна отримати m+1 різних розміщень, і кожне розміщення чисел $\overline{1,n+1}$ по m+1 можна сформувати в такий спосіб. Тоді вказаних розміщень буде в m+1 разів менше за загальну кількість розміщень із n+1 за m+1.

Глава 4

4.1. Нехай $A_k = \{x \mid x\in\overline{1,n},\ x\,\vdots\,k\}$. Тоді $\overline{1,n}\setminus(\bigcup_{k=1}^{r} A_{p_k})$ – множина чисел із $\overline{1,n}$, взаємно простих із числом n. Зауважимо, що $\bigcap_{i\in I} A_{p_i} = \{x \mid x\in\overline{1,n},\quad x\,\vdots\prod_{i\in I} p_i\}$. $|A_{p_k}| = [n/p_k] = n/p_k$, $|\bigcap_{i\in I} A_{p_i}| = [n/\prod_{i\in I} p_i] = n/\prod_{i\in I} p_i$, оскільки p_i – взаємно прості дільники числа n. За наслідком 4.1

$$|\overline{1,n}\setminus(\bigcup_{k=1}^{r} A_{p_k})| = n+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,r},\\ |I|=k}} |\bigcap_{i\in I} A_{p_i}| =$$

$$= n+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,r},\\ |I|=k}} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} = n\cdot\sum_{k=0}^{r}\sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,r},\\ |I|=k}} \frac{(-1)^k}{\prod_{i\in I} p_i} =$$

$$= n\cdot\sum_{k=0}^{r}\sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,r},\\ |I|=k}} \frac{1}{\prod_{i\in I}(-p_i)} = n\cdot\sum_{I\subseteq\overline{1,r}} \frac{1}{\prod_{i\in I}(-p_i)} = n\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

4.12. Існує $2^{C_n^2}$ способів сполучити n населених пунктів, оскільки кожні два з них ми можемо сполучити або ні авіарейсом. Для відповіді на питання задачі скористаємось формулою включення й виключення. Нехай

V – n-елементна множина населених пунктів;

Y – множина всіх способів авіасполучення, $|Y| = 2^{C_n^2}$;

Y_0 – множина всіх способів авіасполучення, що задовольняють умову задачі;

Y_v, де $v\in V$, – множина всіх способів авіасполучення, в яких у населеному пункті v немає жодного рейсу;

Y_I, де $I\subseteq V$, – множина всіх способів авіасполучення, в яких у населених пунктах із множини I немає жодного рейсу, $Y_I = \bigcap_{v\in I} Y_v$.

Тоді $Y_0 = Y\setminus\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$. За наслідком 4.1

$$|Y_0| = |Y \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} Y_k)| = |Y| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq V, \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} Y_i| =$$

$$= 2^{C_n^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq V, \\ |I|=k}} |Y_I|.$$

Оскільки для кожного $k \in \overline{1,n}$ існує точно C_n^k k-елементних множин $I \subseteq V$, $|I| = k$, і для кожної такої множини I виконується $|Y_I| = 2^{C_n^2}$, то

$$\sum_{\substack{I \subseteq V, \\ |I|=k}} |Y_I| = C_n^k 2^{C_{n-k}^2},$$

$$|Y_0| = 2^{C_n^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}.$$

Глава 5

5.4. а) Нехай $K_0(n)$ – кількість двійкових векторів, що мають довжину n, що закінчуються нулем, серед сусідніх координат яких немає двох одиниць поспіль; $K_1(n)$ – кількість двійкових векторів, що мають довжину n та закінчуються одиницею, серед сусідніх координат яких немає двох одиниць поспіль; $K(n)$ – кількість двійкових векторів, що мають довжину n та серед сусідніх координат яких немає двох одиниць поспіль. З комбінаторних міркувань і безпосередніх підрахунків мають місце співвідношення:

$K(n) = K_0(n)+K_1(n)$,

$K_1(n+1) = K_0(n)$,

$K_0(n+1) = K_0(n)+K_1(n)$,

$K_0(1) = 1$, $K_1(1) = 1$, $K_0(2) = 2$, $K_1(2) = 1$, $K(1) = 2$, $K(2) = 3$.

Тоді

$K_0(n+2) = K_0(n+1)+K_0(n)$ для $n \in N$.

Оскільки рекурентне співвідношення для K_0 збігається з рекурентним співвідношенням для послідовності Фібоначчі та $F_2 = 1 = K_0(1)$, $F(3) = 2 = K_0(2)$, то $K_0(n) = F_{n+1}$. Далі маємо

$K(n+1) = K_0(n+1)+K_1(n+1) = K_0(n+1)+K_0(n) = F_{n+2}+F_{n+1} = F_{n+3}$,

$K(1) = 2 = F_3$,

звідки $K(n) = F_{n+2}$ для всіх $n \in N$.

Бібліографічний список

1. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.:Наука, 1969.
2. Гаврилов, Г. П. Сборник задач по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М.: Наука, 1977.
3. Гутенмахер, В. Л. Введение в комбинаторику : метод. разраб. для учащихся ВЗМШ АПН СССР при МГУ / В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев. – М.: Изд-во АПН СССР, 1989.
4. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. –М.: Вузовская книга, 2001.
5. Карнаух, Т. О. Вступ до дискретної математики : навчальний посібник / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006.
6. Карнаух, Т. О. Теорія графів у задачах : навчальний посібник / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.
7. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. – М.: Наука, 1975.
8. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М.: Мир, 1988.
9. Основи дискретної математики / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – К.: Наукова думка, 2002.
10. Сачков, В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М.: Наука, 1977.
11. Ядренко, М. Й. Дискретна математика: навчальний посібник / М. Й. Ядренко. – К.: ВПЦ "Експрес", 2003.
12. Anderson, I. A first course in discrete mathematics / I. Anderson. – Springer, 2001.