

Ю. В. Міхлін  
Н. О. Кириллова  
І. О. Морачковська

# ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

---

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 17.05.19 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2020

УДК 514.7

М 69

*Рецензенти:*

*К. В. Аврамов*, д-р техн. наук, проф. Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

*Ю. І. Руднєв*, канд. фіз-мат. наук, доц., ХНУ ім. В. Н. Каразіна.

**Міхлін Ю. В.**

**М 69** Елементи диференціальної геометрії : навчальн. посіб. / Міхлін Ю. В. Кириллова Н. О., Морачковська І. О. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2020. – 44 с.

ISBN

У посібнику надано елементи диференціальної геометрії просторових кривих і поверхонь. Надані приклади додатка диференціальної геометрії до механіки. Запропоновані варіанти типових розрахунків для індивідуального виконання.

Призначено для студентів навчально-наукового інженерно-фізичного інституту за спеціальностями 113 «Прикладна математика» та 122 «Комп’ютерні науки».

Іл. 10. Бібліогр.: 17 найм.

УДК 514.7

ISBN

© Ю.В. Міхлін, Н.А.Кириллова,  
І.О. Морачковська, 2019 р.

## ВСТУП

Диференціальна геометрія є однією з базових математичних дисциплін. Моделювання фізичних явищ та процесів на основі диференціальної геометрії кривих і поверхонь є особливо актуальним в зв'язку зі зростаючою кількістю нелінійних задач, що виникають в деяких областях сучасної фізики, механіки та інженерії.

У даному посібнику подано диференціальну геометрію просторових кривих і поверхонь. Перший розділ присвячений вектор-функції скалярного аргументу і правилам її диференціювання, розглянуто дотичну до кривої, а також кривизну кривої і обчислення кривизни. У другому розділі вводиться природний базис в кожній точці кривої, а також аналізується змінність базису у вигляді формул Френе. Третій розділ присвячений диференціальній геометрії поверхонь. Розглянуто рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, вводяться перша і друга диференціальні форми поверхні, нормальна кривина в кожній точці поверхні, визначаються головні кривини і головні напрями. Введення в теорію обвідних сімейства кривих і поверхонь викладено в четвертому розділі.

**РОЗДІЛ 1**  
**ПРОСТОРОВА КРИВА. ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО**  
**АРГУМЕНТУ. ДОТИЧНА ДО ЛІНІЇ.**  
**КРИВИНА КРИВОЇ ТА ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ**

**1.1. Просторова крива. Вектор-функція скалярного аргументу**

Відомо, що крива може бути задана своїми параметричними рівняннями. Це означає, що кожна координата поточного радіус-вектора кривої (або поточної точки кривої) є функцією деякого параметра  $t$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.1)$$

Відповідно поточний радіус-вектор має такий вигляд:

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad (1.2)$$

де  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – одиничні вектори прямокутної декартової системи координат.

Вектор  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  є одночасно і вектором, і функцією; його називають *вектор-функцією* скалярного аргументу. Для подальшого припускаємо, що функції  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  мають неперервні похідні досить високого порядку.

Оскільки  $\bar{r}(t)$  є функцією, для нього можна ввести поняття границі,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}_0,$$

де  $\bar{r}_0$  – деякий сталий вектор, і поняття похідної,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Очевидно, що

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (1.3)$$

**1.2. Правила диференціювання вектор-функції скалярного аргументу**

1. 
$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \frac{d\bar{r}_1}{dt} + \frac{d\bar{r}_2}{dt}.$$

Дійсно, приріст суми функцій складається з приростів доданків  $\Delta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2$ , звідси

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}_2}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} + \frac{d\bar{r}_2}{dt}.$$

$$2. \quad \frac{d}{dt}(\bar{r}\varphi) = \frac{d\bar{r}}{dt}\varphi + \frac{d\varphi}{dt}\bar{r},$$

де  $\varphi(t)$  – диференційована скалярна функція. Дійсно,

$$\Delta(\bar{r}\varphi) = (\varphi + \Delta\varphi)(\bar{r} + \Delta\bar{r}) - \bar{r}\varphi = \Delta\varphi(\bar{r} + \Delta\bar{r}) + \varphi\Delta\bar{r},$$

звідси

$$\frac{\Delta(\bar{r}\varphi)}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}(\bar{r} + \Delta\bar{r}) + \varphi \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t},$$

і після переходу до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$  отримуємо те, що й треба було довести.

$$3. \quad \frac{d}{dt}(\bar{r}_1\bar{r}_2) = \frac{d\bar{r}_1}{dt}\bar{r}_2 + \bar{r}_1 \frac{d\bar{r}_2}{dt},$$

всюди, де розглядаються скалярні добутки векторів. Дійсно,

$$\Delta(\bar{r}_1\bar{r}_2) = (\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_1)(\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2) - \bar{r}_1\bar{r}_2 = \Delta\bar{r}_1(\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2) + \bar{r}_1\Delta\bar{r}_2,$$

звідки отримуємо шукане, поділивши на  $\Delta t$  і переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

3°. *Наслідок.* Нехай  $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{e}$ , де  $\bar{e}$  – одиничний вектор. Тоді  $\bar{r}_1\bar{r}_2 = \bar{e}^2 = 1$ , і з формули диференціювання скалярного добутку маємо

$$\bar{e} \frac{d\bar{e}}{dt} = 0 \tag{1.4}$$

Формула (1.4) означає, що *похідна одиничного вектора ортогональна до цього вектора*. Цей результат буде використаний в подальших розділах.

$$4. \quad \frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) = \frac{d\bar{r}_1}{dt} \times \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \times \frac{d\bar{r}_2}{dt},$$

де знак « $\times$ » являється символом векторного добутку. Дійсно,

$$\Delta(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) = (\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2) - \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = \Delta\bar{r}_1 \times (\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2) + \bar{r}_1 \times \Delta\bar{r}_2.$$

Розділивши на  $\Delta t$  і переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримуємо формулу, що вписана раніше.

5. Для змішаного добутку маємо

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3) = \frac{d\bar{r}_1}{dt} \bar{r}_2 \bar{r}_3 + \bar{r}_1 \frac{d\bar{r}_2}{dt} \bar{r}_3 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 \frac{d\bar{r}_3}{dt}.$$

Доведення опустимо. Його можна легко отримати, застосувавши деякі попередні формули.

6. Диференціювання складної функції. Нехай  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ ,  $s = f(t)$ , тоді

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Дійсно,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

7. Для вектор-функції не мають місця теореми Ролля і Лагранжа. Однак може бути виписаний ряд Тейлора з остаточною членом.

### 1.3. Дотична до лінії

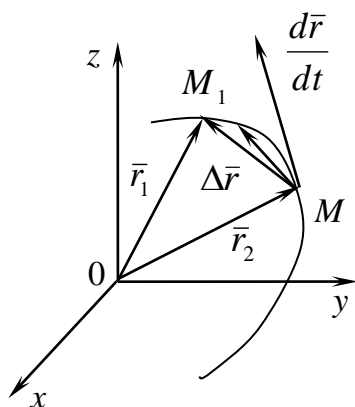


Рисунок 1.1

Розглянемо векторне рівняння кривої (1.2). Виділимо дві точки на кривій  $M$  і  $M_1$  (рис.1.1), які відповідають значенням параметра  $t$  і  $t_1$ . Хорда, що з'єднає точки  $M$  і  $M_1$ , визначає вектор  $\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{MM_1}$ . При переході до границі, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , точка  $M_1$ , рухаючись за дугою  $M_1M$ , в границі збігається з точкою  $M$ . При цьому  $\Delta \bar{r} \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , але відношення  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$  зберігає в

границі кінцеве значення. Січна в граничному випадку займе положення дотичної до лінії в точці  $M$ . На цій дотичній і буде лежати вектор похідної

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Останній результат можна сформулювати у вигляді теореми.

**Теорема.** Похідна від радіус-вектора поточної точки кривої має напрямок дотичної до кривої.

Оскільки границя відношення довжини дуги  $\overset{\cup}{MM_1} = \Delta s$  до довжини хорди  $MM_1$  дорівнює 1, тобто,  $\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta s}{|\Delta \vec{r}|} = 1$ , то

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|.$$

#### 1.4. Кривизна плоскої кривої та її обчислення

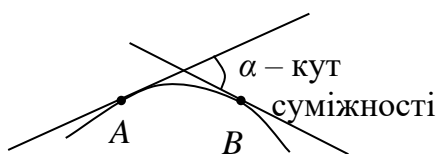


Рисунок 1.2

Ступінь викривленості кривої визначається кутом повороту дотичної до кривої (кутом суміжності) (рис. 1.2). Однак цей кут залежить від довжини дуги кривої  $AB$ . Введемо середню кривизну кривої для заданої дуги  $AB$ ,

$$k_{cp} = \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}.$$

Позначимо:

$$\alpha = \Delta\varphi, \quad \left| \overset{\cup}{AB} \right| = \Delta s,$$

тому запишемо  $k_{cp} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|$ .

Тут  $\Delta s$  – скінченна величина, тому значення середньої кривизни залежить від вибору  $\Delta s$ . Для характеристики степеню викривленості (кривизни) кривої саме в точці необхідно перейти до границі при  $B \rightarrow A$ .

**Означення.** Кривизна кривої в точці  $A$  дорівнює

$$k_A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|. \quad (1.5)$$

Зазначимо, що кривизна завжди вибирається додатною, тому, що вона не повинна залежати від напрямку руху за кривою.



Для отримання формули обчислення кривизни кривої, що задана рівнянням  $y = f(x)$  в прямокутних декартових координатах, використаємо зображення на рис. 1.3.

Виходячи з формули (1.5), запишемо

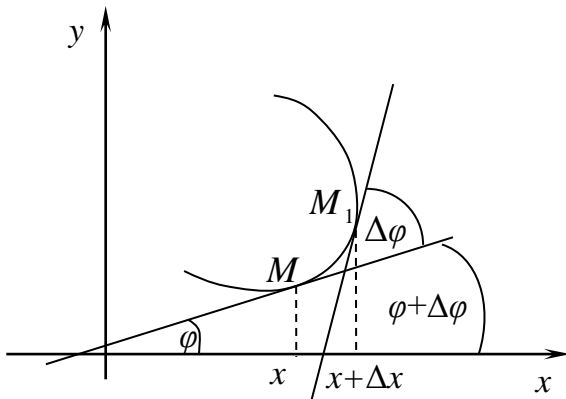


Рисунок 1.3

$$k_M = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \left| \frac{dx}{ds} \right|.$$

Якщо згадати геометричний зміст похідної, тобто  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ , маємо

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{dy}{dx} \right), \text{ тоді } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2} \text{ (тут і}$$

далі  $y' = \frac{dy}{dx}$ ), крім того,  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ .

Остаточно,

$$k_M = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|. \quad (1.6)$$

**Приклад 1.** Парабола  $y^2 = 2px$ . Тут нескладні обчислення дають  $k|_{x=0, y=0} = \frac{1}{p}$ .

**Приклад 2.** Пряма  $y = ax + b$ , тут  $y' = 0$  і  $k = 0$  в довільній точці.

**Приклад 3.** Коло радіуса  $R$ . Тут зручніше використовувати не формулу (1.5), а вираз для середньої кривини.

$$k_{cp.} = \frac{\alpha}{\left| \overset{\cup}{AB} \right|} = \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}.$$

Перехід до границі не змінить цього значення, отже, кривина в довільній точці кола дорівнює  $\frac{1}{R}$ .

У багатьох задачах і теоретичних викладках окрім кривини вводять радіус кривини

$$R = \frac{1}{k}. \quad (1.7)$$

## 1.5. Кривизна просторової кривої та її обчислення

Визначення кривизни за формулою (1.5) має місце і у просторі. В якості основного «природного параметра» беремо довжину дуги кривої  $s$ , так що поточний радіус-вектор кривої записуємо як

$$\bar{r} = x(s)\bar{i} + y(s)\bar{j} + z(s)\bar{k}.$$

Розглянемо модуль вектора  $\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ , а саме

$$|\bar{\sigma}| = \left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AB}}{\overset{\cup}{AB}} \right| = 1,$$

тому  $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = |\bar{\sigma}| = 1$  в довільній точці кривої.

Нехай вектор  $\bar{\sigma}$  направлено за дотичною до кривої в деякій точці  $A$  (рис. 1.4). Задаючи приріст параметра  $\Delta s$ , переходимо до точки  $B$ , а вектор  $\frac{d\bar{r}}{ds}$ , що направлено за дотичною до кривої в точці  $B$ , позначимо через  $\bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}$ . Але ми отримали, що  $|\bar{\sigma}| = |\bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}| = 1$ , тому  $\triangle MNB$  є рівнобедреним. Позначаючи кут повороту дотичної через  $\Delta \varphi$ , записуємо

$$|\Delta \bar{\sigma}| = 2|\bar{\sigma}| \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|.$$

Звідси маємо

$$\left| \frac{\Delta \bar{\sigma}}{\Delta s} \right| = \frac{\left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|}{\left| \frac{\Delta \varphi}{2} \right|} = \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|,$$

отже, в границі, при  $\Delta s \rightarrow 0$ , знаходимо, зв'язуючи з означенням кривизни, що

$$\left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = k,$$

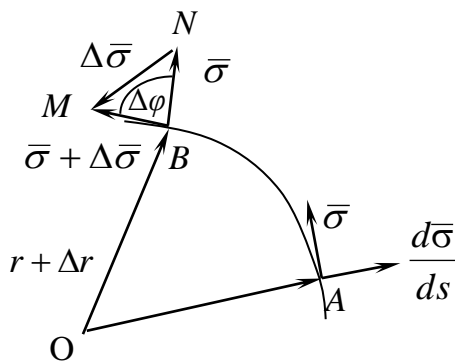


Рисунок 1.4

З іншого боку, маємо

$$\left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|.$$

Отже, ми отримали наступну формулу для обчислення кривини:

$$k = \left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2} \quad (1.8)$$

Далі, оскільки  $\bar{\sigma}$  – одиничний вектор, то з формули (1.4) випливає, що вектор  $\bar{\sigma}$  є ортогональним до вектора, що направлено за дотичною,  $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ , отже, цей останній вектор лежить в нормальній площині до кривої в заданій точці. Відповідний напрямок називають напрямком головної нормалі. Позначуючи одиничний вектор головної нормалі через  $\bar{n}$ , записуємо так звану *першу формулу Френе*:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = k \bar{n}, \quad (1.9)$$

де коефіцієнт пропорційності  $k$  є кривизна. Оскільки  $|\bar{n}| = 1$ , то  $k = \left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right|$ . (Напрямок головної нормалі  $\bar{n}$  вибираємо таким чином, щоб кривизна  $k$  була додатною).

Перейдемо до обчислення кривизни в більш загальному випадку, коли радіус-вектор кривої є функцією довільного параметра  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Справедлива рівність

$$\left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 = \left( \frac{d\bar{r}}{ds} \right)^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (1.10)$$

оскільки раніше було встановлено, що  $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$ .

Диференціюємо рівність (1.10) за параметром  $t$ , маємо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (1.11)$$

Знову піднесемо до квадрата, та отримуємо

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 \quad (1.12)$$

Тепер обчислимо

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \quad (1.13)$$

і

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} + \frac{d\bar{r}}{dt} \left[ \frac{-\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \right] \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Звідси

$$k^2 = \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 - 2 \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \frac{d\bar{r}}{dt} \left(\frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt}\right)}{\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]^3}$$

В останню формулу, виключаючи природний параметр  $s$ , підставимо замість  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ,  $\left(\frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt}\right)$  і  $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2$  відповідні вирази з формул (1.10), (1.11) та (1.12).

Отримуємо

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2 - 2 \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right]^3} = \\ &= \frac{\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right]^3} = \frac{\left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]^2}{\left[\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right]^3}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

де знак « $\times$ » означає векторний добуток. В тому, що  $(\bar{r}' \times \bar{r}'')^2 = (y'z'' - z'y'')^2 + (x'z'' - z'x'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2$  і  $(\bar{r}'')^2 (\bar{r}')^2 - (\bar{r}'' \bar{r}')^2$

співпадають, можна легко переконатися безпосереднім обчисленням (тут для стислості введений символ  $'$ ) як знак диференціювання за параметром  $t$ ). У випадку якщо  $t = s$ , з (1.13) маємо

$$k^2 = \left[ \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right]^2. \quad (1.15)$$

Якщо розглянута крива являє собою траєкторію руху деякої матеріальної точки, а  $t$  – час, то, вводячи вектори швидкості  $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  і прискорення

$\bar{W} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ , можна переписати формулу (1.14) у вигляді

$$k^2 = \frac{(\bar{V} \times \bar{W})^2}{V^6}.$$

**Приклад.** Гвинтова лінія, яка задана рівняннями  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = at$ , де  $a, m$  – деякі сталі. Напишемо вектори

$$\frac{d\bar{r}}{dt}(-a \sin t, a \cos t, am) \text{ та } \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Тоді

$$\left[ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 \right]^3 = (a^2(1+m^2))^3;$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(a^2 m \sin t) - \bar{j}(a^2 m \cos t) + \bar{k}a^2,$$

а також

$$\left( \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right)^2 = a^4(1+m^2).$$

Отже, за формулою (1.14) маємо

$$k^2 = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2},$$

тобто кривина гвинтової лінії має однакове значення в усіх точках даної кривої.

Зазначимо, що формулу (1.13) можна переписати як

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Після диференціювання маємо

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (1.16)$$

Якщо крива задана рівняннями, що залежать від довільного параметра  $t$ , то рівняння (1.16) дає можливість визначити невідомий вектор  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ , а потім і кривизну кривої як модуль цього вектора, це можливо тому, що  $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\sigma}$  – це відомий одиничний вектор дотичної, а інші члени рівняння (1.16) можна досить легко обчислити. Таким чином, для обчислення кривизни можливо використати як формулу (1.14), так і формулу (1.16).

## РОЗДІЛ 2 ФОРМУЛИ ФРЕНЕ

### 2.1. Формули Френе. Тригранник Френе

У попередніх параграфах було введено два одиничних ортогональних вектори, а саме: вектор  $\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ , спрямований по дотичній до кривої, та вектор головної нормалі  $\bar{n}$ , який визначається за першою формулою Френе (1.9). Введемо також одиничний вектор  $\bar{b}$ , ортогональний векторам  $\bar{\sigma}$  і  $\bar{n}$ , як векторний добуток  $\bar{\sigma}$  на  $\bar{n}$

$$\bar{b} = \bar{\sigma} \times \bar{n}. \quad (2.1)$$

Нормаль, що визначається вектором  $\bar{b}$ , називається *бінормаллю*. Очевидно, що отримана права трійка ортогональних векторів. Цей рухливий базис (або репер), який супроводжує точку  $M$  при її русі вздовж кривої, називається *рухомим*, а також *природним базисом* або *репером Френе* (Френе – французький геометр XIX століття, який у 1847 році першим написав формули для похідних по довжині дуги трьох базисних векторів  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ ).

Площина, що проходить через вектори  $\bar{\sigma}$  і  $\bar{n}$ , називається *стичною*, через вектори  $\bar{n}$  і  $\bar{b}$  – *нормальною*, а через вектори  $\bar{\sigma}$  і  $\bar{b}$  – *спрямною*. Ці три площини утворюють так званий *природний тригранник*, або *тригранник Френе* (рис. 2.1).

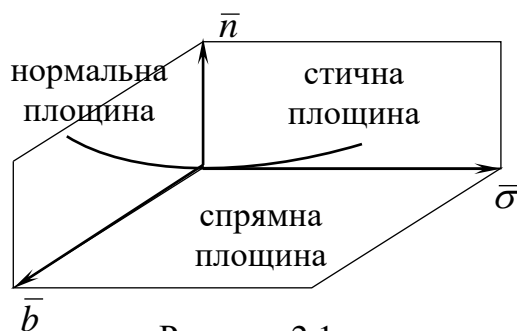


Рисунок 2.1

Рівняння (1.9) визначає похідну  $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ . Для того, щоб отримати похідні від векторів  $\bar{n}$  і  $\bar{b}$ , звернемося до формули (2.1). Диференціюючи за  $s$  і використовуючи формул (1.9), маємо

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \times \bar{n} + \bar{\sigma} \times \frac{d\bar{n}}{ds} = k \bar{n} \times \bar{n} + \bar{\sigma} \times \frac{d\bar{n}}{ds} = \bar{\sigma} \times \frac{d\bar{n}}{ds}.$$

Звідси випливає, що вектори  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  і  $\bar{\sigma}$  ортогональні. Крім того,  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  ортогональний до  $\bar{b}$  (див. п.3° в 1.2). Таким чином, напрямок вектора  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  співпадає з напрямком вектора головної нормалі  $\bar{n}$ . Тобто

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\chi \bar{n}. \quad (2.2)$$

Це друга формула Френе, де коефіцієнт  $\chi$ , що називається *скрутом кривої*, характеризує змінність вектора  $\bar{b}$  по довжині дуги, тобто поворот стичної площини. Якщо  $\chi = 0$ , то крива лежить в цій площині.

Тепер розглянемо  $\frac{d\bar{n}}{ds}$ . Цей вектор є ортогональним до  $\bar{n}$  (за формулою (1.4)), тому в розкладанні по ортогональному базису  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ ,

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = a\bar{\sigma} + b\bar{n} + c\bar{b}, \quad (2.3)$$

маємо, що коефіцієнт  $b = 0$ .

Диференціюємо рівність  $\bar{\sigma} \bar{n} = 0$ ,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \bar{n} + \bar{\sigma} \frac{d\bar{n}}{ds} = 0.$$

В останнє співвідношення підставимо вирази  $\frac{d\bar{n}}{ds}$  з (2.3) і  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  з (1.9).

Отримуємо рівність  $k + a = 0$ , звідси коефіцієнт  $a = -k$ .

Оскільки  $\bar{b} = \bar{\sigma} \times \bar{n}$ , маємо

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \times \bar{n} + \bar{\sigma} \times \frac{d\bar{n}}{ds} = K\bar{n} \times \bar{n} + \bar{\sigma} \times (a\bar{\sigma} + c\bar{b}) = c\bar{\sigma} \times \bar{b} = -c\bar{n}. \quad (2.4)$$

С іншого боку, за другою формулою Френе,  $\frac{d\bar{b}}{ds} = -\chi \bar{n}$ .

Таким чином,  $c = \chi$ , і остаточно отримуємо *третю формулу Френе*:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -k\bar{\sigma} + \chi \bar{b}. \quad (2.5)$$



За означенням кривизна  $k > 0$ , але скрут кривої  $\chi$  може бути будь-якого знаку. Для обчислення скриту кривої використовуємо другу формулу Френе  $\frac{d\bar{b}}{ds} = -\chi\bar{n}$ . Помноживши скалярно на  $\bar{n}$  ліву і праву частини рівності, одержимо

$$-\chi = \frac{d\bar{b}}{ds} \bar{n}.$$

З урахуванням рівності  $\frac{d\bar{b}}{ds} = \bar{\sigma} \times \frac{d\bar{n}}{ds}$  (див. формулу (2.4)), маємо

$$-\chi = \left( \bar{\sigma}, \frac{d\bar{n}}{ds}, \bar{n} \right),$$

де в круглих дужках записано змішаний добуток трьох векторів. Оскільки

$\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ , а з першої формули Френе випливає, що  $\bar{n} = \frac{1}{k} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ , то

$$\chi = \left( \bar{\sigma} \bar{n} \frac{d\bar{n}}{ds} \right) = \frac{1}{k^2} \left( \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right) = \frac{(\bar{r}' \bar{r}'' \bar{r}''')}{[\bar{r}' \times \bar{r}'']^2}, \quad (2.6)$$

де в даному випадку штрих означає диференціювання по  $s$ .

## 2.2 Аналіз системи рівнянь Френе

Система рівнянь Френе (1.9), (2.2) і (2.5) характеризує переміщення тригранника Френе, який визначається векторами  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ , вздовж заданої кривої. При описі деяких фізичних процесів, наприклад, в задачах розповсюдження хвиль, замість нерухомої координатної системи з успіхом використовують рухливий (природний) базис, складений із зазначених векторів, який переміщається уздовж траєкторії руху разом з деякою заданою точкою матеріального середовища.

Систему рівнянь Френе розіб'ємо на дві підсистеми, перша з яких записується при  $\chi=0$ , а друга при  $k=0$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = k\bar{n} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{\sigma}, \\ \frac{d\bar{b}}{ds} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = 0 \\ \frac{d\bar{n}}{ds} = \chi\bar{b} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} = -\chi\bar{n} \end{cases}. \quad (2.7)$$

У першій підсистемі вектор бінормалі  $\bar{b}$  є постійним і визначає вісь обертання тригранників Френе при русі вздовж кривої; у другій підсистемі вісь обертання – дотична, яка визначається фіксованим вектором  $\bar{\sigma}$ . Таким чином, в першому випадку отримуємо рух в стичній площині, причому швидкість обертання визначається коефіцієнтом  $k$ , а в другому – в нормальній площині, при цьому швидкість обертання визначається коефіцієнтом  $\chi$ . В силу лінійності рівнянь повну систему рівнянь отримуємо складанням двох підсистем (2.7). Відповідно повна швидкість обертання складається з двох компонент

$$\bar{\Phi} = k\bar{b} + \chi\bar{\sigma}.$$

Відзначимо також, що система рівнянь Френе може бути в деяких випадках інтегрована, серед цих випадків виділимо найпростіші:

1)  $k = 0$ , тоді  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 = \text{const}$ . Оскільки  $\bar{\sigma}_0 = \frac{d\bar{r}}{ds}$ , то  $\bar{r} = \bar{\sigma}_0 + \bar{r}_0$ .

Впроваджуючи координати векторів  $\bar{\sigma}_0(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\bar{r}(x, y, z)$ ,  $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ , отримуємо, виключив параметр  $s$ , відомі рівняння прямої лінії

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

2)  $\chi = 0$ , тоді  $\bar{b} = \bar{b}_0 = \text{const}$ , при цьому отримуємо криву, що розміщується в площині.

3) Гвинтова лінія (див. приклад в розділі 1.6). Було показано, що в даному випадку кривизна  $k = \text{const}$ . Обчислення показують, що скрут кривої  $\chi = \text{const}$ . Виявляється, що це єдина лінія, у якій скрут кривої пропорційне кривині.

У загальному випадку три рівняння Френе пов'язують дев'ять скалярних компонент трьох векторів  $\bar{\sigma}, \bar{n}, \bar{b}$ . Однак існують ще шість умов, накладені на ці компоненти. Це умови ортогональності векторів, а також умови, що впливають з того факту, що ці вектори одиничні

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{\sigma} \cdot \bar{b} = \bar{n} \cdot \bar{b} = 0, \quad \bar{\sigma}^2 = \bar{n}^2 = \bar{b}^2 = 1. \quad (2.8)$$

Загальна кількість рівнянь ((1.9), (2.2),(2.5) и (2.8)) дорівнює дев'яти, що збігається з числом скалярних компонент векторів  $\bar{\sigma}, \bar{n}, \bar{b}$ . Крім того, в рівняння Френе входять кривизна  $k$  і скрут кривої  $\chi$ . Теорему про існування та єдиність розв'язку системи рівнянь Френе, доповненої співвідношеннями (2.8), сформулюємо без доказу.

**Теорема.** *Якщо задано кривизну та скрут кривої як неперервні функції довжини дуги  $s$ , то існує єдиний розв'язок системи рівнянь Френе (1.9), (2.2), (2.5)  $\bar{\sigma}(s)$ ,  $\bar{n}(s)$  і  $\bar{b}(s)$ , що задовольняє співвідношенням (2.8) і наступним початковим умовам: в даній точці  $M_0|_{s=s_0}$  задано природний тригранник Френе  $\bar{\sigma}(s_0)$ ,  $\bar{n}(s_0)$  і  $\bar{b}(s_0)$ . Цей розв'язок визначено в деякому околі точки  $M_0$ .*

У свою чергу, отриманий природний тригранник Френе однозначно визначає просторову криву, а саме, радіус-вектор  $\vec{r}(x(s), y(s), z(s))$ .

### Нотатки з історії диференціальної геометрії

Диференціальна геометрія виникла та розвивалась в тісному зв'язку з математичним аналізом, який сам в значній степені виріс з задач геометрії. **Теорія просторових кривих** була заснована А.К. Клеро в його праці «Про криві двоякої кривизни» (1731) та розвинута потім в трудах Ейлера (1786), Монжа (1771), Ланкре (1806), Коші, Серре (1851), Френе (1852) та інших математиків 18 та 19 сторічч.

**РОЗДІЛ 3**  
**ПОВЕРХНЯ В ПРОСТОРИ.**  
**ПЕРША І ДРУГА КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ ПОВЕРХНІ**

**3.1. Поверхня в просторі. Дотична площина і нормаль до поверхні**

Відомо, що поверхня в просторі визначається рівнянням

$$P(x, y, z) = 0, \quad (3.1)$$

яке зв'язує прямокутні декартові координати  $x, y, z$ . Інший спосіб аналітичного опису поверхні – використання параметричних рівнянь

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \zeta(u, v). \quad (3.2)$$

Виключаючи параметри  $u, v$ , ми повертаємося до рівняння (3.1), що зв'язує змінні  $x, y, z$ .

Нехай задана деяка точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  на поверхні. Візьмемо довільну криву, що лежить на поверхні і проходить через цю точку. Нехай крива визначається рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Підставляючи ці співвідношення в (3.1) і диференціюючи по параметра  $t$ , отримуємо

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (3.3)$$

Рівність (3.3) можна розглядати як умову ортогональності вектора  $\vec{r}'\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ , напрямленого по дотичній до кривої, а значить, і до поверхні, до вектора  $\vec{N}\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right) = \text{grad } P$ .

Оскільки крива обрана довільно, то вектор  $\vec{N}$  ортогональний до всіх дотичних до поверхні, що проходять через точку  $M_0$  (ці дотичні заповнюють дотичну площину). Вектор  $\vec{N}$  зветься нормальним вектором площини. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці  $M_0$  мають вигляд

$$P'_x(x - x_0) + P'_y(y - y_0) + P'_z(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{P'_x} = \frac{y-y_0}{P'_y} = \frac{z-z_0}{P'_z}, \quad (3.4)$$

де всі похідні обчислюються в точці  $M_0$ .

Зауважимо, що все тут сказане щодо дотичної площини і нормалі відноситься до неособливих точок поверхні. Особливі точки поверхні, для яких виписані формули не мають сенсу, визначаються рівняннями

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Тепер звернемося до параметричних рівнянь поверхні. Підставляючи співвідношення (3.2) в рівняння (3.1) і диференціюючи за  $u, v$ , маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} \varphi'_u + \frac{\partial P}{\partial y} \psi'_u + \frac{\partial P}{\partial z} \zeta'_u = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x} \varphi'_v + \frac{\partial P}{\partial y} \psi'_v + \frac{\partial P}{\partial z} \zeta'_v = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що

$$P'_x = K(\psi'_u \zeta'_v - \psi'_v \zeta'_u), \quad P'_y = K(\varphi'_u \zeta'_v - \varphi'_v \zeta'_u), \quad P'_z = K(\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u),$$

де  $K$  – деяка стала. Останні рівності дають можливість записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, наданих формулами (3.4), в параметричному вигляді. При цьому константа  $K$  скорочується.

Параметри  $u, v$  визначають положення точки на поверхні, тому їх називають криволінійними координатами на поверхні. Координатні лінії  $u = \text{const}$  або  $v = \text{const}$  в загальному випадку будуть кривими лініями. Лінія  $v = \text{const}$ , вздовж якої змінюється тільки параметр  $u$ , називається координатною лінією  $u$ , а лінія  $u = \text{const}$ , вздовж якої змінюється тільки параметр  $v$  – координатною лінією  $v$ .

### 3.2. Перша квадратична форма поверхні. Диференціальний елемент площі поверхні

Розглянемо квадрат диференціала довжини дуги будь-якої лінії на поверхні

$$(ds)^2 = d\bar{r}^2 = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv \right)^2.$$

Підставимо в цю рівність вирази  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \bar{k}$  і

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \bar{k}$ , виділимо коефіцієнти при  $du^2, dudv, dv^2$ , та

отримаємо

$$dS^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2, \quad (3.5)$$

де

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \quad (3.6)$$

Як видно з останніх формул, коефіцієнти  $E, F, G$  не залежать від вибору лінії на поверхні, а залежать тільки від вигляду поверхні та від координат точки.

Квадратична форма  $ds^2$ , що визначена в (3.5), називається *першою квадратичною формою поверхні* (або першою диференціальною формою Гаусса, а також лінійним елементом поверхні). Це основна метрична форма поверхні. Вона інваріантна в тому сенсі, що не змінюється при переміщенні поверхні як твердого тіла, і не залежить від перетворення декартової системи координат.

Якщо позначити

$$|\bar{r}'_u| = a, \quad |\bar{r}'_v| = b,$$

то з (3.6) випливає, що

$$E = a^2, \quad G = b^2, \quad F = \bar{r}'_u \bar{r}'_v = ab \cos \gamma,$$

де  $\gamma$  – кут між векторами  $\bar{r}'_u$  і  $\bar{r}'_v$ , тобто кут, під яким перетинаються координатні лінії. Крім того,

$$EG - F^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \gamma) = a^2 b^2 \sin^2 \gamma. \quad (3.7)$$

Отже, коефіцієнти  $E, G$  і дискримінант  $EG - F^2$  – додатні, а квадратична форма  $ds^2$  додатно визначена. Коефіцієнт  $F$  може бути як додатнім, так і від’ємним в залежності від знаку  $\cos\gamma$ , тобто в залежності від того, чи буде координатний кут гострим чи тупим. Якщо  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , то координатні лінії ортогональні, і  $F = 0$ .

Зауважимо також, що

$$|\bar{N}| = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = ab|\sin\gamma| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (3.8)$$

### 3.3. Кут перетину двох ліній на поверхні

Розглянемо дві лінії на поверхні в точці  $M(u_0, v_0)$ . Параметри, що відносяться до цих двох ліній, позначимо відповідно  $u_1, v_1, s_1$  і  $u_2, v_2, s_2$ . Тоді одиничні вектори дотичних до цих ліній у спільній точці  $M$  будуть

$$\frac{d\bar{r}}{ds_1} = \bar{r}'_u \frac{du_1}{ds_1} + \bar{r}'_v \frac{dv_1}{ds_1} \quad \text{і} \quad \frac{d\bar{r}}{ds_2} = \bar{r}'_u \frac{du_2}{ds_2} + \bar{r}'_v \frac{dv_2}{ds_2}.$$

Під кутом  $\varphi$  між лініями в точці перетину  $M$  будемо розуміти кут між векторами дотичних до цих ліній. Обчислимо

$$\cos\varphi = \frac{d\bar{r}}{ds_1} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds_2} = (\bar{r}'_u)^2 \frac{du_1}{ds_1} \frac{du_2}{ds_2} + \bar{r}'_u \bar{r}'_v \left( \frac{du_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2} + \frac{dv_1}{ds_1} \frac{du_2}{ds_2} \right) + (\bar{r}'_v)^2 \frac{dv_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2}.$$

Використовуючи позначення попереднього параграфа, запишемо

$$\cos\varphi = \frac{E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2}{ds_1 ds_2}. \quad (3.9)$$

Умовою ортогональності ліній є  $\cos\varphi = 0$ , або

$$E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2 = 0. \quad (3.10)$$

### 3.4. Диференціал площі поверхні

Розглянемо координатну сітку ліній на поверхні і криволінійний чотирикутник, утворений лініями з постійними значеннями координат  $u$ ,  $u+\Delta u$ ,  $v$  і  $v+\Delta v$ , що перетинаються в точках  $M, M_1, M_2, M_3$  (рис. 3.1). Виділяючи головні частини приростів

$$\overline{MM_1} = \bar{r}(u + \Delta u, v) - \bar{r}(u, v) \approx \bar{r}'_u du$$

$$\overline{MM_2} = \bar{r}(u, v + \Delta v) - \bar{r}(u, v) \approx \bar{r}'_v dv$$

та приблизно (при малих  $\Delta u, \Delta v$ ) замінюючи криволінійний чотирикутник паралелограмом, побудованим на векторах  $\bar{r}'_u du$  і  $\bar{r}'_v dv$ , як це показано на рис. 2.1, запишемо площу паралелограма у вигляді

$$dS = |\bar{r}'_u du \times \bar{r}'_v dv| = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| |du dv| = |\bar{r}'_u| |\bar{r}'_v| |\sin \gamma| du dv.$$

З урахуванням формули (3.7) знаходимо, що

$$dS = \sqrt{EG - F^2} |du dv|. \quad (3.11)$$

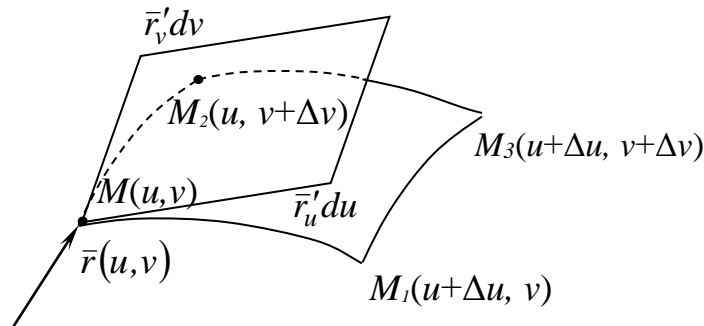


Рисунок 3.1

Оскільки криволінійний чотирикутник мало відрізняється від паралелограма при  $du, dv \rightarrow 0$ , величину  $dS$  називають *диференціалом площі поверхні*

**Приклад 1. Гелікоїд.** Цю поверхню можна отримати при гвинтовому русі відрізка прямої, паралельного площині  $XOY$  і перетинаючого вісь  $OZ$  (вісь гвинтового руху). Проекція відрізка прямої на площину  $XOY$  рівномірно



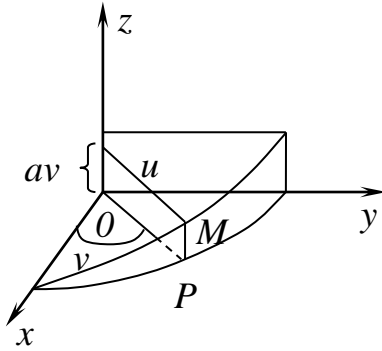


Рисунок 3.2

обертається навколо початку координат, а точка перетину з віссю  $OZ$  рівномірно переміщується по цій осі (рис. 3.2).

Записуємо вектори

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = u \cos v \bar{i} + u \sin v \bar{j} + av\bar{k},$$

$$\bar{r}'_u = \cos v \bar{i} + \sin v \bar{j} + 0\bar{k},$$

$$\bar{r}'_v = -u \sin v \bar{i} + u \cos v \bar{j} + a\bar{k},$$

$$\bar{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & a \end{vmatrix} = a \sin v \bar{i} - a \cos v \bar{j} + u\bar{k}$$

Тоді  $E = (\bar{r}'_u) = 1$ ,  $F = \bar{r}'_u \bar{r}'_v = 0$ ,  $G = (\bar{r}'_v) = u^2 + a^2$ , лінійний елемент

$$dS^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Координатні лінії тут записуються таким чином:

- лінія  $u = \text{const}$  – гвинтова лінія; при повному обороті (на кут  $2\pi$ ) проекції  $OP$  точка  $M$  підіймається на  $2\pi a$ , де  $a$  – шаг гвинта;
- лінія  $v = \text{const}$  в усіх точках має одну й ту саму аплікату  $z = av$ ; проекція лінії на площину  $XOY$  визначається рівнянням  $y = x \text{tg } v$ .

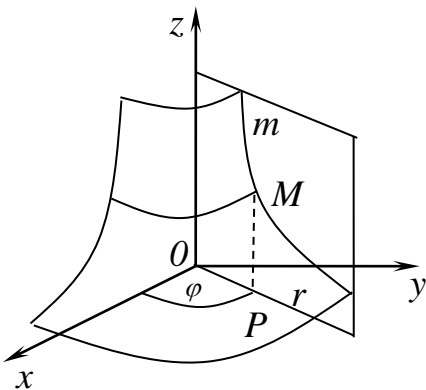


Рисунок 3.3

**Приклад 2. Поверхня обертання.** Нехай в площині, що проходить через вісь  $Oz$ , задана лінія  $m$

$$z = f(r),$$

де  $z$  і  $r$  – прямокутні декартові координати в цій площині, причому вісь  $Or$  лежить на перетині цієї площини з площиною  $XOY$ . Нехай тепер  $m$  обертається навколо вісі  $Oz$ . Введемо на площині  $XOY$  полярні координати  $r, \varphi$ , отримуємо для точки

$P$  (проекції точки  $M$ , що належить лінії  $m$ ) наступні координати, які при обертанні лінії будуть змінюватися разом із кутом обертання  $\varphi$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Точка  $M$  має ці дві координати і ще третю координату

$$z = f(r).$$

Таким чином, радіус-вектор довільної точки, що належить поверхні обертання, має вид

$$\bar{r} = r \cos \varphi \bar{i} + r \sin \varphi \bar{j} + f(r) \bar{k},$$

$$\bar{r}'_r = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j} + f'(r) \bar{k}, \quad \bar{r}'_\varphi = -r \sin \varphi \bar{i} + r \cos \varphi \bar{j} + 0 \bar{k},$$

$$\bar{N} = \bar{r}'_r \times \bar{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & f'(r) \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -r f'(r) \cos \varphi \bar{i} - r f'(r) \sin \varphi \bar{j} + r \bar{k}.$$

Тоді

$$E = (\bar{r}'_r)^2 = 1 + [f'(r)]^2, \quad F = \bar{r}'_r \cdot \bar{r}'_\varphi = 0, \quad G = (\bar{r}'_\varphi)^2 = r^2,$$

лінійний елемент

$$ds^2 = [1 + [f'(r)]^2] dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Координатні лінії утворюють ортогональну сітку, тому що  $F = 0$ . Лінії  $\varphi = \text{const}$  називаються меридіанами (вони утворюються в перерізі поверхні площинами, що проходять через вісь обертання). Лінії  $r = \text{const}$  називаються паралелями (вони утворюються в перерізі поверхні площинами, перпендикулярними осі  $Oz$ ), це окружності з центрами на осі  $Oz$ .

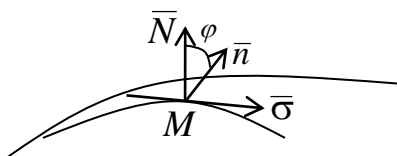
### 3.5. Друга квадратична форма поверхні. Нормальні кривизни.

#### Класифікація точок поверхні

Розглянемо будь-яку лінію на поверхні. Нехай в точці  $M$  вектор  $\bar{N}$  – це одиничний вектор нормалі до поверхні, а вектори  $\bar{\sigma}$  і  $\bar{n}$  – одиничні вектори дотичної і головної нормалі до цієї лінії. Використаємо тепер першу формулу Френе,  $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = k \bar{n}$ . Помноживши ліву і праву частини рівності скалярно на  $\bar{N}$ ,

маємо

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \bar{N} = k(\bar{n}, \bar{N}) = k \cos \varphi, \quad (3.12)$$



де  $\varphi$  – кут між векторами  $\bar{n}$  і  $\bar{N}$ . Так як

Рисунок 3.4

$$\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds},$$

то

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{r}''_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\bar{r}''_{uv} \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right) + \bar{r}''_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \bar{r}'_u \frac{d^2u}{ds^2} + \bar{r}'_v \frac{d^2v}{ds^2}. \quad (3.13)$$

Величину  $\cos\varphi \cdot k$  в (3.2) позначають через  $k_n$  і називають *нормальною кривизною поверхні* в точці  $M$ ,

$$k_n = \bar{N} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}, \quad (3.14)$$

де  $L = \bar{N} \cdot \bar{r}''_{uu}$ ,  $M = \bar{N} \cdot \bar{r}''_{uv}$ ,  $N = \bar{N} \cdot \bar{r}''_{vv}$ . При обчисленні скалярного добутку векторів  $\bar{N}$  і  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$  (останній вектор визначається рівністю (3.13)), маємо  $\bar{N} \cdot \bar{r}'_u = \bar{N} \cdot \bar{r}'_v = 0$ , тому що вектори  $\bar{r}'_u$  і  $\bar{r}'_v$  лежать в дотичній площині до поверхні. Врахуємо, що одиничний вектор нормалі (див. п.3.4)

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Тоді введені вище коефіцієнти можна записати інакше:

$$L = \frac{(\bar{r}''_{uu}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\bar{r}''_{uv}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\bar{r}''_{vv}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (3.15)$$

де чисельники формул є змішані добутки векторів, а коефіцієнти  $E$ ,  $G$  і  $F$  були визначені раніше, формулами (3.6).

Вираз, що стоїть в чисельнику правої частини формули (3.14), називається *другою квадратичною формою* поверхні (або *другою диференціальною формою Гауса*).

$$d^2\Phi = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) dudv + N(u, v) dv^2, \quad (3.16)$$

отже,

$$k_n = \frac{d^2\Phi}{ds^2}$$

і нормальна кривина дорівнює відношенню двох квадратичних форм поверхні.

Друга квадратична форма поверхні і нормальна кривина не залежать від вибору декартової системи координат, або від вибору криволінійних координат на поверхні. Оскільки чисельник і знаменник виразу (3.14) - це квадратичні форми щодо  $du, dv$ , то нормальна кривина  $k_n$  залежить тільки від відношення  $du : dv$ , тобто, нормальна кривина визначається дотичною до обраної кривої на поверхні. Звідси випливає теорема.

**Теорема.** *Всі лінії на поверхні, що проходять через точку  $M$  поверхні зі спільною дотичною мають одну і ту ж нормальну кривину.*

Відзначимо також, що в так званих нормальних перетинах поверхні, що проходять через вектор нормалі  $\bar{N}$ , напрямком цього вектора збігається з напрямком головної нормалі до лінії на поверхні, що лежить в цьому перетині, так що нормальна кривина збігається з кривизною цієї лінії. Зазвичай радіус кривини нормального перетину поверхні береться з протилежним знаком.

Оскільки  $ds^2 > 0$ , то знак нормальної кривини  $k_n = \frac{d^2\Phi}{ds^2}$  повністю визначається знаком чисельника, тобто знаком другою квадратичної форми. Поділимо вираз  $d^2\Phi$  на  $dv^2$  (при  $dv^2 \neq 0$ , в противному випадку потрібно ділити на  $du^2$ ) і позначимо  $z = \frac{du}{dv}$ ; дослідимо знак отриманого квадратного тричлена  $z^2L + z \cdot 2M + N$ . Якщо  $L \neq 0$ , то, розділимо на  $L$  і дослідимо вираз

$$z^2 + \frac{2M}{L}z + \frac{N}{L} = \left(z + \frac{M}{L}\right)^2 + \left(\frac{NL - M^2}{L^2}\right).$$

1) Якщо  $M^2 - NL < 0$ , то тоді отримано квадратичний вираз, а значить і  $d^2\Phi$  додатні. У цьому випадку в розглянутій точці знак нормальної кривини  $k_n$  один і той же у всіх напрямках і визначається тільки знаком  $L$ , а головні нормалі всіх кривих на поверхні, що проходять через цю точку, спрямовані в одну сторону. Така точка називається *еліптичною*.

2) Якщо  $M^2 - NL > 0$ , то, в залежності від відношення  $\frac{du}{dv}$ , друга квадратична форма  $d^2\Phi$  може виявитися як додатною, так і від'ємною, і нормальна кривина  $k_n$  також може змінювати знак в різних напрямках. Така точка поверхні називається *гіперболічною*.

3) Якщо  $M^2 - NL = 0$ , то  $d^2\Phi$  і  $k_n$  не змінюють знак, але обертаються в нуль, коли  $\frac{du}{dv} = -\frac{M}{L}$ . Ця точка поверхні називається *параболічною*.

### 3.6. Головні напрямки та головні кривизни

Серед нескінченної кількості значень нормальної кривизни в даній точці поверхні виділимо екстремальні. Це так звані *головні кривизни*.

Для визначення екстремальних значень нормальної кривизни використовуємо вираз (3.14). Помноживши на знаменник, отримуємо

$$-k_n(E du^2 + 2F dudv + G dv^2) + L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = 0, \quad (3.17)$$

Відношення  $\frac{du}{dv}$  можна змінювати, змінив чисельник  $\xi = du$  при незмінному знаменнику, або знаменник  $\eta = dv$  при незмінному чисельнику. Тому ми можемо диференціювати рівність (3.17) і отримати часткову похідну за змінною  $\xi$  або за змінною  $\eta$ . Використовуємо необхідні умови екстремуму, дорівнюючі ці частинні похідні до нуля. Отримуємо після скорочення на 2:

$$\begin{aligned} L du + M dv - k_n(E du + F dv) &= 0, \\ M du + N dv - k_n(F du + G dv) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Виключаючи з рівнянь (3.18) величину  $k_n$ , отримуємо наступне рівняння:

$$\begin{vmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0, \quad (3.19)$$

яке визначає відношення  $\frac{du}{dv}$  і значення  $k_n$  в точці екстремуму.

Ті напрямки в точці поверхні, які дають екстремум нормальній кривині, називаються *головними напрямками*.

**Теорема.** У кожній точці будь-якій поверхні (крім сфери) існують в дотичній площині два дійсних, взаємно ортогональних головних напрямки. На сфері головні напрямки невизначені.

Тут необхідно довести, що квадратне рівняння (3.19) відносно  $\frac{du}{dv}$  має дійсні корені. Так як існування головних напрямків не залежить від вибору координатних ліній, то для спрощення обчислень вважатимемо координатну систему ортогональною, тобто припустимо  $F = 0$ . Тоді рівняння (3.18) набуває вигляд

$$(L du + M dv)G dv - (M du + N dv)E du = 0,$$

або

$$EM du^2 + (EN - LG)dudv - MGdv^2 = 0. \quad (3.20)$$

Дискримінант цього квадратного рівняння  $(EN - LG)^2 + 4EGM^2 > 0$ , тому що  $E > 0$ ,  $G > 0$ .

Нехай головним напрямкам відповідають розв'язки рівняння (3.20)  $\frac{du_1}{dv_1}$  і

$\frac{du_2}{dv_2}$ . Для доведення ортогональності розглянемо вираз

$$\frac{du_1}{dv_1} \cdot \frac{du_2}{dv_2} = -\frac{MG}{EM} = -\frac{G}{E},$$

що випливає з квадратного рівняння (3.20), звідки маємо

$$Edu_1 du_2 + Gdv_1 dv_2 = 0.$$

Це збігається з умовами ортогональності (3.10) при  $F = 0$ . Якщо  $M=0$ , то рівняння (3.20) набуває вигляд

$$(EN - LG)dudv = 0, \quad (3.21)$$

тоді координатні лінії  $du = 0$  і  $dv = 0$  при  $F = 0$  ортогональні; якщо ж  $EN - LG = 0$ , то головні напрямки невизначені (це вірно для сфери).

### 3.7. Лінії кривизни

Лінія, яка в кожній точці має дотичну головного напрямку, називається лінією кривизни.

У зв'язку з цим визначенням виписуємо два очевидних слідства з попередньої теореми.

Наслідок 1. Через кожену точку проходять дві лінії кривизни.

Наслідок 2. На кожній поверхні (окрім сфери) є два сімейства ліній кривизни; вони завжди дійсні і утворюють ортогональну сітку. На сфері лінії кривизни невизначені.

Доведемо Наслідок 3. Оборнення в нуль середніх коефіцієнтів двох квадратичних форм необхідно і достатньо, щоб поверхня була віднесена до ліній кривизни.

Достатність була доведена в розділі 2.1. Дійсно, з умов  $M = 0$ ,  $F = 0$  ми отримали (див. рівність (3.21)), що для ліній кривизни  $du = 0$  або  $dv = 0$ . Доведемо необхідність. Якщо поверхня віднесена до ліній кривизни, то рівняння (3.19) допускає розв'язки  $du = 0$  і  $dv = 0$ . Вважаючи по черзі  $du = 0$  і  $dv = 0$ , маємо

$$MG - FN = 0, \quad LF - EM = 0. \quad (3.22)$$

Якщо розглядати (3.22) як систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь відносно  $F$  і  $M$ , отримуємо, що ця система допускає лише тривіальний розв'язок  $F = 0$ ,  $M = 0$ , якщо визначник системи не обертається в нуль, тобто  $EN - LG \neq 0$ . Цей визначник дорівнює нулю тільки для сфери, де всі нормальні кривизни однакові і головні напрямки невизначені.

### 3.8. Повна і середня кривизни поверхні

Система (3.18) є однорідною і лінійною відносно невідомих  $du$  і  $dv$ . Така система має нетривіальний розв'язок тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю

$$\Delta(du, dv) = \begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0,$$

що призводить до квадратного рівняння відносно головних кривизн,

$$k_n^2 (EG - F^2) - k_n (LG + NE - 2MF) + LN - M^2 = 0. \quad (3.23)$$

За допомогою формул Вієта випикуємо суму і добуток головних кривизн у вигляді

$$H = k_{n_1} + k_{n_2} = \frac{2MF - LG - NE}{EG - F^2}, \quad K = k_{n_1} k_{n_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (3.24)$$

$H$  і  $K$  називаються відповідно середньою та повною (гаусовими) кривизнами поверхні. Це основні скалярні інваріанти поверхні. Якщо говорять про поверхні постійної кривизни, то мають на увазі повну кривизну поверхні. Обернення в нуль середньої кривизни  $H=0$  виділяє особливий клас мінімальних поверхонь, які при заданому контурі мають найменшу площу. Вперше отримав ці інваріанти Ейлер.

### 3.9. Асимптотичні лінії. Геодезична кривизна та геодезичні лінії

*Асимптотичні лінії на поверхні* – це лінії, в кожній точці яких нормальна кривизна  $k_n$  дорівнює нулю.

Це можливо, якщо

- 1) кривизна  $k=0$  (в усіх точках), в цьому випадку лінія - пряма;
- 2)  $\cos\varphi=0$  ( $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ ),

де  $\varphi$  – кут між головної нормаллю кривої і нормаллю до поверхні. Отже, в цьому випадку головна нормаль лежить в дотичній площині до поверхні, тоді ця дотична площина збігається з дотичною площиною асимптотичної лінії, а нормаль до поверхні – з її бінормаллю.

Оскільки  $k_n=0$ , то і  $d^2\Phi=0$ , тоді

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0. \quad (3.25)$$

Умова існування дійсних коренів для цього рівняння  $M^2 - LN > 0$ , а це означає, що асимптотичні лінії існують, утворюючи сітку координатних ліній, тільки в тій області поверхні, де її кривизна від'ємна (всі точки гіперболічні). Дійсно, з (3.24) випливає, що  $K < 0$ , тому що  $EG - F^2 > 0$ .

**Приклад.** Знайти асимптотичні лінії гелікоїда, рівняння якого розглядалися раніше (розділ 3.4).

Випишемо всі необхідні вектори,

$$\begin{aligned} \bar{r}(u \cos v, u \sin v, av), \quad \bar{r}_u(\cos v, \sin v, 0), \quad \bar{r}_v(-u \sin v, u \cos v, a), \\ \bar{r}_{uu}(0, 0, 0), \quad \bar{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0), \quad \bar{r}_{vv}(-u \cos v, -u \sin v, 0). \end{aligned}$$



Далі обчислюємо коефіцієнти першої і другою квадратичних форм за формулами (3.6) і (3.15), тоді маємо

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad L = 0, \quad N = 0,$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v & -\sin v \\ \sin v & u \cos v & \cos v \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

тому

$$d^2\Phi = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} dudv,$$

і рівняння асимптотичних ліній має вигляд

$$dudv = 0.$$

Звідси маємо два сімейства координатних ліній:  $u = \text{const}$  – гвинтові лінії і  $v = \text{const}$  – прямолінійні твірні гелікоїду.

*Геодезична кривизна лінії на поверхні визначається за формулою*

$$k_g = k \sin \varphi,$$

де  $k$  – кривина лінії, а  $\varphi$  – кут між головної нормаллю лінії і нормаллю до поверхні. Можна показати, що геодезична кривизна лінії на поверхні залежить тільки від лінійного елемента поверхні і рівняння кривої відносно обраного ортогонального репера.

*Геодезичні лінії* – це лінії з нульовою геодезичної кривизною. З формул для визначення геодезичної кривизни випливає, що геодезичними лініями можуть бути або прямі ( $k = 0$ ), або ті лінії, у яких  $\sin \varphi = 0$ , тобто  $\varphi = 0$  або  $\varphi = \pi$ . В обох випадках головна нормаль з точністю до додатного напрямку збігається з нормаллю до поверхні.

Сформулюємо теорему, яка тут наводиться без доведення.

**Теорема.** *Через будь-яку точку поверхні в області її регулярності при заданому куті нахилу дотичній до напрямку першої осі репера проходить одна і тільки одна геодезична лінія.*

Ця теорема аналогічна теоремі планіметрії: через будь-яку точку при заданому куті нахилу до осі OX (заданому напрямку) проходить одна і тільки одна пряма. Однак друге припущення планіметрії – через кожні дві точки

площини проходить одна і тільки одна пряма - вже не завжди задовольняється для геодезичних ліній на поверхні. Зокрема, протилежні точки сфери з'єднуються багатьма геодезичними однієї довжини, які утворюють однопараметричне сімейство.

*Геодезична лінія при заданому лінійному елементі поверхні  $ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2$  реалізує найкоротшу відстань між точками  $A$  і  $B$  в порівнянні з іншими лініями, що проходять на поверхні через ці точки. Це важливе твердження справедливо при виконанні двох умов:*

- 1) криві порівняння досить близькі до даної геодезичної;
- 2) точка  $B$  розташована не дуже далеко від точки  $A$ .

### **Нотатки з історії диференціальної геометрії**

Виникнення **диференціальної геометрії поверхонь** відноситься до 18 сторіччя і зв'язане з іменами Ейлера та Монжа. Перший зведений твір по теорії поверхонь був написаний Монжем у 1795р. В 1827 Гаус опублікував роботу «Загальне дослідження щодо кривих поверхонь», де заклав основи теорії поверхонь в її сучасному вигляді. В подальшому велика роль у розвитку геометрії відіграли роботи Римана (1854), який заложив основи риманової геометрії, Клейна (1872), Мебіуса, Жордана, Пуанкаре, а в 20 сторіччі – роботи Дарбу, Картана та інших математиків.

## РОЗДІЛ 4 ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ОБВІДНИХ

### 4.1. Обвідна однопараметричного сімейства кривих на площині

**Означення.** Обвідною однопараметричного сімейства кривих на площині називається крива, яка в кожній своїй точці торкається однієї з ліній сімейства.

Нехай однопараметричне сімейство кривих задається рівнянням

$$F(x, y, \alpha) = 0. \quad (4.1)$$

Для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до лінії сімейства диференціюємо останнє рівняння по  $x$  в припущенні, що  $y$  – неявна функція від  $x$ . Припускаємо також, що випадок  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$  (особливі точки сімейства) з розгляду виключаються. Маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \text{ або } \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (4.2)$$

Для запису шуканого рівняння обвідної формально використовуємо ту ж функцію

$$\Psi(x, y, C(x, y)) = 0,$$

де, однак,  $C(x, y)$  – довільний аналітичний вираз. Звідси отримуємо

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial C} dC = 0. \quad (4.3)$$

Оскільки кутові коефіцієнти обвідної і дотичної до ліній сімейства в точці дотику повинні збігатися, то, порівнюючи (4.1) і (4.2), отримуємо, що  $\frac{\partial \Psi}{\partial C} dC = 0$ . Якщо  $dC = 0$ , то  $C = \text{const}$ , і ми отримуємо задане сімейство

кривих. Тому потрібно вважати, що  $\frac{\partial \Psi}{\partial C} = 0$ . Остаточно, для визначення

обвідної отримуємо систему рівнянь

$$\Psi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C}(x, y, C) = 0. \quad (4.4)$$

Виключаючи з системи параметр  $C$ , отримаємо шукане рівняння обвідної.

Зауважимо, що обвідна сімейства кривих може і не існувати, а виключення параметра з системи рівнянь (4.4) може привести до геометричного місця особливих точок сімейства, в яких криві не мають дотичних.

**Приклад 1.** Розглянемо сімейство кіл заданого радіуса, центри яких лежать на осі ОХ:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2.$$

Система рівнянь (4.4) набуває вигляду

$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = a^2 \\ -2(x - C) = 0 \end{cases},$$

що призводить до двох обвідних сімейства  $y = \pm x$ .

**Приклад 2.** Розглянемо сімейство кіл змінного радіусу, центри яких лежать на осі ОХ:

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Система рівнянь (4.4) в даному випадку набуває вигляду

$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = C^2 \\ -2(x - C) = 2C \end{cases},$$

що призводить до протиріччя. Єдиний розв'язок для двох рівнянь не існує.

**Приклад 3.** Розглянемо сімейство кіл змінного радіусу, центри яких лежать на осі ОХ:

$$(x - C)^2 + y^2 = (kC)^2.$$

Слід самостійно довести, що обвідні даного сімейства у вигляді прямих існують завжди, якщо  $k \neq 1$ . Отримати рівняння цих обвідних.

## 4.2. Обвідна однопараметричного сімейства поверхонь

Означення обвідної сімейства поверхонь не відрізняється по суті від означення обвідної сімейства кривих.

Нехай задано сімейство поверхонь

$$F(x, y, z, C) = 0. \quad (4.5)$$

Фіксуємо значення  $C$ , маємо певну поверхню сімейства. Обвідна даного сімейства поверхонь – це поверхня, яка в кожній своїй точці торкається будь-якої поверхні сімейства. Нехай формально обвідна поверхня визначається тим же рівнянням, що і сімейство поверхонь, але зі змінною величиною  $C$ :

$$F(x, y, z, C(x, y, z)) = 0.$$

Для заданого сімейства (4.5) в силу сталості  $C$  має виконуватися така умова, що визначає дотичну поверхню:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

На обвідній поверхні  $C$  – змінна величина, і ми повинні записати

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial C} dC = 0.$$

Порівнюючи, як і раніше, кутові коефіцієнти обвідної і дотичної поверхонь до ліній сімейства в точці дотику, отримаємо, що змінний параметр  $C$  визначається зі співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial C}(x, y, z, C) = 0.$$

(Таким чином, нескінченно мале переміщення  $(dx, dy, dz)$  в спільних точках обвідної і поверхні сімейства ортогональні одному і тому ж напрямку, що визначається вектором  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ ).

Можна сказати, що обвідна поверхня визначається системою рівнянь

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C}(x, y, z, C) = 0. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що обвідна сімейства поверхонь може і не існувати.

**Приклад.** Розглянемо сімейство сфер заданого радіуса  $R$ , центри яких знаходяться на осі  $OZ$

$$x^2 + y^2 + (z - C)^2 = R^2.$$

Диференціюємо по  $C$ , маємо  $-2(z - C) = 0$ . Виключаємо з цих двох рівнянь  $C$ , маємо рівняння кругового циліндра

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

який дотикається кожної зі сфер даного сімейства.

## Завдання 1

Дано: крива і точка  $M$  на кривій. Для заданої точки

- 1) визначити одиничний вектор дотичної; записати рівняння дотичної і рівняння нормальної площини;
- 2) знайти одиничні вектори головної нормалі і бінормалі;
- 3) записати рівняння стичної і спрямної площин;
- 4) обчислити значення кривизни кривої в даній точці двома способами, а саме, застосувавши формули (1.14) і (1.16).

### Варіанти:

1.  $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}; M(1/4, 1/3, 1/2)$
2.  $x = at, y = (1/2)at^2, z = (1/3)at^3; M(2a, 2a, 8a/3)$
3.  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin(t/2); M(\pi/2 - 1, 1, 2\sqrt{2})$
4.  $y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 10; M(1, 3, 4)$
5.  $x^2 + y^2 = z^2, x^2 = y; M(1, 1, \sqrt{2})$
6.  $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t; M(1, 0, 1)$
7.  $x = t^2, y = 1 - t, z = t^2; M(1, 0, 1)$
8.  $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 = 2; M(1, 1, 1)$
9.  $x^2 = 2az, y^2 = 2az; M(2a, 2a, 2a)$
10.  $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}; M(e, e^{-1}, \sqrt{2})$
11.  $x = \sin t, y = \cos t, z = \operatorname{tg} t; M(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$
12.  $x = t^3 - t^2 - 5, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3 - 16; M(-1, 13, 0)$
13.  $x = 2t + 3, y = 3t - 1, z = t^2; M(5, 2, 1)$
14.  $x = \cos t, y = \sin t, z = \operatorname{ch} t; M(1, 0, 1)$
15.  $x = 2t, y = \ln t, z = t^2; M(2, 0, 1)$
16.  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t; M(1, 0, 1)$
17.  $x^2 = 3y, 2xy = 9z; M(3, 3, 2)$
18.  $x = \sin t, y = \cos t, z = e^{-t}; M(0, 1, 1)$

19.  $x = t^2, y = t + 1, z = t^3; M(1, 2, 1)$

20.  $x = t^2, y = 2t, z = \ln t; M(1, 2, 0)$

21.  $x^2 = y^2 + z^2, y = z; M(2, 1, 1)$

22.  $x = 3t + 3, y = t^2, z = 2t - 1; M(6, 1, 1)$

*Зауваження.* Якщо крива задана не параметричними рівняннями, то цей параметр нескладно ввести. Іноді зручно представити декартові координати як тригонометричні функції деякого параметра, але в загальному випадку в якості параметра можна вибрати одну з декартових координат.



## Завдання 2

Дано: поверхня і точка на поверхні. Для заданої точки:

- 1) знайти вектор нормалі; записати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні;
- 2) обчислити коефіцієнти першої та другої квадратичних форм;
- 3) записати вираз нормальної кривизни;
- 4) знайти значення головних кривизн і відповідні головні напрямки;
- 5) обчислити значення гаусової і середньої кривизн.

### Варіанти:

1.  $z = xy; \quad M(1, 1, 1)$
2.  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy; \quad M(3, 4, -7)$
3.  $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}; \quad M(a, a, -a)$
4.  $x = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$
5.  $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1; \quad M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
6.  $z = x^3 - xy + y^3; \quad M(1, 1, 1)$
7.  $x^2 - xy - 2x - z + 3 = 0; \quad M(1, 1, 1)$
8.  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1; \quad M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$
9.  $x = u - v, \quad y = u + v, \quad z = 2uv; \quad M(1, 2, 2)$
10.  $x + 2y - \ln z + 4 = 0; \quad M(-2, -1, 1)$
11.  $xyz = a^3; \quad M(a, a, a)$
12.  $x^2 - y^2 - 3z = 0; \quad M(\sqrt{3}, 0, 1)$
13.  $2pz = x^2 + y^2; \quad M\left(1, 1, \frac{1}{p}\right)$
14.  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1; \quad M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15.  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0; M(2, -3, 1)$
16.  $x = a(u + v), y = b(u - v), z = uv; M(2a, 0, 1)$
17.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; M(a, b, \sqrt{2}c)$
18.  $z = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}; M(a, b, 0)$
19.  $\frac{x^2 + z^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1; M(0, 5, 0)$
20.  $x^2 - 2y - z^2 = 0; M(\sqrt{2}, 1, 0)$
21.  $2x - y + \ln z - 2 = 0; M(1, 0, 1)$
22.  $x^2 - y^2 + 2z = 0; M(0, \sqrt{2}, 1)$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основна:

1. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 420 с.
2. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии / А.П. Норден. – Москва: Физматгиз, 1958. – 244 с.
3. Норден А.П. Теория поверхностей/ А. П. Норден. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 259 с.
4. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия / С. П. Фиников. – Москва : Изд-во МГУ, 1961. – 158 с.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 2 / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – 628 с.
6. Кованцов Н.И. Дифференциальная геометрия / Н.И. Кованцов. – Київ : Вища школа, 1973.
7. Кованцов Н. И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. Учеб. пособие / Н. И. Кованцов. [и др.]. – Київ : Вища школа, 1989. – 398 с.
8. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – Москва : Наука, 1974. – 176 с.
9. Позняк Э. Г. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – Москва : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.
10. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія / О. А. Борисенко. – Харків : Основа, 1995. – 209 с.

### Додаткова:

11. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология кривых / Ю. А. Аминов. – Москва : Наука, 1987. – 160 с.
12. Мищенко А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – Москва : Изд-во МГУ, 1980. – 439 с.
13. Мищенко А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко , Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. – Москва : Физматлит, 1981. – 412 с.
14. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – Москва : Изд-во МГУ, 1987. – 664 с.
15. Дубровин Б. А. Современная геометрия / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко . – Москва : Наука, 1985. – 760 с.
16. Михлин Ю. В. Элементы дифференциальной геометрии : навч. посіб. / Ю. В. Михлин, И. О. Морачковская, Н. А. Кириллова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2005. – 52 с.
17. Величко І. Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь / І. Г. Величко, М. О. Гургенідзе, П. Г. Стеганцева. – Запоріжжя : ЗНУ, 2009. – 76 с.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	.....	3
<b>РОЗДІЛ 1.</b>	Просторова крива. Вектор-функція скалярного аргументу. Дотична до лінії. Кривизна кривої та її обчислення.....	4
<b>1.1.</b>	Просторова крива. Вектор-функція скалярного аргументу .....	4
<b>1.2.</b>	Правила диференціювання вектор-функції скалярного аргументу .....	4
<b>1.3.</b>	Дотична до лінії.....	6
<b>1.4.</b>	Кривизна плоскої кривої та її обчислення.....	7
<b>1.5.</b>	Кривизна просторової кривої та її обчислення.....	9
<b>РОЗДІЛ 2.</b>	Формули Френе.....	14
<b>2.1.</b>	Формули Френе. Тригранник Френе.....	14
<b>2.2.</b>	Аналіз системи рівнянь Френе.....	16
<b>РОЗДІЛ 3.</b>	Поверхня в просторі. Перша і друга квадратичні форми поверхні.....	19
<b>3.1.</b>	Поверхня в просторі. Дотична площина і нормаль до поверхні.....	19
<b>3.2.</b>	Перша квадратична форма поверхні. Диференціальний елемент площі поверхні.....	20
<b>3.3.</b>	Кут перетину двох ліній на поверхні .....	22
<b>3.4.</b>	Диференціал площі поверхні.....	23
<b>3.5.</b>	Друга квадратична форма поверхні. Нормальні кривизни. Класифікація точок поверхні.....	25
<b>3.6.</b>	Головні напрями і головні кривизни.....	28
<b>3.7.</b>	Лінії кривизни.....	29
<b>3.8.</b>	Повна і середня кривизни поверхні.....	30
<b>3.9.</b>	Асимптотичні лінії. Геодезична кривизна та геодезичні лінії.....	31
<b>РОЗДІЛ 4.</b>	Вступ до теорії обвідних.....	34
<b>4.1.</b>	Обвідна однопараметричного сімейства кривих на площині .....	34
<b>4.2.</b>	Обвідна однопараметричного сімейства поверхонь.....	36
<b>ЗАВДАННЯ 1</b>	.....	38
<b>ЗАВДАННЯ 2</b>	.....	40
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>	.....	42

Навчальне видання

МІХЛІН Юрій Володимирович  
КИРИЛЛОВА Наталія Олександрівна  
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна

ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник  
для студентів навчально-наукового інженерно-фізичного інституту  
спеціальностей 113 – «Прикладна математика»  
та 122 – «Комп'ютерні науки»

Відповідальний за випуск Курпа Л. В.  
Роботу до видання рекомендував Бреславський Д. В.

В авторській редакції

План 2019 р., поз. 65

Підп. до друку 23.06.20. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,56.  
Наклад 50 прим. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавець Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Видавець ТОВ «ПЛАНЕТА-ПРІНТ»  
вул. Багалія, 16, Харків, 261002,  
свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4568 від 17.06.2013.

---

Виготовлювач ФЛ-П Черняк Л.О.  
261002, Харків, вул. Багалія, 16,  
Свідоцтво № 2480000000079553, від 16.06.2007 р.