МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І. М. Курбатова

Диференціальна геометрія

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів спеціальності 111 «Математика»

Частина І

О Д Е С А
ОНУ
2020

УДК 514.7(072)
К93

Рецензенти:

С. А. Щоголев, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Н. Г. Коновенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Одеської національної академії харчових технологій.

Рекомендовано до друку вченою радою ФМФІТ
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 31.10.2019 р.

Курбатова І. М.

К93 Диференціальна геометрія. Частина І : Метод. посіб. для студентів напряму підготовки 111 «Математика» / І. М. Курбатова. – Одеса :Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2020. – 66 с.

Методичний посібник з диференціальної геометрії розрахований для студентів 2-го курсу спеціальності 111 «Математика» і покликаний надати допомогу при підготовці студентів до іспиту з розділів курсу диференціальної геометрії, що стосуються питань класичної диференціальної геометрії – теорії кривих і поверхонь у тривимірному просторі.

УДК 514.7(072)

Зміст

ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для студентів II курсу спеціальності 111 «Математика».

Диференціальна геометрія – це частина математики, що вивчає геометричні образи, в першу чергу криві і поверхні, методами аналізу нескінченно малих. Характерно, що вона вивчає перш за все властивості кривих і поверхонь «в малому», тобто властивості як завгодно малих кусків кривих і поверхонь.

Диференціальна геометрія належить до фундаментальних дисциплін математичної освіти, знання якої складають основу для вивчення таких дисциплін як топологія, математичний аналіз, функціональний аналіз, математична фізика, теоретична механіка та інші.

Мета навчальної дисципліни – викласти основи і методи розв'язування задач з геометрії, використовуючи основи математичного аналізу, диференціального і інтегрального числення.

Завдання – акцентувати увагу на критичне та аналітичне розуміння, навчити студентів досліджувати властивості геометричних об'єктів методами математичного аналізу, диференціального та інтегрального числення.

У пропонованому методичному посібнику викладено матеріал лише перших трьох розділів курсу, що включає теорію кривих та поверхонь у тривимірному евклідовому просторі.

ГЛАВА І. ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ

В подальшому будемо користуватися апаратом векторного аналізу, основною перевагою якого є поєднання прийомів диференціального числення з геометричністю поняття вектора.

Студентам рекомендується самостійно простежити аналогію між основними твердженнями Глави І і відповідними їм поняттями і твердженнями в курсі математичного аналізу.

§ 1. Означення похідної вектор-функції скалярного аргумента

Означення 1. Нехай G – будь-яка множина точок на прямій, площині чи в просторі. Кажуть, що на множині G задана *вектор-функція* $\bar{r}$, якщо кожній точці X цієї множини зіставлений вектор $\bar{r}(X)$.

Для вектор-функції, так само як і для скалярних функцій в аналізі, вводяться поняття **межі, безперервності і похідної**.

Означення 2. Кажуть, що $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X}) \to \bar{\boldsymbol{a}}$при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$, якщо $|\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) - \bar{\boldsymbol{a}}| \to \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$.

Під модулем $|\bar{\boldsymbol{r}}|$ будь-якого вектора $\bar{\boldsymbol{r}}$ розуміють його довжину.

Слідство. Якщо $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) \to \bar{\boldsymbol{r}}_\mathbf{0}$, то $|\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x})| \to |\overline{\boldsymbol{r_0}}|$.

Теорема 1. Якщо $\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x})$ і $\overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{x})$ – вектор-функції, а $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})$ – скалярная функція і $\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{a_1}}$, $\overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{a_2}}$, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{m}$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$, то

$$\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x}) \pm \overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{a_1}} \pm \overline{\boldsymbol{a_2}};$$

$$\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{a_1}} \cdot \overline{\boldsymbol{a_2}};$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{m} \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_\mathbf{1};$$

$$[\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{x}) \times \overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{x})] \to [\overline{\boldsymbol{a_1}} \times \overline{\boldsymbol{a_2}}].$$

Доказ цієї теореми принципово не відрізняється від доказу відповідних тверджень для скалярних функцій в математичному аналізі.

Означення 3. Функція $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X})$ називається ***неперервною в точці x,*** якщо $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X}) \to \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X_0})$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$.

Означення 4. Нехай $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ – вектор-функція, визначена на відрізку. Кажуть, що вектор-функція $\bar{\boldsymbol{r}}$ має в точці t відрізка ***похідну*** $\bar{\boldsymbol{r}}'^{(t)}$, якщо існує границя відношення:

$$\frac{\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t})-\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})}{\Delta\boldsymbol{t}} \quad \text{при } \Delta\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}.$$

Теорема 2. Якщо $\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{t})$ і $\overline{\boldsymbol{r_2}}(\boldsymbol{t})$ – диференційовні в точці $\boldsymbol{t}$ вектор-функції, а $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})$ – диференційовна в цій точці скалярна функція, то функції $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})\overline{\boldsymbol{r_1}}(\boldsymbol{t})$, $\bar{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{t}) \pm \bar{\boldsymbol{r}}_2(\boldsymbol{t})$, $\bar{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{t}) \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_2(\boldsymbol{t})$, $[\bar{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{t}) \times \bar{\boldsymbol{r}}_2(\boldsymbol{t})]$ диференційовні в точці $\boldsymbol{t}$, причому

$$(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{r}}_1)' = \boldsymbol{\alpha}'\bar{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{r}}_1';$$
$$(\bar{\boldsymbol{r}}_1 \pm \bar{\boldsymbol{r}}_2)' = \bar{\boldsymbol{r}}_1' \pm \bar{\boldsymbol{r}}_2';$$
$$(\bar{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_2)' = \bar{\boldsymbol{r}}_1' \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_2 + \bar{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_2';$$
$$[\bar{\boldsymbol{r}}_1 \times \bar{\boldsymbol{r}}_2]' = [\bar{\boldsymbol{r}}_1{}' \times \bar{\boldsymbol{r}}_2] + [\bar{\boldsymbol{r}}_1 \times \bar{\boldsymbol{r}}_2'].$$

Похідну вектор-функції $\bar{r}'(t)$ називають ***другою похідною функції*** $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ і позначають $\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})$. Так само визначаються похідні вищих порядків.

Надалі будемо розглядувати вектор-функції такого класу диференційовності, який необхідний в кожному конкретномувипадку.

§ 2. Геометричний зміст диференціювання вектор-функції. Диференціал вектор-функції

Нехай задано вектор-функцію

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{T_0} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{T} \tag{2.1}$$

Якщо відкладатимемо вектор $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$при кожному значенні $\boldsymbol{t}$від деякої фіксованої точки $\boldsymbol{O}$, то при змінюванні $\boldsymbol{t}$ у вказаних границях кінець вектора $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ опише в просторі деяку криву, для якої (1.2.1) називається її ***векторно-параметричним рівнянням.***

Нехай $\bar{\boldsymbol{\iota}}, \bar{\boldsymbol{\jmath}}, \bar{\boldsymbol{k}}$ – орти декартової системи координат $\boldsymbol{OXYZ}$. Тоді $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ може бути розкладеним по $\bar{\boldsymbol{\iota}}, \bar{\boldsymbol{\jmath}}, \bar{\boldsymbol{k}}$:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k}$$

Рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $T_0 \le t \le T$ (2.2)

називаються ***координатно-параметричними рівняннями*** кривої (2.1). Звичайно (2.1) і (2.2) еквівалентні. Більше того, функції $x(t), y(t), z(t)$ належать тому ж класу диференційовності, що й $\bar{r}(t)$.

Фіксуємо деяке значення параметра $t = t_0$ і розглянемо приріст вектор-функції $\bar{r}(t)$, відповідний до приросту аргуменуа $t - t_0$:

$\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{M_0M}$.

При $t \to t_0$ з огляду на неперервність $\bar{r}(t)$ маємо $\bar{r}(t) \to \bar{r}(t_0)$, або

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)| \to 0.$$

З геометричної точки зору це означає, що границя довжини хорди M_0Mдорівнює нулю при $t \to t_0$, або що точка $M(t)$ необмежено наближається до $M_0(t_0)$ вздовж кривої. Але тоді вектор

$\frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0}$,

що має напрям оксічної M_0M, при $t \to t_0$ має, з одного боку, в якості границі напрямок дотичної, з іншого боку – має границю $\bar{r}'(t)$.

Отже, **якщо при значенні $t = t_0$ похідна $\bar{r}'(t)$ існує і відмінна від нуля, то у відповідній точці кривої $\bar{r} = \bar{r}(t)$ існує дотична, що має напрямок $\bar{r}'(t)$.**

Розглянемо поняття диференціала вектор-функції. З означення границі витікає, що при $t \to t_0$ границя вектора

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} - \bar{r}'(t_0)$$

дорівнює нулю. Це співвідношення можна переписати у вигляді:

$$\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) = \bar{r}'(t_0)(t - t_0) + \bar{\alpha}(t - t_0)$$

і геометрично тлумачити таким чином: вектор $\overline{M_0M}$ – зміщення з точки M_0 в нескінченно близьку точку M вздовж кривої розпадається на зміщення $\overline{M_0M'}$ вздовж дотичної, пропорційне приросту аргументу

$\boldsymbol{t-t_0}$, и на вектор с модулем, нескінченно малим вищого порядку відносно $\boldsymbol{t-t_0}$.

При цьому $\overline{\boldsymbol{M_0M'}}$ називається ***диференціалом вектор-функції*** $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ в точці $\boldsymbol{t=t_0}$:

$$\boldsymbol{d\bar{r} = \bar{r}'(t_0)dt,\ \ dt = t - t_0}.$$

Звідси:

$$\boldsymbol{\bar{r}'(t_0) = \frac{d\bar{r}}{dt}}.$$

§ 3. Допоміжні леми

Приведемо без доказу два твердження, якими будемо користуватися в подальшому.

Лема 1. Якщо вектор-функція $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ зберігає сталий модуль, то при кожному значенні $\boldsymbol{t}$ її похідна їй перпендикулярна.

Геометрично це означає, що якщо відкладати $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ від точки $\boldsymbol{O}$, то $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ своїм кінцем опише криву, розташовану на сфері з центром $\boldsymbol{O}$, а радіус, проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної.

Введемо поняття ***швидкості обертання вектор-функції*** $\bar{r}(t)$ ***по відношенню до її аргументу*** t як границі відношення $|\Delta\boldsymbol{\varphi}/\Delta \boldsymbol{t}|$ при

$\Delta \boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}$, де $\Delta\boldsymbol{\varphi} -$ кут між векторами $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ та $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t})$.

Лема 2. Швидкість обернення одиничної вектор-функції $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ дорівнює модулю її похідної $|\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})|$.

§ 4. Формула Тейлора для вектор-функції

Вектор-функцію $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ завжди можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k}}, \qquad \boldsymbol{T_0 \le t \le T}.$$

Розкладуючи функції $\boldsymbol{x(t), y(t), z(t)}$ по степенях $\boldsymbol{t - t_0}$, де $\boldsymbol{t_0}$ –деяке фіксоване значення $\boldsymbol{t}$, і додаючи отримані співвідношення, помножені на $\boldsymbol{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}}$ відповідно, за формулою Тейлора знаходимо для вектор-функції $\boldsymbol{\bar{r}(t)}$:

$$\boldsymbol{\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0)\frac{t - t_0}{1!} + \bar{r}''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \cdots + \bar{r}^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!}}$$
$$\boldsymbol{+ \bar{Q}_n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n + 1!}},$$

де $\boldsymbol{\bar{Q}_n = x^{(n+1)}(t_1)\bar{\imath} + y^{(n+1)}(t_2)\bar{\jmath} + z^{(n+1)}(t_3)\bar{k}}$.

Зважаючи на обмеженість координат вектора $\boldsymbol{\bar{Q}_n}$ при будь-яких $\boldsymbol{t_1, t_2, t_3 \in [T_0, T]}$, маємо $\boldsymbol{|\bar{Q}_n| < C_n}$, де $\boldsymbol{C_n}$ – додатна стала, одна й та ж при будь-яких $\boldsymbol{t, t_0 \in [T_0, T]}$.

Вправи

1. Довести, що якщо функції $\boldsymbol{\overline{r_1}(t), \overline{r_2}(t), \overline{r_3}(t)}$ диференційовані, то має місце рівність:

$$\boldsymbol{\left(\overline{r_1}(t), \overline{r_2}(t), \overline{r_3}(t)\right)' =}$$
$$\boldsymbol{= \left(\overline{r_1}'(t), \overline{r_2}(t), \overline{r_3}(t)\right) + \left(\overline{r_1}(t), \overline{r_2}'(t), \overline{r_3}(t)\right) + \left(\overline{r_1}(t), \overline{r_2}(t), \overline{r_3}'(t)\right)}$$

2. Нехай $\mathbf{\bar{r} = \bar{r}(t)}$. Знайти похідні по t від таких функцій :

1)$\boldsymbol{\bar{r}^2}$;

2)$\boldsymbol{[\overline{r'}, \overline{r''}]}$;

3)$\boldsymbol{(\overline{r'}, \overline{r''})}$;

4) $\boldsymbol{(\overline{r'}, \overline{r''}, \overline{r'''})}$;

5)$\boldsymbol{\sqrt{\overline{r'^2}}}$;

6) $\boldsymbol{\sqrt{[\overline{r'}, \overline{r''}]^2}}$.

3. На інтервалі $\boldsymbol{(t_1, t_2)}$

$$\boldsymbol{|\bar{r}(t)| = \mathbf{const}}.$$

Довести, що $\boldsymbol{\bar{r}' \perp \bar{r}}$ на цьому інтервалі. Чи вірне обернене твердження?

4. Довести, що якщо $\boldsymbol{|\bar{r}'(t)| = 0}$ при всіх $\boldsymbol{t \in (t_1, t_2)}$, то на цьому інтервалі $\boldsymbol{\bar{r}(t) = \overline{\mathbf{const}}}$.

Чи можна стверджувати обернене?

5. Чи вірна рівність $\left|\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\right| = |\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})|'$***?***

6. На відрізку $[\boldsymbol{t_1}\,;\,\boldsymbol{t_2}]$ вектор-функція $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ неперервна разом зі своєю похідноюі $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})| \quad |\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, причому $\bar{\boldsymbol{r}}' \neq \bar{\boldsymbol{0}}$, $\bar{\boldsymbol{r}} \neq \bar{\boldsymbol{0}}$. Довести, що лінія $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ – це пряма (або її відрізок).

ГЛАВА 2. ТЕОРІЯ КРИВИХ

§ 5. Криві в евклідовому просторі

Раніше ми зауважили, що крива в просторі може бути задана векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) \tag{5.1}$$

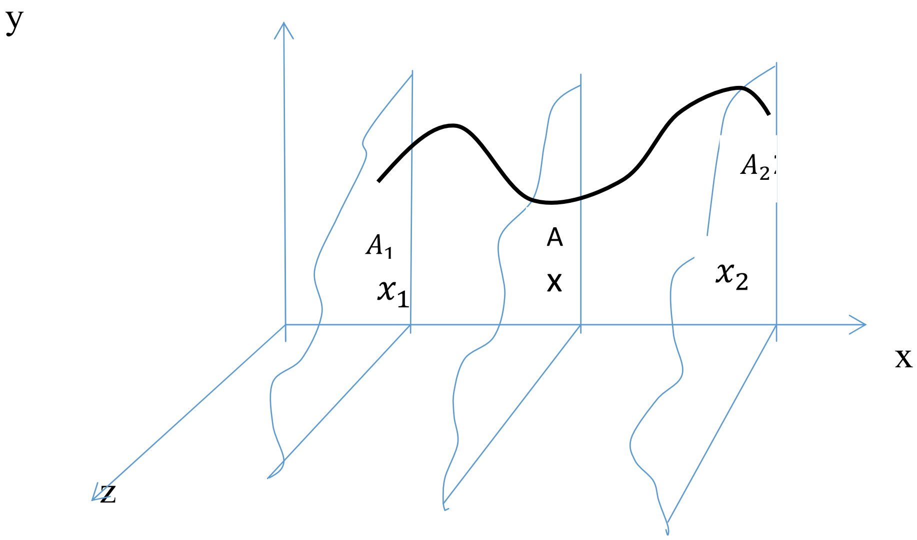
Або координатно-параметричними рівняннями

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \tag{5.2}$$

Простим відрізком кривої називають геометричне місце точок, яке в деякій декартовій системі координат задається рівняннями:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x_1} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x_2}, \tag{5.3}$$

де $\boldsymbol{f}$та $\boldsymbol{g}$ – однозначні функції.



Назва?

Рис. 1

Систему (5.3) називають ***координатними рівняннями кривої.*** Наочно простий відрізок кривої $\boldsymbol{A_1A_2}$ можна подати як результат зсуву кожної точки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ прямолінійноговідрізку $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$ в положення $\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$. Точка $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ кривої (5.1) або (5.2) називається ***звичайною,*** якщо при значеннях $\boldsymbol{t}$, достатньо близьких до $\boldsymbol{t_0}$, крива являє собою простий відрізок. Між тим, при деякому віддаленні від $\boldsymbol{t_0}$ значенні $\boldsymbol{t}$ крива може повернутися в ту ж точку і станеться точка самоперетину (особлива).

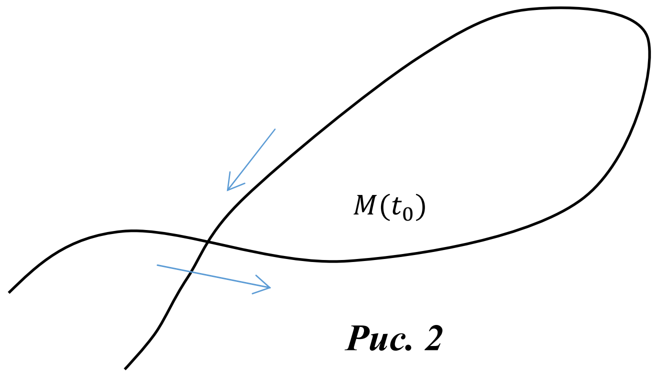


Рис. 2

Достатня ознака звичайної точки:

Якщо в точці $\boldsymbol{t = t_0}$ кривої (5.1) $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_0}) \neq \boldsymbol{0}$, то точка $\boldsymbol{t = t_0}$ –звичайна.

Доведення вказаної ознаки проводиться на підставі теореми про існування неявної функції.

Надалі, якщо не обумовлено протилежне, будемо розглядати лише точки, в яких виконується достатня ознака, і називати їх ***наперед звичайними.*** Зауважимо, що точки, де $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$, на кривих є виключними. Крива, в кожній точці якої виконується умова $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_0}) \neq \boldsymbol{0}$, називається ***регулярною.***

§ 6. Будова кривої в околі довільної точки

Нехай задана плоска крива (крива, всі точки якої належать деякій площині):

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{T_0 \leq t \leq T}.$$

Зсунемось з точки $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{t_0})$ в нескінченно близьку до неї точку $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t})$. Вектор зсуву $\overline{\boldsymbol{M_0M}}$ за формулою Тейлора постанеу вигляді:

$$\overline{\boldsymbol{M_0M}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t_0}) = \bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_0})\frac{t-t_0}{\boldsymbol{1!}} + \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t_0})\frac{(t-t_0)^2}{\boldsymbol{2!}} + \cdots .$$

В загальному випадку може статися, що $\bar{\boldsymbol{r}}^{(p)}(\boldsymbol{t_0})$ – перша відмінна від нуля похідна вектор-функції $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, тобто:

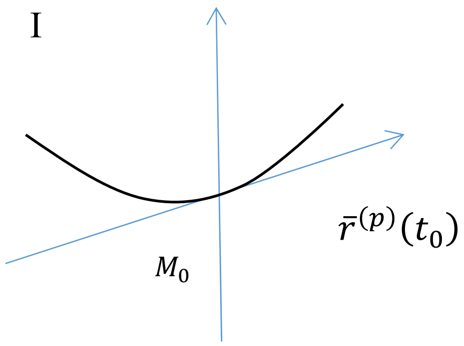
$$\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_0}) = \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t_0}) = \cdots = \bar{\boldsymbol{r}}^{(p-1)}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{0}, \quad \bar{\boldsymbol{r}}^{(p)}(\boldsymbol{t_0}) \neq \boldsymbol{0}.$$

Тоді:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{M_0M}}}{(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})^{\boldsymbol{p}}}=\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}!}+\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p}+\mathbf{1})}(\boldsymbol{t_0})\frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}}{(\boldsymbol{p}+\mathbf{1})!}+\cdots$$

Отже вектор $\frac{\overline{\boldsymbol{M_0M}}}{(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})^{\boldsymbol{p}}}$, що йде в напрямку січної, має границю $\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})}{\boldsymbol{p}!}$. Таким чином, крива в точці $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{t_0})$ має дотичну, що проходить в напрямку вектора $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})$.

Зокрема, при $\boldsymbol{p}=\mathbf{1}$точка $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{t_0})$ – наперед звичайна і дотична в цій точці має напрямок $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_0})$.



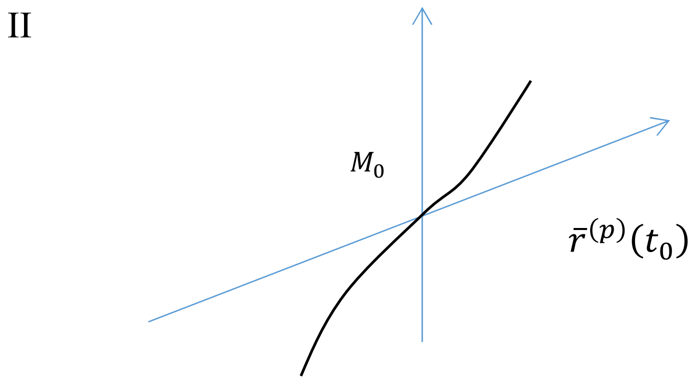
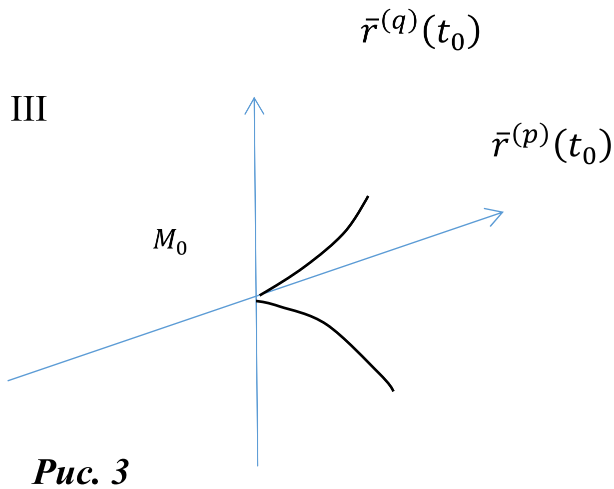


Рис. 1

Рис. 2



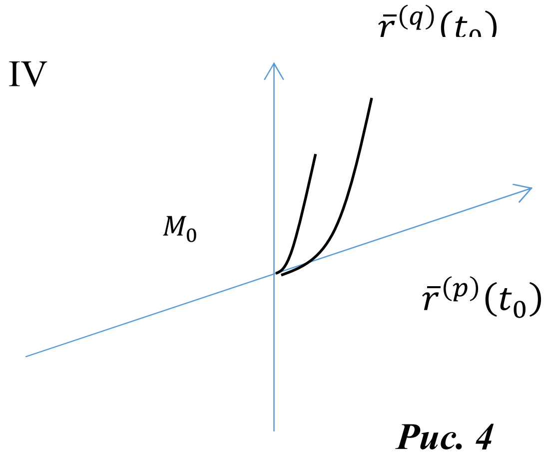


Рис. 3

Рис. 4

Нехай $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{t_0})$ – перша після $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})$ похідна, яка не паралельна $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})$.Тоді вектор $\overline{\boldsymbol{M_0M}}$можна розкласти по векторах $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})$ и $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{t_0})$:

$$\overline{\boldsymbol{M_0M}}=\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})+\boldsymbol{b}\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{t_0}).$$

При цьому головні частини коефіцієнтів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$при $\boldsymbol{t}\to\boldsymbol{t_0}$ будуть $(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})^{\boldsymbol{p}}/\boldsymbol{p}!$і$(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})^{\boldsymbol{q}}/\boldsymbol{q}!$ відповідно. В залежності від парності чи непа-

$\bar{r}^{(q)}(t_0)$

рності $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ коефіцієнти $\boldsymbol{a}$ і$\boldsymbol{b}$ приймають додатні чи від’ємні значення. Можливі чотири випадки: $\bar{r}^{(q)}(t_0)$.

У випадках I і II маємо звичайні точки (I – точка основного типу, II – точка перегину), в III, IV – особливі (зворотна точка 1-го і 2-го роду відповідно).

Отримані результати справедливі і для просторових кривих, тільки крива не буде розташована точно в площині векторів $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{t_0})$ і $\bar{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{t_0})$, а відхилиться від неї на величину, яка є нескінченно малою вищого порядку порівняно із зсувами в самій площині.

Вправи

1. Яка крива задається рівнянням

$$\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{t} + \bar{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}},$$

де $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ і $\bar{\mathbf{c}}$ – постійні вектори?

2. Довести, що якщо вектори $\bar{\mathbf{b}}$ і $\vec{\mathbf{c}}$ не колінеарні , то рівняння

$$\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}\,\mathbf{cht} + \bar{\mathbf{c}}\,\mathbf{sht}$$

задає гіперболу.

3. Точка **M** рівномірно обертається навколо деякої прямої і одночасно переноситься рівномірним рухом паралельно цій прямій. Лінія, що описується точкою **M**, називається гвинтовою лінією. Скласти рівняння цієї лінії.

4. Скласти параметричне рівняння кривої

$\boldsymbol{y^2 = x}\,, \boldsymbol{x^2 = z}$.

5. Довести, що параметризації

$$\boldsymbol{x = cost\,, y = sint, z = t, 0 \le t \le 4\pi}$$

і

$$\boldsymbol{x = cos\tau^2\,, y = sin\tau^2\,, z = 2\tau\,, 0 \le \tau \le 2\pi}$$

не еквівалентні.

6. Написати параметричне рівняння кривої:

$$\boldsymbol{y^2 = 2px\,, x + y - z = 0}.$$

§ 7. Довжина дуги кривої. Натуральний параметр

1. Розглянемо регулярну криву $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{T_0 \le t \le T}$. Оберемо послідовність проміжних значень параметра $\boldsymbol{T_0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = T}$. Для кривої теж отримаємо розбиття на $\boldsymbol{n}$дуг. На кожній дузі $\boldsymbol{M_\iota\widetilde{M}_{\iota+1}}$ побу-

дуємо хорду $\boldsymbol{M_i M_{i+1}}$ и відповідний вектор-диференціал $\overline{\boldsymbol{M_\iota M_\iota}}' = \bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t_i})(\boldsymbol{t_{i+1}} - \boldsymbol{t_i})$.

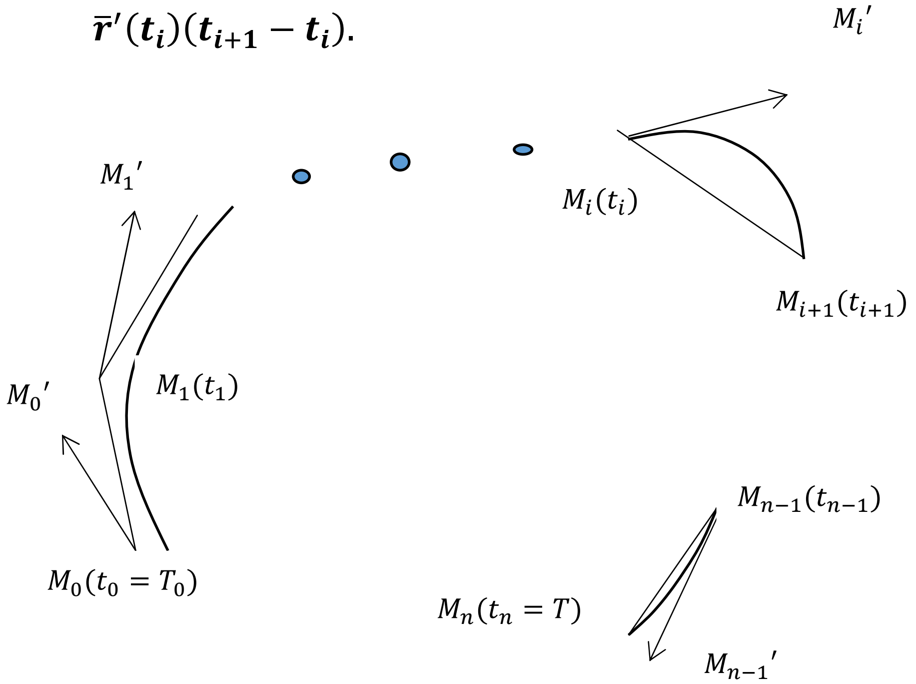


Рис. 1

Довжина дуги кривої розуміється як границя ламаної, вписаної в неї, тобто: $\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{M_i M_{i+1}}$.

Порівняємо цю суму з сумою довжин векторів-диференціалів. Враховуючи властивості нерівностей і формулу Тейлора, маємо:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{M_i M_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{M_i M_i}'\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} |\boldsymbol{M_i M_{i+1}} - \boldsymbol{M_i M_i}'| \le$$

$$\le \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{C_1}(\boldsymbol{t_{i+1}} - \boldsymbol{t_i})^2 \le$$

$$\le \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{C_1} \Delta \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{t_{i+1}} - \boldsymbol{t_i}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{C_1} \Delta (\boldsymbol{t_n} - \boldsymbol{t_0}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{C_1} \Delta (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T_0}),$$

де $\Delta = \mathbf{max}_{i=0,1,2,\ldots,n-1}(\boldsymbol{t_{i+1}} - \boldsymbol{t_i})$.. Очевидно, що при $\Delta \to \boldsymbol{0}$ суми, що розглядаються, мають однакову границю. Але суму

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_i' = \sum_{i=0}^{n-1} |\bar{r}'(t_i)|(t_{i+1} - t_i)$$

Можна розглядувати як інтегральну суму для скалярно додатної функції $f(t) = |\bar{r}'(t)|$, що має границю $\int_{T_0}^{T} |\bar{r}'(t)| dt$ при $\Delta \to 0$. Таким чином, отримали вираз довжини дуги:

$$s = \int_{T_0}^{T} |\bar{r}'(t)| dt.$$

Через координати це виглядає як:

$$s = \int_{T_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Або:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dx.$$

2. Нехай знову задана крива $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $T_0 \le t \le T$. Значенням $t \in [T_0, T]$ однозначно відповідають точки кривої, отже параметр t у вказаних границях відіграє роль координатної системи на кривій. Можна, зберігаючи криву, ввести на ній іншу параметризацію:

$$t = t(\tau), \;\; \tau_0 \le \tau \le \tau_1.$$

Тоді рівняння нашої кривої набуває вигляду $\bar{r} = \bar{r}\big(t(\tau)\big)$, причому з урахуванням $\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \bar{r}'(t) t'(\tau)$, похідні вектор-функції $\bar{r}$відносно параметрів t і τ відрізняються лише модулями, співпадаючи за напрямком.

Спробуємо обрати параметризацію, геометрично пов'язану з самою кривою, а саме, оберемо в якості параметра довжину дуги. Тоді при вивченні кривої всі пов'язані з параметризацією величини будуть геометрично слідувати із властивостей самої кривої без будь-якої істотної довільності.

Нехай $M_0(t_0)$ – фіксована точка кривої, яка вважається точкою відліку, $M(t)$ – довільна точка кривої. Довжина дуги $\widetilde{M_0 M}$ дорівнює

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\bar{r}'(t)| dt,$$

отже $s'(t) = |\bar{r}'(t)| \neq 0$ і тому функція $s = s(t)$ має зворотню функцію $t = t(s), s(T_0) \leq s \leq s(T)$. Таким чином, кожному значенню sу вказаному проміжку зміни однозначно відповідає точка кривої $M(t)$. Тому можемо прийняти s за новий параметр, геометрично пов'язаний з кривою. Деяка довільність є лише в тому, яка точка M_0 обрана за точку відліку і напрямку, в якому дуга зростає. Враховучи залежність $t = t(s)$, отримуємо рівняння кривоїу вигляді $\bar{r} = \bar{r}(t(s))$.

Отже із попередніх розміркувань витікають 2 корисні висновки:

I. Модуль диференціала дуги дорівнює модулю диференціала радіус-вектора (дійсно, з огляду на $s'(t) = |\bar{r}'(t)|$, маємо $|ds| = |d\bar{r}|$).
II. Похідна радіус-вектора відносно параметра-дуги є вектор одиничний: $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = 1.$

Довжину дуги, обрану в якості параметра кривої, називають ***натуральним параметром.***

Умовимось позначати похідну відносно натурального параметра так:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \dot{\bar{r}}.$$

Зауважимо, що результати § 1-3 глави 2 легко переносяться на випадок плоскої кривої.

Вправи

1. Знайти довжину дуги гвинтової лінії:
$$\bar{r} = \{3a\cos t\,, 3a\sin t\,, 4at\}$$
від точки її перетину з площиною **XOY** до довільної точки $M(t)$.
2. Знайти довжину одного витка між двома точками перетину з площиною $y = 0$ лінії:
$$\bar{r} = \{a(t - \sin t),\ a \cdot (1 - \cos t),\ 4a\cos\tfrac{t}{2}\}\,.$$
3. Довести, що замкнена лінія

$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{cos^3t}, \boldsymbol{sin^3t}, \boldsymbol{cos2t}\}$ має довжину $\boldsymbol{s = 10}$.

4. Записати диференціал довжини дуги лінії в полярно-циліндричних координатах.

5. Знайти диференціал довжини дуги лінії в сферичних координатах.

6. Записати натуральну параметризацію гвинтової лінії:

$\boldsymbol{x = a\cos t, y = a\sin t, z = ht}$.

§ 8. Дотичні і нормалі просторової кривої

Розглянемо регулярну криву $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{T_0 \le t \le T}$, отже умова $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \neq \boldsymbol{0}$ виконується в будь-якій точці проміжку $\boldsymbol{T_0 \le t \le T}$.

Вектор $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$ має напрямок дотичної до кривої, тому рівняння дотичної до кривої в точці $\boldsymbol{M(x(t), y(t), z(t))}$ має вигляд:

$$\overline{\boldsymbol{R}} - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$$

або:

$$\frac{\boldsymbol{X - x(t)}}{\boldsymbol{x'(t)}} = \frac{\boldsymbol{Y - y(t)}}{\boldsymbol{y'(t)}} = \frac{\boldsymbol{Z - z(t)}}{\boldsymbol{z'(t)}}$$

де $\overline{\boldsymbol{R}}$ –радіус-вектор довільної точки дотичної з координатами $\boldsymbol{X, Y, Z}$, а $\boldsymbol{\lambda}$ – параметр на дотичній.

Нормаллю до просторової кривої називається перпендикуляр до дотичної, що проведений через точку дотику. Очевидно, у фіксованій точці кривої можна побудувати безліч нормалей. Всі вони заповнюють площину, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної і називається ***нормальною площиною.***

Рівняння нормальної площини кривої в точці $M(t)$ має вигляд:

$$\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\left(\overline{\boldsymbol{R}} - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{0}$$

або:
$$\boldsymbol{x'(t)\big(X - x(t)\big) + y'(t)\big(Y - y(t)\big) + z'(t)\big(Z - z(t)\big) = 0}$$

Тут $\overline{\boldsymbol{R}}$ – радіус-вектор довільної точки нормальної площини з координатами $\boldsymbol{X, Y, Z}$.

§ 9. Точки розпрямлення

Надалі, вивчаючи криву $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, будемо вважати не тільки $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \neq \boldsymbol{0}$, але й

$$\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) \nparallel \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{t}). \qquad (9.1)$$

Очевидно, якщо $\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) \| \bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$, то ця умова виконується для будь-якого параметра, в тому числі і натурального. В попередньому параграфі ми довели, що $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$ – одинична вектор-функція, тому з урахуванням леми 1 $\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} \perp \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$, тому умова (9.1) виконується завжди, за винятком випадку $\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{0}$. Отже, (9.1) еквівалентно:

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} \neq \boldsymbol{0}. \qquad (9.2)$$

Означення. Криві $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{C_2}$ мають дотик порядка $\boldsymbol{n}$, тобто розбіжність $\boldsymbol{M_1 M_2}$ буде нескінченно малою порядка не нижче $\boldsymbol{n+1}$, тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{n}$послідовних похідних від радіус-вектора відносно довжини дуги $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}, \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}, \dots, \bar{\boldsymbol{r}}$ співпадають для обох кривих в їх спільній точці.

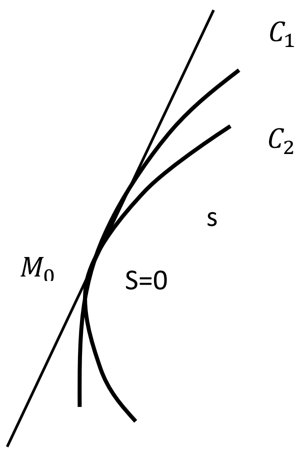


Рис.1

В нашомувипадку одна з кривих – пряма (дотична). Точку, в якій крива має із своєю дотичною дотик 2-го порядка, називають ***точкою розпрямлення.***

Отже, (9.1) або (9.2) – необхідна і достатня ознака точок розпрямлення, які в подальшому, як правило, будемо виключати з розгляду.

§ 10. Стична площина

Сробуємо підібрати для кожної точки $\boldsymbol{M(t)}$ кривої $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ площину, що проходить через неї і "найближчу" до кривої поблизу точки $\boldsymbol{M(t)}$, де $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \neq \boldsymbol{0}$ і $\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) \nparallel \boldsymbol{a}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{t})$**.**

Для цього проведемо через $\boldsymbol{M(t)}$ площину з ортом нормалі $\bar{\boldsymbol{m}}$ і оцінимо відстань від точки $\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t})$ до цієї площини.

Означення 1. В точці $\boldsymbol{M}$ крива має з площиною дотик -го порядка, якщо $\boldsymbol{PM}'$є нескінченно мала не нижче $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}$-го порядку відносно $\Delta\boldsymbol{t}$ і дотик точно $\boldsymbol{n}$-го порядка, якщо $\boldsymbol{PM}'$ точно $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}$-го порядка відносно $\Delta\boldsymbol{t}$**.**

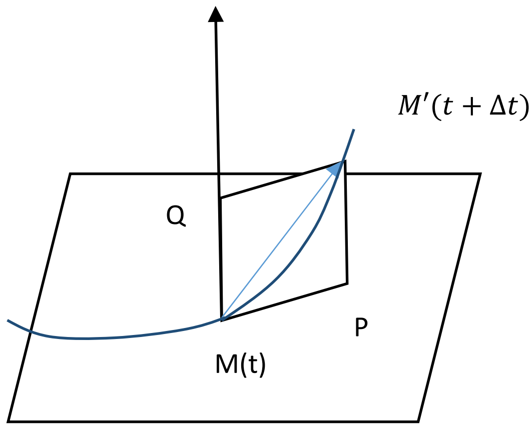


Рис. 1

Легко перевірити, що порядок нескінченної малості $\boldsymbol{PM}'$ інваріантний відносно вибору параметра $\boldsymbol{t}$ на кривій. Тому цілком коректна задача: знайти площину, що проходить через точку $\boldsymbol{M}$ с найвищим можливим порядком дотику з кривою в точці $\boldsymbol{M}$.

Розкладемо приріст радіус-вектора кривої за формулою Тейлора:

$$\overline{\boldsymbol{MM}'} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}) - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{1}!} + \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})\frac{(\Delta\boldsymbol{t})^2}{\boldsymbol{2}!} + \cdots$$

З іншого боку, $\boldsymbol{PM}' = \text{пр}_{\bar{\boldsymbol{m}}}\overline{\boldsymbol{MM}'}$, тому:

$$\boldsymbol{PM}' = \bar{\boldsymbol{m}}\overline{\boldsymbol{MM}'} = \bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{1}!} + \bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})\frac{(\Delta\boldsymbol{t})^2}{\boldsymbol{2}!} + \cdots$$

I. Нехай $\bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \neq \boldsymbol{0}$, тоді $\boldsymbol{PM}'$є нескінченно малою 1-го порядка, а дотик кривої з площиною в точці $\boldsymbol{M(t)}$– 0-го порядка, тобто по суті маємо перетин кривої з площиною. Дійсно, дотична до кривої, що має напрямок вектора $\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$, не ортогональна $\bar{\boldsymbol{m}}$, отже, не належить площині, а перетинає її.

II. При $\bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$ маємо дотик 1-го порядка. Геометрично це означає, що дотична до кривої ортогональна $\bar{m}$ і належить нашій площині.

III. Якщо $\bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$ і $\bar{\boldsymbol{m}}\bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$, то маєио дотик (не нижче) 2-го порядка. Така площина існує і єдина – вона проходить через точку $\boldsymbol{M}$ і вектори $\bar{\boldsymbol{r}}'$ та $\bar{\boldsymbol{r}}''$ в цій точці ($\bar{\boldsymbol{r}}' \nparallel \bar{\boldsymbol{r}}''$).

Означення 2. Площина, що має з кривою в даній її точці дотик 2-го порядка, називається ***стичною площиною.***

Очевидно, що крива в будь-якій своїй точці має одну і тільки одну (при $\bar{r}' \nparallel \bar{r}''$) стичну площину.

Для плоскої кривої стичною площиною у всіх точках є площина, в якій крива розташована.

Зауважимо, що стична площина в точці $\boldsymbol{M}$ може бути побудована як граничне положення площини, що проходить через три нескінченно близькі точки $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}, \boldsymbol{M_3}$ кривої, коли ці точки необмежено наближаються до $\boldsymbol{M}$.

§ 11. Триграник Френе

З стичною площиною пов'язана низка побудов.

Означення. Нормаль в даній точці кривої, що лежить в стичній площині, називають ***головною нормаллю,*** а нормаль, перпендикулярну достичної площини – ***бінормаллю.***

Легко бачити, що дотична, головна нормаль та бінормаль побудовані в одній і тій же точці кривої M, взаємно ортогональні, тобто утворюють природну декартову систему координат в точці M. Роль координатних площин відіграють ***стична площина,*** що проходить через дотичну і головну нормаль; ***нормальна площина,*** що містить головну нормаль і бінормаль; ***спрямна площина,*** створена бінормаллю і дотичною.

Сукупность ціх трьох координатних осей и трьох координатних площин називається ***супроводжуючим тригранником кривої*** в точці M або просто ***тригранником Френе.*** Тригранник Френе будується в кожній точці кривої, де $\bar{r}' \nparallel \bar{r}''$, і змінюється від точки до точки.

Виходячи з означення, можна записати рівняння элементів тригранника.

В § 4 ми отримали рівняння дотичноїі нормальної площини. Далі маємо:

$$\left(\bar{\boldsymbol{R}} - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})\right)[\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})] = \mathbf{0}$$

або:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{x}''(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{y}''(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{z}''(\boldsymbol{t}) \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

– рівняння стичної площини:

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\lambda}[\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})]$$

або:

$\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}''-\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}''} = \frac{\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}''} = \frac{\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}''-\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}''}$. – рівняння бінормалі;

$\bar{\boldsymbol{R}} - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\lambda}[\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times [\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})]]$ – рівняння головної нормалі;

$\left(\bar{\boldsymbol{R}} - \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})\right)\left[\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{t}) \times [\bar{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \bar{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})]\right] = \mathbf{0}$ – рівняння спрямної площини.

Тут скрізь $\bar{\boldsymbol{R}}$ – радіус-вектор довільної точки з координатами $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ відповідного елемента, $\boldsymbol{\lambda}$ – параметр на нормалях.

Домовимося відкладувати на осях тригранника в визначений бік орти нашої системи координат і їх напрямки вважати додатними напрямками на осях. Позначимо $\bar{\boldsymbol{t}}$ – орт дотичної, $\bar{\boldsymbol{n}}$ – орт головної нормалі, $\bar{\boldsymbol{b}}$ – орт биінормалі.

Припустимо, що крива віднесена до натурального параметру: $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{s})$. Тоді $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$– одиничний вектор, спрямований по дотичній. Приймемо: $\bar{\boldsymbol{t}} = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$.

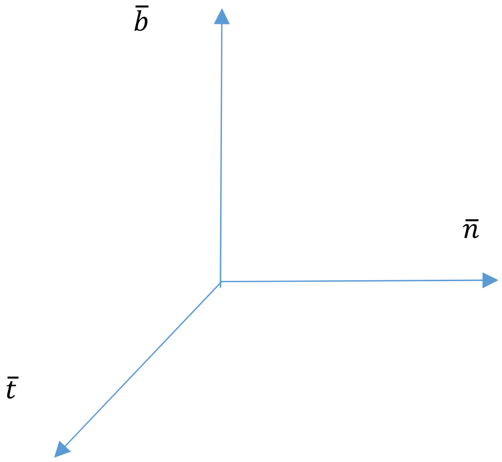
Тоді $\dot{\bar{\boldsymbol{t}}} = \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} \perp \dot{\bar{\boldsymbol{r}}} = \bar{\boldsymbol{t}}$.

Таким чином, $\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}$ спрямований по деякій нормалі до кривої, лежить в стичній площині і $\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} \neq \mathbf{0}$, отже, має напрямок головної нормалі.

Домовимося відкладувати орт $\bar{n}$ в напрямку вектора $\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}$. Нарешті, орт бінормалі $\bar{\boldsymbol{b}}$ спрямуємо так, щоб вектори $\bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{n}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ утворили праву трійку.

Очевидно, виконуються рівності:

$$[\bar{\boldsymbol{t}} \times \bar{\boldsymbol{n}}] = \bar{\boldsymbol{b}}, \ \ [\bar{\boldsymbol{n}} \times \bar{\boldsymbol{b}}] = \bar{\boldsymbol{t}}, \qquad [\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{t}}] = \bar{\boldsymbol{n}}$$



Вправи

1. Записати рівняння дотичної до лінії

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \left\{\frac{\boldsymbol{t}^4}{4}, \frac{\boldsymbol{t}^3}{3}, \frac{\boldsymbol{t}^2}{2}\right\}$$

вдовільній точці, де $\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$.

2. Довести, що дотична до гвинтової лінії

$$\boldsymbol{x = acost}\,, \qquad \boldsymbol{y = asint}\,, \qquad \boldsymbol{z = ht}$$

утворює постійний кут з віссю **OZ**.

3. Знайти дотичну до лінії

$$\boldsymbol{x = 3t - t^3}\,, \ \ \boldsymbol{y = 3t^2}\,, \ \ \boldsymbol{z = 3t + t^3}\,,$$

яка перпендикулярна до вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\}$.

4. Скласти рівняння дотичної до лінії

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}, \ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}\}\,,$$

яка паралельна до площини $\boldsymbol{x - 2y - 5 = 0}$.

5. Довести, що якщо дотичні гладкої кривої проходять через одну точку, то крива є відрізком, півпрямою або прямою.

6. Довести, що якщо дотичні кривої паралельні деякій площині, то крива є плоскою.

7. Скласти параметричне рівняння дотичної до лінії

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2,\ \ x = y}$$

у точці $\boldsymbol{M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)}$.

8. Скласти рівняння нормальної площини лінії

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1}$$

в точці$\boldsymbol{M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)}$.

9. Довести, що всі нормальні площини кривої

$$\boldsymbol{\bar{r} = \{a\sin^3 t, a\sin t\cos t, a\cos t\}}$$

проходять через початок координат.

10. Скласти рівняння дотичної прямої і нормальної площини лінії, заданої перетином двох поверхонь $\begin{cases} \boldsymbol{F(x,y,z) = 0} \\ \boldsymbol{\Phi(x,y,z) = 0} \end{cases}$.

11. Знайти дотичну і нормаль до лінії

$$\boldsymbol{x = \frac{a}{t^2+1}\ , y = \frac{a}{t(t^2+1)}}$$

у довільній точці.

12. Знайти рівняння елементів тригранника Френе для таких кривих :

1) $\boldsymbol{\bar{r} = \{t\ , t^3, t^2 + 1\}}$ при $\boldsymbol{t = 1}$;

2) $\boldsymbol{\bar{r} = \{\sin t, \cos t, \mathrm{tg}\, t\}}$ при $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4}}$;

3) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 3} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 2} \end{cases}$ в точці $\boldsymbol{M(1;1;1)}$;

4) $\begin{cases} \boldsymbol{y^2 + z^2 = 25} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 10} \end{cases}$ в точці $\boldsymbol{M(1;3;4)}$;

5) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 1} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = x} \end{cases}$ в точці $\boldsymbol{M(0;0;1)}$;

6) $x = \cos t\,, y = \sin t, z = t$ в довільній точці.

13. Знайти орти дотичної,бінормалі і головної нормалі кривих :

1) $\bar{r} = \{t\,, t^2, t^3\}$ в довільній точці ;

2) $\bar{r} = \{a(t - \sin t)\,, a(1 - \cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\}$ в довільній точці ;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ в точці $M(1; 1; 1)$;

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ в точці $M(1; 2; 2)$.

§ 12. Кривина просторової кривої

Означення. Швидкість обертання вектора $\bar{t} = \dot{\bar{r}}$ (тобто швидкість обертання дотичної) в точці кривої відносно шляху s, що пройдений уздовж кривої, називається ***кривиною*** k в даній точці:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

де Δs – шлях, що пройдений уздовж кривої від даної точки,
$\Delta\varphi$ – кут відповідного повороту дотичної $\bar{t}$.
Згідно з лемою 2:

$$k = |\dot{\bar{t}}| = |\ddot{\bar{r}}|.$$

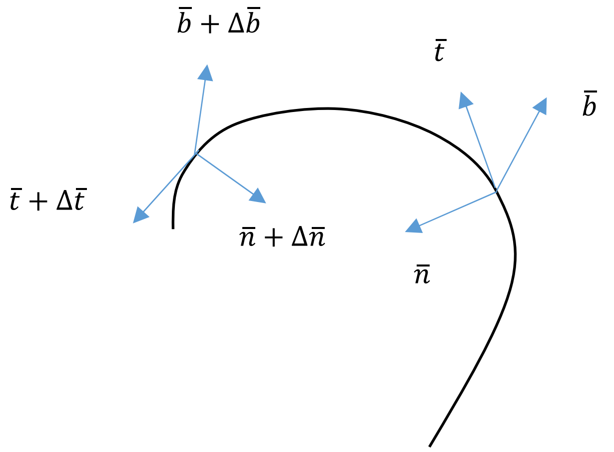
Очевидно, $k \geq 0$, причому $k = 0$ відповідає точці розпрямлення.

Теорема (критерій прямої лінії). Для того, щоб лінія була прямою, необхідно і достатньо, щоб її кривина у всіх точках дорівнювала нулю, тобто щоб лінія суцільно складалася з точок розпрямлення.

§ 13. Формули Френе. Скрут просторової кривої

Зараз ми отримаємо формули, що характеризують обертання тригранника Френе, коли точка дотику рухається уздовж просторової кривої.

Так як $\bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{n}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ – одиничні взаємно ортогональні вектори, то при нескінченно малому зміщенні точки дотику уздовж кривої ця трійка повертається як тверде тіло.



Розкладемо похідні $\dot{\bar{\boldsymbol{t}}}(\boldsymbol{s}), \dot{\bar{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{s}), \dot{\bar{\boldsymbol{b}}}(\boldsymbol{s})$ в базісі $\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{s}), \bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{s}), \bar{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{s})$, виключив-ши попередньо з розгляду точки розпрямлення.

Так як $\dot{\bar{\boldsymbol{t}}} = \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}$, то $\dot{\bar{\boldsymbol{t}}}$ спрямований в бік вектора $\bar{\boldsymbol{n}}$. З попереднього параграфу $|\dot{\bar{\boldsymbol{t}}}| = \boldsymbol{k}$, отже:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{t}}} = \boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{n}} \qquad (13.1)$$

Формула, яку ми отримали, називаеється ***1 формулою Френе,*** а вектор $\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{n}}$ в її правій частині – ***вектором кривины кривої.***

Диференціюючи рівність $\bar{\boldsymbol{b}} = [\bar{\boldsymbol{t}} \times \bar{\boldsymbol{n}}]$ по $\boldsymbol{s}$ з урахуванням (13.1) і леми 1, маємо:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{b}}} = -\varkappa\bar{\boldsymbol{n}} \qquad (13.2)$$

Відзначимо, що коэфіцієнт $\varkappa$ тут визначається в кожній точці єдиним чином і може набувати будь-яких значень, в тому числіі від'ємних. Значення коэфіцієнта $\varkappa$ в даній точці кривої називається ***скрутом*** кривої в даній точці.

Використовуючи (13.1) і (13.2), можна отримати:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{n}}} = -\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{t}} + \varkappa\bar{\boldsymbol{b}}. \qquad (13.3)$$

Вирази (13.3) и (13.2) називаються ***II і III формулами Френе*** відповідно.
На підставі лем II і III формул Френе з'ясовується геометричний зміст модуля скруту $|\boldsymbol{\varkappa}|$ як швидкості обертання бінормалі у відповідній точці по відношенню до шляху, що пройдений уздовж кривої.

Теорема. Крива є плоскою тоді і тільки тоді, коли скрут в усіх її точках дорівнює нулю.

Формули Френе, а також відповідні означення дають нам такі вирази для кривини і скруту:

$$\boldsymbol{k} = |\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}|, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \frac{(\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}, \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}^2}$$

або, в довільній параметризації,

$$\boldsymbol{k} = \frac{|[\bar{\boldsymbol{r}}' \times \bar{\boldsymbol{r}}'']|}{|\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \frac{(\bar{\boldsymbol{r}}', \bar{\boldsymbol{r}}'', \bar{\boldsymbol{r}}''')}{[\bar{\boldsymbol{r}}' \times \bar{\boldsymbol{r}}'']^2}.$$

§ 14. Натуральні рівняння кривої. Основна теорема теорії кривих

Розглянемо криву, що віднесена до довжини дуги як параметру:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{s}), \qquad \boldsymbol{S_0} \le \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{S},$$

виключаючи точки розпрямлення, тобто $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$. Тоді вздовж кривої кривина $\boldsymbol{k}$ і скрут $\boldsymbol{\varkappa}$ є певними функціями $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{s}), \ \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{s}), \ \boldsymbol{k}(\boldsymbol{s}) > 0 \qquad (14.1)$$

Оскільки довжина дуги, кривина і скрут – величини, що не залежать від выбору системи координат в просторі, то і вигляд функціональної залежності $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{s})$ і $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{s})$ також від цього выбору не залежить. Рівняння (14.1) називаються ***натуральними рівняннями*** просторової кривої.
На запитання, чи визначають натуральні рівняння криву однозначно, відповідає наступна теорема.
Основна теорема теорії кривих. Нехай $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})$ і $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$ – будь-які регулярні функції, причому $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}) > 0$. Тоді існує, притому єдина з

точністю до положення в просторі крива, для якої $\boldsymbol{f(s)}$ є кривиною, а $\boldsymbol{\varphi(s)}$ – скрутом в точці, що відповідає дузі $\boldsymbol{s}$.

Мы радимо студентам провести доведення цієї теореми, використовуючи відомості з теорії диференціальних рівнянь, а також приділити увагу її практичному застосуванню, тобто відновленню рівнянь кривої за заданими кривиною і скрутом.

Вправи

1. Довести, що регулярна крива лежить на прямій ⇔ її кривина $\boldsymbol{k \equiv 0}$.
2. Довести, що регулярна крива з ненульовою кривиною буде плоскою ⇔ її скрут$\boldsymbol{\varkappa}$≡0.

3. Знайти кривизну і скрут в довільній точці таких ліній :

1) $\boldsymbol{\bar{r} = \{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}}$;
2) $\boldsymbol{\bar{r} = \{2t,\ lnt, t^2\}}$;
3) $\boldsymbol{\bar{r} = \{e^t sint, e^t cost, e^t\}}$;
4) $\boldsymbol{\bar{r} = \{3t - t^3, 3t^2\ , 3t + t^3\}}$;
5) $\boldsymbol{\bar{r} = \ \{cos^3 t, sin^3 t, cos2t\}}$;
6) $\boldsymbol{y = sinx}$ (синусоїда) ;
7) $\boldsymbol{y = a(1 + m)sinmt - amsin(1 + m)t}$ (епіциклоїда) ;
8) $\boldsymbol{y = ach\frac{x}{a}}$ (ланцюгова лінія) ;
9) $\boldsymbol{x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2}$ (конхоїда) ;
10) $\boldsymbol{\rho^2 =\ \alpha^2 cos2\varphi}$ (лемніската) ;
11) $\boldsymbol{\rho = \alpha\varphi}$ (спіраль Архімеда) ;
12) $\boldsymbol{y = -lncosx}$;
13) $\boldsymbol{x =\ \alpha(2cost - cos2t), y =\ \alpha(2sint - sin2t)}$;
14) $\boldsymbol{y^2\ = 8x}$ в точці ($\boldsymbol{\frac{9}{8}}$, ; $\boldsymbol{3}$) ;
15) $\boldsymbol{\rho = \alpha^\varphi}$ в точці $\boldsymbol{\varphi = 0}$.

4. Знайти кривину і скрут кривої

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 + z^2 = 1\ , y^2 - 2x + z = 0}$$

в точці $\boldsymbol{M(1; 1; 1)}$.

5. Знайти кривину і скрут кривої

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + shx = siny + y} \\ \boldsymbol{z + e^z = x + ln(1 + x) + 1} \end{cases}$$

в точці $\boldsymbol{M(0;0;0)}$.

6. Підрахувати $(\dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}, \ddot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}, \dddot{\bar{\boldsymbol{\beta}}})$ та $(\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}, \ddot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}, \dddot{\bar{\boldsymbol{\tau}}})$.

7. Скласти натуральне рівняння таких ліній :

1) $\boldsymbol{x = acost}$, $\boldsymbol{y = asint}$, $\boldsymbol{z = ht}$;
2) $\boldsymbol{x = acht}$, $\boldsymbol{y = asht}$, $\boldsymbol{z = at}$;
3) $\boldsymbol{x = e^t}, \boldsymbol{y = e^{-t}}, \boldsymbol{z = t\sqrt{2}}$;
4) $\boldsymbol{x = ct}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{2}clnt}$, $\boldsymbol{z = ct^{-1}}$.

8. Показати, що якщо кривина і скрут лінії постійні і не дорівнюють нулю, то лінія є гвинтовою.
9. Лінія задана натуральними рівняннями

$$\boldsymbol{k = k(s)}, \qquad \boldsymbol{\varkappa = \varkappa(s)}.$$

Показати, що натуральними рівняннями лінії, симетричної даній відносно початку координат, будуть рівняння $\boldsymbol{k = k(s)}$, $\boldsymbol{\varkappa = -\varkappa(s)}$.

10. Скласти натуральні рівняння плоских кривих :
1) $\boldsymbol{y = ach\frac{x}{a}}$;
2) $\boldsymbol{\rho = a(1 + cos\varphi)}$;
3) $\boldsymbol{\vec{r} = (a(t - sint), a(1 - cost))}$;
4) $\boldsymbol{x = a\left(ln\, ctg\frac{t}{2} - cost\right), y = asin\, t}$.

11. Написати параметричне рівняння плоских ліній, заданих натуральним рівнянням :

1) $\boldsymbol{k = k(s)}$;
2) $\boldsymbol{k = c}$, $\boldsymbol{c = const}$;
3) $\boldsymbol{k = \frac{s}{a^2}}$;
4) $\boldsymbol{k = \frac{a}{a^2+s^2}}$;
5) $\boldsymbol{2ask^2 = 1}$;

6) $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{as}}$.

12. Знайти рівняння останньої кривої в полярних координатах.

Контрольні питання до теми “Теорія кривих”

1. Яка точка просторової кривої називається звичайною?
2. В чому полягає достатня умова звичайної точки?
3. Яка крива називається регулярною?
4. Який параметр на кривій називають натуральним?
5. Властивості натуральної параметризації кривої.
6. Якщо крива задана параметричними рівняннями, як перевірити, чи є ця параметризація кривої натуральною?
7. Дотична до кривої в точці. Різні види рівнянь дотичної.
8. Нормальна площина кривої в точці. Різні види рівнянь нормальної площини.
9. Яка точка кривої називається точкою розпрямлення?
10. Яка умова характеризує точку розпрямлення кривої відповідно натурального параметру?
11. Яка площина називається стичною площиною в точцікривої?
12. Головна нормаль і бінормаль кривої в точці.
13. Спрямна площина в точці кривої.
14. Тригранник Френе просторової кривої.
15. Різні види рівнянь елементів тригранника Френе.
16. Орти осей тригранника Френе в натуральній і довільній параметризації кривої.
17. Кривина просторової кривої.
18. Необхідна і достатня ознака прямої лінії.
19. Формула кривини в натуральній і довільній параметризації кривої.
20. Формули Френе.
21. Скрут просторової кривої.
22. Формула скруту в натуральній і довільній параметризації кривої.
23. Необхідна і достатня ознака плоскої кривої.
24. Основна теорема теорії кривих.
25. Натуральні рівняння кривої.

ГЛАВА III. ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ

Досі ми мали справу з вектор-функціями одного скалярного аргумента.

Далі розглядаючи поверхні як двовимірні многовиди, що задаються зазвичай за допомогою своєї параметризації, ми користуємося вектор-функціями двох скалярних аргументів, припускаючи, що студенти ознайомилися з ними самостійно.

При вивченні глави III студенти повинні зосередити зусилля на чіткому визначенні основних понять і геометричній стороні розглянутих питань. Важливо, щоб студенти змогли застосувати навички, набуті під час знайомства з попередньою главою, до кривих на поверхні. Відзначимо, що властивості кривих на поверхні більшою мірою визначаються властивостями самої поверхні. Так, головні і асимптотичні напрямки в точці поверхні, лінії кривини, асимптотичні і геодезичні лінії визначаються для даної поверхні однозначно, оскільки залежать тільки від будови самої поверхні і ні в якій мірі не залежать від вибору криволінійних координат на ній. З вибором криволінійних координат пов'язана координатна мережа поверхні.

Найбільш складними для розуміння є основні рівняння теорії поверхонь. Тут окрім геометрії необхідне знання теорії диференціальних рівнянь і володіння алгебраїчним апаратом. Ми не рекомендуємо студентам заучувати основні формули, поки вони самостійно не виконають всі проміжні викладки.

§ 15. Поверхні в просторі. Дотична площина і нормаль до поверхні

Як відомо, геометричне місце точок, координати яких задовільняють рівнянню:

$$\boldsymbol{F(x,y,z)=0} \tag{15.1}$$

в деякій декартовій системі координат, називається поверхнею.

Якщо:

$$\boldsymbol{x=x(t)}, \qquad \boldsymbol{y=y(t)}, \qquad \boldsymbol{z=z(t)}$$

рівняння якоїсь кривої, що лежить на поверхні, то:

$$\boldsymbol{F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0}.$$

Дифференціюванням по $\boldsymbol{t}$ звідси отримуємо:

$$\boldsymbol{F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)\equiv 0}$$

в будь-якій точці кривої на поверхні. Тут похідні $\boldsymbol{x'(t)}$, $\boldsymbol{y'(t)}$, $\boldsymbol{z'(t)}$ залежать від вибору кривої и являють собою координати її дотичного вектора $\boldsymbol{\bar{r}'(t)}$. $\boldsymbol{F_x, F_y, F_z}$ залежать тільки від вибору точки на поверхні. Очевидно, останнє рівняння можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{\overline{\nabla F}(x,y,z)\cdot \bar{r}'(t)=0}, \tag{15.2}$$

де $\boldsymbol{\overline{\nabla F}(x,y,z)=F_x\bar{\imath}+F_y\bar{\jmath}+F_z\bar{k}}$ *−градієнт функціїF*.

Обмежимось розглядом лише тих точок поверхні, де $\boldsymbol{\overline{\nabla F}\neq 0}$. Тоді з (15.2) маємо, що дотичні до всіх кривих на поверхні, що проходять через точку $\boldsymbol{M(x,y,z)}$, розташовані в одній площині, яка містить точку $\boldsymbol{M}$ і перпендикулярна до $\boldsymbol{\overline{\nabla F}}$. Ця площина називається ***дотичною площиною*** до поверхні в точці $\boldsymbol{M}$. Її рівняння має вигляд:

$$\boldsymbol{F_x(x,y,z)(X-x)+F_y(x,y,z)(Y-y)+F_z(x,y,z)(Z-z)=0}$$

де $\boldsymbol{X}$, Y, Z – координати довільної точки дотичної площини поверхні.

Нормаль до поверхні, що визначається як перпендикуляр до дотичної площини в точці дотику, задається рівнянням:

$$\boldsymbol{\frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}}$$

де $\boldsymbol{X, Y, Z}$ – координати її довільної точки.

Точка $\boldsymbol{M(x,y,z)}$ на поверхні називається ***звичайною***, якщо поблизу її рівняння поверхні можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{z=f(x,y)} \tag{15.3}$$

де $\boldsymbol{f(x,y)}$ – однозначна функція принаймні классу $\boldsymbol{C^1}$.
Геометрично це означає, що кожній точці $\boldsymbol{P(x,y,0)}$ в деякій області $\boldsymbol{D}$ на площині $\boldsymbol{XY}$ відповідає одна й тілько одна точка поверхі $\boldsymbol{M(x,y,f(x,y))}$, що отримується плавним зміщенням точки $\boldsymbol{P}$ уздовж осі $\boldsymbol{OZ}$ на відрізок $\boldsymbol{f(x,y)}$**.** Кажуть, що поверхня в околі точки **М** являє собою ***простий кусок.***

Отже, звичайна точка поверхні характеризується тим, що досить малий її окіл в просторі вирізає простий кусок поверхні.

Очевидно, що поблизу точки, де виконується умова $\overline{\boldsymbol{\nabla F}} \neq \mathbf{0}$, рівняння поверхні (15.1) можна представити у вигляді (15.3), тому такі точки називаються ***свідомо звичайними***.

Якщо умову $\overline{\boldsymbol{\nabla F}} \neq \mathbf{0}$ не дотримано, то точка поверхні може виявитися особливою (наприклад, точки перетину поверхні, вершина конуса $\boldsymbol{x^2+y^2-z^2=0}$ і т. д.).

§ 16. Криволінійні координати на поверхні

При вивченні поверхонь найбільш доцільно користуватися параметричним поданням. Так, якщо відкладати задану вектор-функцію двох скалярних аргументів $\boldsymbol{u^1, u^2}$ в деякій області їх зміни

$$\boldsymbol{\bar r(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)\bar\imath + y(u^1,u^2)\bar\jmath + z(u^1,u^2)\bar k}$$

від точки O, то кінець вектора буде описувати деяку поверхню, причому координати точок цієї поверхні будуть:

$$\boldsymbol{x = x(u^1,u^2),\ y = y(u^1,u^2),\ z = z(u^1,u^2).} \qquad (16.1)$$

Легко довести, що якщо в точці $\boldsymbol{M(u^1,u^2)}$ поверхні (16.1) $\boldsymbol{\bar r_1 \nparallel \bar r_2}$, де $\boldsymbol{\bar r_1 = \frac{\partial \bar r}{\partial u^1}}$, $\boldsymbol{\bar r_2 = \frac{\partial \bar r}{\partial u^2}}$, то точка $\boldsymbol{M(u^1,u^2)}$ – свідомо звичайна (або регулярна). Якщо ця умова виконується для всіх точок поверхні, координатна сітка також називається *регулярною*.

Очевидно, що поблизу свідомо звичайної точки $(\boldsymbol{\bar r_1 \nparallel \bar r_2})$ має місце взаємно однозначна відповідність між точками поверхні і парами значень $\boldsymbol{u^1, u^2}$. На цій підставі параметри $\boldsymbol{u^1, u^2}$ називаються криволінійними координатами на поверхні.

Домовимося надалі вивчати поверхні тільки в їх свідомо звичайних точках.

Розглянемо на поверхні геометричне місце точок, криволінійні координати яких визначаються рівняннями:

$$\boldsymbol{u^i = u^i(t),\ i = 1, 2,} \tag{16.2}$$

де $\boldsymbol{t}$ – незалежна змінна. Радіус-вектор будь-якої точки може бути подано у вигляді:

$$\boldsymbol{\bar r = \bar r\left(u^1(t), u^2(t)\right),} \tag{16.3}$$

і, отже, описує криву на поверхні.

З даною системою криволінійних координат на поверхні пов'язані ***координатні лінії*** – криві, уздовж яких одна з координат стала. При $\boldsymbol{u^1 = const}$ маємо $\boldsymbol{u^2}$-лінії, при $\boldsymbol{u^2 = const}$- $\boldsymbol{u^1}$-лінії.

Сіткою на поверхні називається сукупність двох однопараметричних сімейств кривих на цій поверхні.

Очевидно, $\boldsymbol{u^1}$ –і$\boldsymbol{u^2}$ – лінії утворюють сітку; її називають ***координатною.*** Через кожну точку поверхні $\boldsymbol{M_0(u_0^1, u_0^2)}$ проходить єдина $\boldsymbol{u^1}$-лінія $\boldsymbol{u^2 = u_0^2}$ і $\boldsymbol{u^2}$-лінія $\boldsymbol{u^1 = u_0^1}$.

Дифференціал радіус-вектора кривої, що задана рівняннями (16.2) або (16.3), має вигляд:

$$\boldsymbol{d\bar r = \bar r_\alpha(u^1, u^2)du^\alpha,\ du^\alpha = u'^\alpha(t)dt,\ \alpha = 1, 2} \tag{16.4}$$

(Тут і надалі застосовується правило підсумовування Ейнштейна: $\boldsymbol{\bar r_\alpha du^\alpha = \sum_{\alpha=1,2} \bar r_\alpha du^\alpha}$).

Оскільки ми розглядаємо тільки свідомо звичайні точки на кривій, то $\boldsymbol{d\bar r = \bar r'(t)dt \neq 0}$ і, отже, $\boldsymbol{du^1}$, $\boldsymbol{du^2}$ не дорівнюють нулю одночасно. Із (16.4) бачимо, що вектор $\boldsymbol{d\bar r}$, спрямований увздовж дотичної до кривої (16.2), компланарний з векторами $\boldsymbol{\bar r_1, \bar r_2}$ в цій точці. Відповідно до цього рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$ в криволінійних координатах мають вигляд:

$$\boldsymbol{\left(\bar R - \bar r(u^1, u^2)\right)[\bar r_1 \times \bar r_2] = 0,}$$

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2}) + \boldsymbol{\lambda}[\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} \times \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}],$$

де, $\bar{\boldsymbol{R}}$ – радіус-вектор довільної точки дотичної площини або нормалі відповідно.

Зауважимо, що вектор (16.4), який характеризує напрямок дотичної до кривої на поверхні в даній точці, можна представити у вигляді:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha} \boldsymbol{du^{\alpha}} = \boldsymbol{du^1}(\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + \bar{\boldsymbol{r}}_2 \frac{\boldsymbol{du^2}}{\boldsymbol{du^1}}),$$

звідки випливає, що напрямок дотичної до кривої в точці **M** на поверхні залежить тільки від значення в цій точці відношення диференціалів криволінійних координат уздовж кривої $\frac{\boldsymbol{du^2}}{\boldsymbol{du^1}}$.

Вправи

1. Які поверхні задаються даними рівняннями і чи регулярна у них сітка координатних ліній?

1)$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{a\cos u \cos v}, \boldsymbol{a\cos u \sin v}, \ \boldsymbol{a \sin u}\}$.

2)$\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cos \boldsymbol{u})\cos \boldsymbol{v}, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cos \boldsymbol{u})\sin \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\sin \boldsymbol{u}\}$.

3)$\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{\frac{\sqrt{\boldsymbol{u^2} + \boldsymbol{c^2}}}{\boldsymbol{c}}\cos \boldsymbol{v}, \frac{\sqrt{\boldsymbol{u^2} + \boldsymbol{c^2}}}{\boldsymbol{c}}\sin \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$.

2. Скласти параметричне рівняння еліпсоїда, гіперболоїда і еліптичного параболоїда.
3. Скласти рівняння однополосного гіперболоїда, приймаючи в якості координатних ліній їх прямолінійні утворюючі.
4. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ навколо осі OZ.
5. Скласти рівняння циліндра з направляючою $\bar{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u})$ і утворюючими , паралельними вектору $\bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{const}$.
6. Скласти рівняння конуса з вершиною у початку радіус-векторів і напрямляючею $\bar{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u})$.
7. Записати рівняння поверхні, утвореної дотичними до лінії $\boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x^2} = \boldsymbol{z}$.

8. Скласти рівняння поверхні, утвореної бінормалями лінії $\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{e^t}, \boldsymbol{e^{-t}}, \boldsymbol{t\sqrt{2}}\}$

9. Скласти рівняння поверхні, утвореної головними нормалями гвинтової лінії.

10. Скласти рівняння нормалі до псевдосфери

$$\boldsymbol{x = a\sin u\cos v\ , y = a\sin u\sin v\, , z = a\ln tg\frac{u}{2} + a\cos u}$$

у довільній точці, і знайти орт нормалі.

11. Визначити орт нормалі прямого гелікоїда

$\boldsymbol{x = u\cos v\ , y = u\sin v\ , z = hv.}$

12. Скласти рівняння дотичної площини поверхні

$\boldsymbol{xy^2 + z^2 = 8}$ в точці **(1 ; 2; 2).** Визначити орт нормалі в цій точці.

13. Довести, що поверхні

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x,}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = \beta y,}$$
$$\boldsymbol{x^2 + + y^2 + z^2 = \gamma z}$$

попарно ортогональні.

14. Довести, що нормаль поверхні обертання перетинає вісь обертання.

15. Довести, що всі дотичні площини поверхні

$\boldsymbol{z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$ проходять через початок координат.

16. Записати рівняння дотичної площини тора

$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\{(3 + 2\cos u)\cos v\, , (3 + 2\cos u)\sin v\, , 2\sin u\}}$,

паралельної до площини $\boldsymbol{x + y + \sqrt{2}z + 5 = 0}$.

17. Знайти дотичні площини поверхні

$\boldsymbol{z = x^4 - 2xy^3,}$ що перпендикулярні до вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\{-2, 6,\ 1\}}$**.** Визначити точку дотику.

18. Скласти рівняння нормалі поверхні

$\boldsymbol{z = x^4 - 2xy^3}$ в точці **М (0; -1; 0).**

§ 17. Перша основна квадратична форма поверхні

Будемо досліджувати поверхню поблизу довільної точки $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$, обмежуючись точністю І-го порядку. Зсунемось з точки $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$ за деякою кривою на поверхні $\boldsymbol{u^i = u^i(t)}$, $\boldsymbol{i = 1, 2}$, в нескінченно близьку точку $\boldsymbol{M'}$. Цьому нескінченно малому зміщенню по поверхні відповідають диференціали криволінійних координат $\boldsymbol{du^i = u^i(t)dt}$, $\boldsymbol{i = 1, 2}$, і диференціали радіус-вектора $\boldsymbol{\bar{r}}$ уздовж нашої кривої:

$$\boldsymbol{d\bar{r} = \bar{r}_\alpha du^\alpha, \alpha = 1, 2}. \tag{17.1}$$

Як було показано в § 7 глави 2, для диференціала дуги $\boldsymbol{ds}$ кривої, що відповідає тому ж зміщенню $\boldsymbol{\overset{\frown}{MM'}}$, має місце рівність $|\boldsymbol{ds}| = |\boldsymbol{d\bar{r}'}|$.| З огляду на (17.1) звідси:

$$\boldsymbol{ds^2 = (\bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta) du^\alpha du^\beta}, \ \boldsymbol{\alpha, \beta = 1, 2}.$$

Позначимо:

$$\boldsymbol{\bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)}. \tag{17.2}$$

Тоді попередня формула запишеться таким чином:

$$\boldsymbol{ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}, \ \boldsymbol{\alpha, \beta = 1, 2.} \tag{17.3}$$

Вираз у правій частині (17.3) називається ***першою основною квадратичною формою поверхні*** і грає велику роль в теорії поверхонь. Позначимо його $\boldsymbol{\varphi_1}$.

$\boldsymbol{\varphi_1}$ – квадратична форма щодо диференціалів $\boldsymbol{du^1}$ і $\boldsymbol{du^2}$. Коефіцієнти $\boldsymbol{\varphi_1}$ залежать ***тільки*** від вибору точки $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$ на поверхні.

$\boldsymbol{\varphi_1}$ виражає квадрат диференціала дуги ***ds*** при нескінченно малому зміщенні по поверхні. При цьому коефіцієнти $\boldsymbol{\varphi_1}$ визначаються точкою $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$, з якої виробляється зсув, а диференціали $\boldsymbol{du^1}$ і $\boldsymbol{du^2}$ відповідають даному зміщенню з точки **M**.

Відзначимо ***властивості першої квадратичної форми***:

1. Оскільки $\boldsymbol{\varphi_1}$ за визначенням виражає$\boldsymbol{ds^2}$, то це є форма додатня при всіх значеннях $\boldsymbol{du^1}$ *і* $\boldsymbol{du^2}$ (крім $\boldsymbol{du^1 = du^2 = 0}$**).** Звідси з чисто алгебраїчних міркувань випливає, що дискримінант її також додатний:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

Такі форми називаються додатно визначеними.

2. Обчислюючи дифференціал дуги ds уздовж u^1іu^2-ліній, з (17.3) знаходимо:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 \quad \text{і} \quad ds^2 = g_{22}(du^2)^2,$$

звідки випливає:

$$g_{11} > 0, \qquad g_{22} > 0.$$

Нехай u^i=$u^i(t)$, $i = 1, 2,\ T_0 \le t \le T$– відрізок кривоі на поверхні. З допомогою першої квадратичної форми поверхні легко отримати **<u>формулу довжини s</u>** відрізка кривої $\overset{\frown}{M_{T_0}M_T}$:

$$S = \overset{\frown}{M_{T_0}M_T} = \int_{T_0}^{T} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{du^\beta}{dt}}\,dt.$$

Тут $g_{\alpha\beta}$ – відомі функції від u^1, u^2, які, у своючергу, залежатьвід t.

Обчислимо ***кут між кривими на поверхні***, що виходять з точки **M**. Позначимо диференціали криволінійних координат, радіус-вектора і дуги вздовж першої і другої кривої через $du^i, d\bar{r}, ds, \delta u^i, \delta\bar{r}, \delta s$ відповідно. Тоді:

$$d\bar{r} = \bar{r}_\alpha du^\alpha,\ \ \delta\bar{r} = \bar{r}_\alpha \delta u^\alpha. \qquad (17.4)$$

Оскільки кут між кривими визначається як кут між дотичними до них в їх спільній точці, згідно з (17.4) і (17.2) маємо:

$$\cos(d\bar{r}\,,^\wedge \delta\bar{r}) = \frac{d\bar{r}\delta\bar{r}}{|d\bar{r}||\delta\bar{r}|} = \frac{g_{\alpha\beta}du^\alpha\delta u^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}\sqrt{g_{\sigma\mu}\delta u^\sigma \delta u^\mu}},$$

Це цілком точна формула, так як права частина залежить лише від відношень $du^1 : du^2$,δu^1:δu^2, що визначаються напрямком дотичних до кривих в точці M. Зокрема, кут φ між координатними лініями в точці $M(u^1, u^2)$ за умови, що зміщення йде в бік зростання параметрів u^1, u^2, знаходиться за формулою:

$$\cos\psi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Очевидно, якщо $g_{12} = 0$ в деякій області на поверхні, то $\cos\psi$=0 і координатна сітка в цій області ортогональна.

Нарешті, за допомогою φ_1 можна обчислювати ***площу області на поверхні.***

Нехай $\boldsymbol{D}$ – область на поверхні, обмежена кусочно-гладкою кривою. Розіб'ємо її координатними лініями на криволінійні паралелограми. Розглянемо один з таких паралелограмів, позначивши через $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2})$ його вершину з найменшими значеннями $\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2}$**,** а інші його вершини – через:

$$\boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{u^1} + \Delta\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2}),\ \boldsymbol{M_2}(\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2} + \Delta\boldsymbol{u^2}),\ \boldsymbol{M'}(\boldsymbol{u^1} + \Delta\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2} + \Delta\boldsymbol{u^2}).$$

Замінимо криволінійні зміщення $\widetilde{\boldsymbol{MM_1}}, \widetilde{\boldsymbol{MM_2}}$ по $\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2}$-лініях відповідними диференціалами радіус-вектора $\bar{\boldsymbol{r}}$ - $\bar{\boldsymbol{r}}_1\Delta\boldsymbol{u^1}\ i\ \bar{\boldsymbol{r}}_2\Delta\boldsymbol{u^2}$**.** Паралелограм, що побудований на цих векторах і лежить в дотичній площині, наближено замінює криволінійний і тим точніше, чим менше розміри останнього.

Площа $\Delta\sigma$ параллелограма, сторонами якого є вектори $\bar{\boldsymbol{r}}_1\Delta\boldsymbol{u^1}$і$\bar{\boldsymbol{r}}_2\Delta\boldsymbol{u^2}$, дорівнює:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \left|[\bar{\boldsymbol{r}}_1\Delta\boldsymbol{u^1} \times \bar{\boldsymbol{r}}_2\Delta\boldsymbol{u^2}]\right| = |[\bar{\boldsymbol{r}}_1 \times \bar{\boldsymbol{r}}_2]|\Delta\boldsymbol{u^1}\Delta\boldsymbol{u^2}$$

і може бути виражена за допомогою коефіцієнтів першої квадратичної форми, де значення коефіцієнтів $\boldsymbol{g_{ij}}$ взяті в точці $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u^1}, \boldsymbol{u^2})$.

Границя, до якої збігається сума площ:

$$\sum_{\boldsymbol{D}} \Delta\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\boldsymbol{D}} \sqrt{\boldsymbol{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\Delta\boldsymbol{u^1}\Delta\boldsymbol{u^2}$$

при нескінченному подрібненні розбиття, називається ***площею області D на поверхні***. З теорії кратних інтегралів випливає, що в силу безперервності функції $\sqrt{\boldsymbol{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$ вказана границя існує, не залежить від способу розбиття і дорівнює подвійному інтегралу:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int\int_{\boldsymbol{D}} \sqrt{\boldsymbol{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\, \boldsymbol{du^1du^2}.$$

Можна показати, що отриманий вираз не залежить від вибору криволінійних координат на поверхні.

Вправи

1. Обчислити першу квадратичну форму поверхні, утвореної обертанням кривої $\boldsymbol{x = f(u), z = g(u)}$ навколо осі OZ.
2. Обчислити першу квадратичну форму поверхонь обертання:
   1) $\boldsymbol{f(u) = R\cos u, g(u) = R\sin u}$ (сфера);
   2) $\boldsymbol{f(u) = a\cos u, g(u) = c\sin u}$ (еліпсоїд обертання);
   3) $\boldsymbol{f(u) = R + r\cos u, g(u) = \sin u}$ (тор) ;
   4) $\boldsymbol{f(u) = a\sin u,\ g(u) = a\,(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u)}$ (псевдосфера);
   5) $\boldsymbol{f(u) = achu,\ g(u) = cshu}$ (однополосний гіперболоїд обертання);
   6)$\boldsymbol{f(u) = ashu,\ g(u) = cchu}$ (двополосний гіперболоїд обертання).
3. Довести, що меридіани і паралелі поверхні обертання утворюють на ній ортогональну сітку.
4. Знайти кут між координатними лініями $\boldsymbol{x = x_0, y = y_0}$ на поверхні $\boldsymbol{z = axy}$.
5. На гелікоїді $\boldsymbol{\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v, hv\}}$ знайти довжину гвинтової лінії $\boldsymbol{u = a}$ між двома точками **P_1 (u_1,v_1) і P_2(u_2,v_2)**.
6. На поверхні з лінійним елементом $\boldsymbol{ds^2 = du^2 + dv^2}$ знайти кут між лініями $\boldsymbol{2u = v}$ і $\boldsymbol{2u = -v}$.
7. На косому гелікоїді $\boldsymbol{\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v, v + u\}}$ знайти кут між лініями $\boldsymbol{u + v = 0}$ і $\boldsymbol{u = tgv}$ в їх спільній точці.

9. На катеноїді

$$\boldsymbol{x = chu\cos v, y = chu\sin v, z = u}$$

знайти кут між лініями $\boldsymbol{u + v = 0}$ і $\boldsymbol{u - v = 0}$ в їх спільній точці.

10. Записати диференційне рівняння ортогональних траєкторій сімействаліній $\boldsymbol{\varphi(u, v) = const}$ на поверхні з першою квадратичною формою:

$$\boldsymbol{ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.}$$

11. Обчислити площу чотирикутника , який лежить на гелікоїді:

$$\boldsymbol{\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v, hv\}}$$

і обмеженого кривими $\boldsymbol{u = 0, u = \frac{h}{a},\ v = 0, v = 1.}$

12. Обчислити площу поверхні тора, заданого параметризацією:

$x = (R \ + r\cos u)\cos v\,, y \ = (R + r\cos u)\sin v\,, z =$
$r\sin u,\ 0 \le u, v \le 2\pi.$

§ 18. Друга квадратична форма поверхні

Продовжуємо вивчення поверхні поблизу її довільної точки M. Змістимося з точки M в нескінченно близьку до неї точку M' по деякій кривій, віднесеної до натурального параметру, з рівнянням $u^i = u^i(s), i = 1, 2,$ або:

$$\bar{r} = \bar{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right).$$

(18.1)

Нехай $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$. Тоді відповідний приріст радіус-вектора $\bar{r}$ дорівнює:

$$\overset{\frown}{MM'} = \Delta\bar{r} = \dot{\bar{r}}\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\bar{r}}(\Delta s)^2 + \cdots \qquad (18.2)$$

Будемо враховувати нескінченно малі не тільки 1-го, а й 2-го порядку малості. Тепер зміщення $\overset{\frown}{MM'}$, на відміну від попереднього параграфа, не розташоване в дотичній площині.

Оцінимо ухилення від дотичної площини при зміщенні з точки дотику M в нескінченно близьку точкуM' уздовж якої-небудь кривої на поверхні.

Нехай P – основа перпендикуляра, проведеного з M'на дотичну площину, $\bar{m}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці M. Очевидно, що$\overline{PM'} \parallel \bar{m}$, або $\overline{PM'} = l\bar{m},$ де$|l|$ і є ухилення PM'. Будемо розуміти під ухиленням число l.
Оскільки $\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l\bar{m},$ то (18.2) постане у вигляді:

$$\overline{MP} + l\bar{m} = \dot{\bar{r}}\Delta s + \frac{1}{2}\dot{\bar{r}}(\Delta s)^2 + \cdots$$

Помножуючи скалярно обидві частиницієї рівності на $\bar{m}$ і враховуючи те, що $\dot{\bar{r}}$ лежить в дотичній площині, маємо:

$$l = \frac{1}{2}\ddot{\bar{r}}\bar{m}(\Delta s)^2 + \cdots \qquad (18.3)$$

Так як:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}_\alpha \dot{u}^\alpha \quad \text{і} \quad \ddot{\bar{r}} = \bar{r}_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \bar{r}_\alpha \ddot{u}^\alpha,$$

де $\bar{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$, **то**

$$\ddot{\bar{r}}\bar{m} = \bar{r}_{\alpha\beta}\bar{m}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta. \tag{18.4}$$

Позначимо

$$\bar{r}_{\alpha\beta}\bar{m} = b_{\alpha\beta}(u^1, u^2). \tag{18.5}$$

Значення b_{11}, b_{12}, b_{22}залежать від вибору точки (u^1, u^2) на поверхні, в якій зараз розглядається дотична площина, і від напрямку вектора $\bar{m}$, який, взагалі кажучи, можна змінити на протилежний. Умовимося вибирати вектор $\bar{m}$ в кожній точці поверхні за формулою:

$$\bar{m} = \frac{[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2]}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \tag{18.6}$$

де в знаменнику стоїть модуль вектора $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2]$ (див. § 7).

Підставляючи (18.6) в (18.5), маємо:

$$b_{\alpha\beta}(u^1, u^2) = \frac{(\bar{r}_{\alpha\beta}\bar{r}_1\bar{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \tag{18.7}$$

Далі, враховуючи (18.4), (18.5), а також те, що $\dot{u}^i \Delta s = du^i$, перепишемо (18.3) у вигляді:

$$l = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + \cdots$$

Таким чином, головна частина ухилення від дотичної площини при зміщенні по поверхні з точки дотику M в нескінченно близьку точку M', виражається половиною квадратичної форми:

$$\varphi_2 = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \tag{18.8}$$

Ця форма називається ***другою основною квадратичною формою поверхні.*** Так же, як і φ_1, вона є квадратичною формою відносно диференціалів координат, що відповідають зміщенню з точки M в M', причому її коефіцієнти – функції від координат u^1, u^2 точки M.

Коефіцієнти φ_2 можна виразити дещо інакше, ніж в (18.5) і (18.7). Так як $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ лежать в дотичній площині, то $\bar{m}\bar{r}_i = 0, i = 1, 2$. Тоді, очевидно,

$$\bar{m}_j \bar{r}_i + \bar{m}\bar{r}_{ij} = 0$$

і, отже,

$$\boldsymbol{b_{ij} = \bar{r}_{ij}\bar{m} = -\bar{m}_i\bar{r}_j = -\bar{m}_j\bar{r}_i}. \qquad (18.9)$$

Окрім того, приведемо і ще один запис $\boldsymbol{\varphi_2}$ в коротшій формі. Оскільки:

$$\boldsymbol{d\bar{r} = \bar{r}_\alpha du^\alpha} \text{і} \boldsymbol{d\bar{m} = \bar{m}_\beta du^\beta},$$

то:

$$\boldsymbol{d\bar{r}\cdot d\bar{m} = \bar{r}_\alpha \bar{m}_\beta du^\alpha du^\beta}.$$

Враховуючи (18.9), звідси маємо:

$$\boldsymbol{\varphi_2 = -d\bar{r}\cdot d\bar{m}} \qquad (18.10)$$

Диференціали $\boldsymbol{du^i, d\bar{r}, d\bar{m}}$в (18.8) і (18.10) відповідають одному й тому ж нескінченно малому зміщенню з даної точки поверхні.

Вправи

1. Записати другу квадратичну форму поверхонь :

   1) $\boldsymbol{\bar{r} = \{r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v\}}$;
   2) $\boldsymbol{\bar{r} = \{(R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin v\}}$;
   3) $\boldsymbol{\bar{r} = \{v\cos u, v\sin u, ku\}}$;
   4) $\boldsymbol{\bar{r} = \{a\,ch\,u\cos v, a\,ch\,u\sin v, shu\}}$
   5) $\boldsymbol{\bar{r} = \{a\,sh\,u\cos v, a\,sh\,u\sin v, chu\}}$ **.**

2. Довести, що при кожній параметризації площини її друга квадратична форма тотожно дорівнює нулю.

3. Довести, що при будь-якій параметризації сфери її перша квадратична форма пропорційна другій.

§ 19. Основна формула для кривини кривої на поверхні. Теорема Меньє

Скалярний добуток $\boldsymbol{\ddot{\bar{r}}\bar{m}}$ можна записати дещо інакше, ніж в § 8. Згідно з І формулою Френе $\boldsymbol{\ddot{\bar{r}} = k\bar{n}}$, де $\boldsymbol{k}$ – кривина, $\boldsymbol{\bar{n}}$ – одиничний вектор головної нормалі кривої. Застосовуючи цю формулу до кривої зміщення $\boldsymbol{\overset{\frown}{MM'}}$ в точці $\boldsymbol{M}$, маємо:

$$\boldsymbol{\ddot{\bar{r}}\bar{m} = k\bar{n}\bar{m}}$$

або:

$$\boldsymbol{\ddot{\bar{r}}\bar{m} = k\cos\theta}, \qquad (19.1)$$

де $\boldsymbol{\theta}$ — кут між одиничними векторами $\overline{\boldsymbol{n}}$ і $\overline{\boldsymbol{m}}$.

Права частина (19.1) є проекцією вектора кривини кривої $\boldsymbol{k\overline{n}}$ в точці $\boldsymbol{M}$ на нормаль до поверхні в цій точці і називається ***нормальною кривиною $\boldsymbol{k_n}$ кривої*** в точці $\boldsymbol{M}$.

Порівнюючи (19.1) з (18.4) і (18.5), отримуємо:

$$\boldsymbol{k_n = b_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = \frac{b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{g_{\gamma\delta}du^\gamma du^\delta}} \qquad (19.2)$$

Це і є ***основна формула,*** причому оскільки коефіцієнти $\boldsymbol{g_{\gamma\delta}}$і$\boldsymbol{b_{\alpha\beta}}$ в заданій точці $\boldsymbol{M}$ мають суцільно певне значення, то нормальну кривину в точці $\boldsymbol{M}$ можна розглядувати як функцію від напрямку в дотичній площині в точці $\boldsymbol{M}$ і називати ***нормальною кривиною поверхні в даному напрямку.***Очевидно, що всі криві на поверхні з однією і тією ж дотичною в даній точці мають в цій точці однакову нормальну кривину.

Фіксуємо точку $\boldsymbol{M}$ і дотичну $\boldsymbol{MT}$ в ній. Серед всіх кривих на поверхні з цією дотичною в точці $\boldsymbol{M}$ є одна, що лежить в ***нормальній площині до поверхні***, тобто площині, що проходить через нормаль до поверхні в точці $\boldsymbol{M}$. Ця крива називається ***нормальним перерізом поверхні в точці*** $\boldsymbol{M}$. Оскільки нормальний переріз$\Gamma_{\boldsymbol{0}}$ – плоска крива, то її стична площина співпадає з її площиною $\boldsymbol{TMN}$ і головною нормаллю служить перпендикуляр до $\boldsymbol{MT}$ в площині $\boldsymbol{TMN}$, тобто нормаль $\boldsymbol{MN}$ до поверхні. Таким чином, нормальна кривина $\Gamma_{\boldsymbol{0}}$ співпадає з кривизною цієї кривої, яку позначимо $\boldsymbol{k}$. З іншого боку, нормальна кривина довільної кривої $\boldsymbol{\Gamma}$ на поверхні з тією ж дотичною $\boldsymbol{MT}$ дорівнює $\boldsymbol{k = k cos\theta}$. Отже,

$$\boldsymbol{k_0 = k|cos\theta|}.$$

Ця рівність і становить основний зміст ***теореми Меньє:*** модуль нормальної кривини кривої на поверхні в точці $\boldsymbol{M}$ співпадає з кривиною нормального перерізу, що проходить через точку $\boldsymbol{M}$ в напрямку кривої.

§ 20. Головні напрями в точці поверхні

Перейдемо до дослідження зміни нормальної кривини при повороті дотичної $\boldsymbol{MT}$ в дотичній площині в точці $\boldsymbol{M}$ поверхні. З попереднього параграфа маємо:

$$\boldsymbol{k_n = \frac{b_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}}{g_{\gamma\delta}du^{\gamma}du^{\delta}}}.$$

Означення. Ті напрями в точці поверхні, яким відповідають екстремальні значення нормальної кривини, називаються ***головними напрямами*** в даній точці. Самі екстремальні нормальні кривини називаються ***головними кривинами*** поверхні в даній точці.

Перепишемо останню рівність у вигляді:

$$\boldsymbol{(b_{11} - k_n g_{11})(du^1)^2 + 2(b_{12} - k_n g_{12})du^1du^2 +}$$
$$\boldsymbol{+(b_{22} + k_n g_{22})(du^1)^2 = 0}$$
(20.1)

Як звісно, екстремумам функції $\boldsymbol{k_n}$ відповідають ті напрямки $\boldsymbol{du^2{:}du^1}$, в яких похідна від $\boldsymbol{k_n}$ дорівнює нулю. Враховуючи це, будемо диференціювати (20.1) по $\boldsymbol{\xi = du^1}$і$\boldsymbol{\eta = du^2}$. В результаті маємо:

$$\boldsymbol{(b_{11} - k_n g_{11})du^1 + (b_{12} - k_n g_{12})du^2 = 0},$$
$$\boldsymbol{(b_{12} - k_n g_{12})du^1 + +(b_{22} + k_n g_{22})du^2 = 0}. \qquad (20.2)$$

Кожне з цих рівнянь разом з (20.1) визначає відношення $\boldsymbol{du^2{:}du^1}$ в точці екстремума і значення функції $\boldsymbol{k_n}$ в цій точці.

Виключаючи $\boldsymbol{k_n}$ з (20.2), знаходимо:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} b_{11}du^1 + b_{12}du^2 & g_{11}du^1 + g_{12}du^2 \\ b_{12}du^1 + b_{22}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \end{vmatrix} = 0} \qquad (20.3)$$

чи теж саме:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0} \qquad (20.4)$$

Розв'язки $\boldsymbol{du^2{:}du^1}$ рівняння (20.3) або (20.4) визначають головні напрями поверхні в даній точці. Виконання (20.3) або (20.4) необхідно і достатньо, щоб напрям $du^2{:}du^1$ на поверхні був головним.

Дослідимо (20.4).

1) *Виключний випадок*: коефіцієнти рівняння (20.4) при $(du^1)^2$, du^1du^2, $(du^2)^2$, одночасно дорівнюють нулю. Тоді **(**20.3**)** і **(**20.4**)** задовольняються при будь-яких du^1, du^2 і, отже, будь-який напрям в даній точці поверхні являетсяє головним. Такі точки називаються ***омбілічними*** або ***сферичними точками*** і характеризуються умовами:

$$\frac{b_{11}}{g_{11}}=\frac{b_{12}}{g_{12}}=\frac{b_{22}}{g_{22}} \qquad (20.4)$$

2) *Основний випадок:* не всі коефіцієнти рівняння (20.4) при $(du^1)^2$, du^1du^2, $(du^2)^2$ дорівнюють нулю. Тоді справедлива теорема:

Теорема (про головні напрями). В кожній точці поверхні, відмінної від сферичної, завжди існують два різні взаємно ортогональні головні напрями.

Доведення: Оберемо в якості координатних ліній ортогональну сітку. Тоді $g_{12}=0$ і рівняння (20.4) постане у вигляді :

$$g_{11}b_{12}(du^1)^2+(g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11})du^1du^2-b_{12}g_{22}(du^2)^2=0 \qquad (20.5)$$

А) Нехай, наприклад, $g_{22}b_{12}\neq 0$. В цьому випадку з (20.5) випливає $du^1\neq 0$, внаслідок чого (20.5) можна подати так:

$$-\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 b_{12}g_{22}+\frac{du^2}{du^1}(g_{11}b_{22}-b_{11}g_{22})+g_{11}b_{12}=0$$

(20.6)

Обчислимо дискримінант цього рівняння:

$$D=(g_{11}b_{22}-b_{11}g_{22})^2+4b_{12}^2g_{22}g_{11}.$$

Так як $g_{22}>0$і$g_{11}>0$, то рівність $D=0$ можлива лише при:

$g_{11}b_{22}-b_{11}g_{22}=0$і$g_{11}g_{22}b_{12}^2=0$,

тобто при:

$$\frac{b_{11}}{g_{11}}=\frac{b_{12}}{g_{12}}=\frac{b_{22}}{g_{22}},$$

що виконується тільки у сферичних точках. Ми розглядаємо основний випадок, тому $D>0$, і рівняння (20.5) має два різні дійсні розв'язки $du^2 : du^1$ і $\delta u^2 : \delta u^1$. Доведемо ортогональність цих напрямів. За формулами Вієта з (20.6) маємо:

$$\frac{du^2}{du^1} \cdot \frac{\delta u^2}{\delta u^1} = -\frac{g_{11}}{g_{22}}. \tag{20.7}$$

Відношеннями $du^2 : du^1$ і $\delta u^2 : \delta u^1$ визначаються напрями $d\bar{r} = \bar{r}_\alpha du^\alpha$ і $\delta\bar{r} = \bar{r}_\beta \delta u^\beta$.

Тоді $d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta du^\alpha \delta u^\beta = g_{\alpha\beta} du^\alpha \delta u^\beta$.

З огляду на $g_{12} = 0$ і (20.7) виявляється $d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = 0$, тобто $d\bar{r} \perp \delta\bar{r}$.

У випадку, коли в (20.4) відмінний від нуля коефіцієнт при $(du^1)^2$, всі викладки проводяться аналогічно.

Б) Якщо в (20.4) відмінний від лише коефіцієнт при $du^1 du^2$, рівняння набуває вигляд $du^1 du^2 = 0$, звідки слідує, що один головний напрям характеризується рівнянням $du^1 = 0$, а інши $- du^2 = 0$. Очевидно, тоді головні напрями співпадаютьз напрямками координатних ліній, а отже, різні і взаємно ортогональні. Теорема доведена.

§ 21. Головні кривини в точці поверхні. Гаусова и середня кривини

Переходимо до обчислення головних кривин в точці поверхні. Для того, щоб лінійна однорідна відносно du^1, du^2 система рівнянь (20.2) мала нетривіальні розв'язки, її визначник повинний дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_n g_{11} & b_{12} - k_n g_{12} \\ b_{12} - k_n g_{12} & b_{22} - k_n g_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{21.1}$$

Отримали квадратне рівняння, розв'язками якого є головні кривини k_1, k_2. Перепишемо (21.1) в еквівалентній формі:

$$k^2 - 2HR + K = 0, \tag{21.2}$$

де позначено:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}, \tag{21.3}$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Рівняння (21.1) або (21.2) обов'язково має два розв'язки, причому дійсних з огляду на дійсність головних напрямів. У випадку сферичної точки, де будь-який напрям – головний, $k_1 = k_2$. Зокрема, при $k_1 = k_2 = 0$ точка називається ***точкою сплощення.***

З (21.2) за формулами Віета:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = H, \qquad k_1 \cdot k_2 = K.$$

Напівсума головних кривин $\frac{k_1+k_2}{2}$ в даній точці поверхні називається ***середньою кривиною*** H, а їх добуток $k_1 \cdot k_2$ – ***гаусовою (або повною) кривиною*** K поверхні в цій точці.

Середня та гаусова кривини можуть бути обчислені за допомогою коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм за формулами (21.3). Вони відіграють велику роль в теорії поверхонь, так як характеризують форму поверхні в околі кожної її точки. Наприклад, поверхні, для яких у всіх точках $H = 0$, називаються мінімальними. Зокрема, мильна плівка, натягнута на вигнутий в просторі дротяний контур, приймає форму мінімальної поверхні (поверхні з мінімальною площею).

Вправи

1. Знайти середню і гаусову кривизни параболоїда $z = axy$

в точці $x = y = 0.$

2. Знайти головні кривизни поверхні

$$z = a(x^2 + y^2) \text{ в точці } (0; 0; 0).$$

3. Підрахувати середню кривизну катеноїда

$$z = a\,ch\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a}}\,.$$

4. З'ясувати типи точок : 1) еліпсоїда; 2) гіперболоїдів; 3) параболоїдів; 4) циліндрів; 5) конусів.

5. З'ясувати типи точок тора.

6. Довести, що для того, щоб точка на поверхні була сферичною, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $\boldsymbol{K \neq 0, K = H^2}$.

§ 22. Лінії кривини на поверхні

Означення. Крива на поверхні називається ***лінією кривини,*** якщо в кожній її точці дотична має головний напрям.

Згідно з означенням, крива $\boldsymbol{u^i = u^i(t), i = 1, 2}$ на поверхні є лінією кривини тоді і тільки тоді, коли диференціали $\boldsymbol{du^1}$ і $\boldsymbol{du^2}$ уздовж неї в будь-якій точці задовольняють рівнянню (20.3) або:

$$(\boldsymbol{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}})(\boldsymbol{du^1})^2 + (\boldsymbol{g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}})\boldsymbol{du^1du^2} + \qquad (22.1)$$

де $\boldsymbol{g_{ij}}$і$\boldsymbol{b_{ij}}$ обчислені в тій самій точці.

Виключимо з розгляду сферичні точки. Припустимо, що у рівнянні (22.1) $\boldsymbol{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11} \neq 0}$. Тоді $\boldsymbol{du^2 \neq 0}$, і (22.1) приймає вигляд:

$$(\boldsymbol{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}})\left(\frac{\boldsymbol{du^1}}{\boldsymbol{du^2}}\right)^2 + (\boldsymbol{g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}})\frac{\boldsymbol{du^1}}{\boldsymbol{du^2}} +$$
$$+(\boldsymbol{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}) = \boldsymbol{0}$$

Його розв'язки

$$\frac{\boldsymbol{du^1}}{\boldsymbol{du^2}} = \boldsymbol{f_1(u^1, u^2)}, \quad \frac{\boldsymbol{du^1}}{\boldsymbol{du^2}} = \boldsymbol{f_2(u^1, u^2)} \qquad (22.2)$$

відповідають двом взаємно ортогональним головним напрямам в кожній точці.

В теорії дифференціальних рівнянь доведено, що через кожну точку $(\boldsymbol{x_0, y_0})$ площини $\boldsymbol{xy}$ проходить єдина крива, уздовж якої задовольняється рівняння $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$. Щодо (22.2) це означає, що через кожну точку $\boldsymbol{M(u^1, u^2)}$ поверхні проходить єдина лінія кривини, уздовж якої задовольняється перше з рівнянь (22.2), і єдина лінія кривини, уздовж якої задовольняється друге з цих рівнянь.

Отримуємо сітку ліній кривини, ортогональну з огляду на ортогональність головних напрямів.

У випадку, коли у рівнянні (22.1) відмінний від нуля лише коефіцієнт при du^1du^2, воно приймає вигляд $du^1du^2 = 0$. Отже, уздовж ліній кривини або $du^1 = 0$, або $du^2 = 0$. Таким чином, знову отримуємо сітку ліній кривини з тією особливістю, що вона співпадає з координатною сіткою.

Це співпадіння зв'язано по суті із спеціальним вибором криволінійних координат на поверхні, оскільки сітка ліній кривини для даної поверхні визначається однозначно.

Теорема. Для того, щоб дана координатна сітка на поверхні співпадала з сіткою ліній кривини, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці поверхні виконувалась умова $g_{12} = b_{12} = 0$.
Доведення теореми студенти зможуть легко відновити самостійно.

Вправи

1. Довести, що якщо за координатні лінії на поверхні, що не має сферичних точок і точок сплющення, взяти лінії кривизни, то коефіцієнти g_{12} і b_{12} першої і відповідно другої квадратичних форм поверхні рівні нулю; і навпаки , якщо на поверхні $g_{12} = 0$, і $b_{12} = 0$, то координатна сітка на поверхні складається з ліній кривизни.

2. Знайти лінії кривини гелікоїда, заданого рівнянням
$$\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v,\ av\}.$$

3. Знайти лінії кривизни на довільній поверхні обертання.

4. Довести, що лінія на поверхні є лінією кривини тоді й лише тоді, коли виповнюється одна з умов:
   a) лінія в кожній своїй точці іде за головним напрямом;
   b) нормальна кривина в кожній її точці дорівнює одній з головних кривин;
   c) нормалі до поверхні увздовж лінії утворюють розгортаючюся поверхню.

5. Знайдіть лінії кривини поверхонь:
   a) довільної циліндричної поверхні;
   b) довільної конічної поверхні;
   c) довільної поверхні обертання;
   d) поверхні $\bar{r} = \{u^2 + v^2,\ u^2 - v^2,\ v\}$.

§ 23. Формула Ейлера

Виведемо залежність між головними кривинами і кривиною довільного нормального перерізу в точці поверхні. Для цього виберемо в якості координатних ліній поверхні сітку ліній кривини. Тоді $g_{12} = b_{12} = 0$, і кривина довільного нормального перерізу в кожній точці обчислюється за формулою:

$$k_n = \frac{b_{11}(du^1)^2 + b_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2}. \tag{23.1}$$

Нехай в даній точці перший (другий) головний напрям, відповідний головній кривині $k_1(k_2)$, єдотичним до $u^1 -$ (u^2-) лінії, уздовж якої маємо $\delta u^1, \delta u^2 = 0$ ($\Delta u^1 = 0, \Delta u^2$). Диференціали криволінійних координат уздовж довільного нормального перерізу в тій же точці з кривиною k_n позначимо du^1, du^2. Легко бачити, що тоді: $b_{11} = k_1 g_{11}$ і $b_{22} = k_2 g_{22}$, в результаті чого (23.1) набуває вигляду:

$$k_n = k_1 \frac{g_{11}(du^1)^2}{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2} + k_2 \frac{g_{22}(du^2)^2}{g_{11}((du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2}.$$

Це і є ***формула Ейлера,*** що виражає кривину довільного нормального перерізу через головні кривини k_1, k_2 і кут φ, що утворений дотичною цього нормального перерізу з першим головним напрямом в даній точці поверхні.

§ 24. Три типи точок на поверхні

Покажемо, що форма поверхні в околі деякої її точки цілком визначається значенням гаусової кривини $\boldsymbol{K}$ в цій точці.

1. Нехай в точці$\boldsymbol{M}$поверхні$\boldsymbol{K} > 0$. Згідно з формулами (21.3), знак гаусової кривини співпадаєзі знаком визначникадругої квадратичної форми, так як визначник первщої квадратичної формидодатний. Отже, при $\boldsymbol{K} > 0$маємо $\boldsymbol{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} > 0$.Точки, де виконується ця умова, називаються ***еліптичними.*** За означенням $\boldsymbol{K = k_1k_2}$**,** отже, в точці еліптичного типу$\boldsymbol{k_1}$ і $\boldsymbol{k_2}$ одного знаку. Тому в даній точці обидва головніперерізи, тобто нормальніперерізи, дотичнідо якихспрямовані по головним напрямам, загиньаются в одинбіквідносноoиничного вектора нормалі поверхні$\boldsymbol{\overline{m}}$. З формулиЕйлера випливає, що проміжні нормальніперерізимають кривину того же знаку, що й$\boldsymbol{k_1}$ і $\boldsymbol{k_2}$, тобто загинаються в той же бік, щойголовні перерізи. Легко уявитисобі форму поверхні в околі точки M еліптичного типу.
2. Нехай тепер $\boldsymbol{K} < 0$ в точці$\boldsymbol{M}$, тоді$\boldsymbol{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} < 0$. Такі точки назваються ***гіперболічними.*** В гіперболічній точці головні кривини$\boldsymbol{k_1}$ і $\boldsymbol{k_2}$маютьрізніе знаки, тому один головнийпереріз загинаєьтся в бік вектора нормалі$\boldsymbol{\overline{m}}$ поверхні, а інший–в протилежний.
3. *3.* У випадку $\boldsymbol{K = 0}$ в точці $\boldsymbol{M}$ маємо $\boldsymbol{b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0}$**.** Ця точка ***параболічного типу.*** В ній за необхідністю $\boldsymbol{k_1 = 0}$ або $\boldsymbol{k_2 = 0}$ ($\boldsymbol{k_1}$ і $\boldsymbol{k_2}$не можуть дорівнювати нулю одночасно, так як сферічні точки з розгляду виключаються), отже, для одного з головних перерізів точка $\boldsymbol{M}$ є точкою розпрямлення.

§ 25. Асимптотичні напрями і асимптотичні лінії поверхні

Точки розпрямлення, як і раніше, з розгляду виключаються.

Означення 1. ***Асимптотичним напрямом*** в даній точці поверхні називается напрям, що є дотичним до нормального перерізу з кривиною нуль в цій точці.

Згідно з означенням і формулою (19.2) для того, щоб напрям $\boldsymbol{du^1}:\boldsymbol{du^2}$ був асимптотичним в даній точці, необхідно і достатньо, щоб в цій точці виконувалася умова:

$$\boldsymbol{\varphi_2 = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0}. \qquad (25.1)$$

Означення 2. Крива на поверхні, дотична до якої в кожній точці спрямована за асимптотичним напрямом в цій точці, називається ***асимптотичною лінією***.

Очевидно, що крива на поверхні є асимптотичною лінією тоді і тільки тоді, коли вздовж неї в кожній точці виконується рівняння (25.1), тобто (25.1) – це диференціальне рівняння асимптотичних ліній.

Д осліджуючи (25.1), приходимо до висновку, що в точці еліптичного типу немає дійсних асимптотичних напрямів; в гіперболічній точці поверхні існує два, а в параболічній – один асимптотичний напрям. В такому випадку на поверхні, що складається з гіперболічних точок, існують два, а на поверхнях, всі точки яких параболічні, – одне сімейство асимптотичних ліній.

Зауважимо, що в параболічній точці, де одна з головних кривин дорівнює нулю, відповідний головний напрям буде також асимптотичним (єдиний в цій точці). Отже, на поверхні, що складається з параболічних точок, одне з сімейств ліній кривини співпадає з єдиним на даній поверхні сімейством асимптотичних ліній.

Наведемо без доведення дві важливі теореми.

Теорема 1. (характеристична властивість асимптотичних ліній). Для того, щоб лінія на поверхні була асимптотичною, необхідно і достатньо, щоб вона була прямою, або мала в кожній точці своєю стичною площиною дотичну площину до поверхні.

Оскільки асимптотична сітка на даній поверхні (якщо вона існує) визначається однозначно, можна підібрати координатну сітку так, щоб вона співпала з асимптотичною.

Теорема 2. Для того, щоб в околі точки гіперболічного типу координатна сітка співпала з асимптотичною, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цього околу виконувалася умова: $\boldsymbol{b_{11} = b_{22} = 0}$.

Вправи

1. Знайти асимптотичні лінії поверхні : $\boldsymbol{zx^2 = ay^2, a = const}$ **.**

2. Знайти асимптотичні лінії поверхні: $\boldsymbol{z = \frac{x^2 + y^2}{xy}}$.

3. Довести, що:

a) координатні лінії $\boldsymbol{u = const}$ є асимптотичними лініями поверхні тоді і лише тоді, коли коефіцієнт $\boldsymbol{b_{22}(u, v)}$ другої квадратичної форми дорівнює нулю ($\boldsymbol{b_{22}(u, v) \equiv 0}$) ;

b) координатні лінії $\boldsymbol{v = const}$ є асимптотичними лініями поверхні тоді і лише тоді, коли коефіцієнт $\boldsymbol{b_{11}(u, v)}$ другої квадратичної форми дорівнює нулю ($\boldsymbol{b_{11}(u, v) \equiv 0}$) ;

c) для того щоб координатна сітка на поверхні складалася з асимптотичних ліній, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти $\boldsymbol{b_{11}(u, v)}$ і $\boldsymbol{b_{22}(u, v)}$ другої квадратичної форми були рівні нулю ($\boldsymbol{b_{11}(u, v) \equiv b_{22}(u, v) \equiv 0}$).

4. Довести, що лінія на поверхні є асимптотичною тоді і лише тоді, коли вона задовольняє одну з наступних умов :

а) в кожній її точці дотична має асимптотичний напрямок ;

б) в кожній точці нормальна кривизна лінії рівна нулю ;

в) лінія є прямою або в кожній її точці дотична площина співпадає з дотичною площиною до поверхні.

5. Знайти асимптотичні лінії поверхні:

$$\boldsymbol{x = u\cos v\ , y = u\sin v\, , z = \frac{6}{u}}\ .$$

6. Знайти асимптотичні лінії поверхні:

$$\boldsymbol{\bar{r} = \{u\cos v\, , u\sin v\, , 6\ln u\}}\ .$$

7. Знайти асимптотичні лінії поверхні обертання:

$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{u\,cos\,v}, \boldsymbol{u\,sin\,v}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\}$.

8. Знайти асимптотичні лінії поверхні:
$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{u\,cos\,v}, \boldsymbol{u\,sin\,v},\ \boldsymbol{a\,cos\,nv}\}$, де $\boldsymbol{a}$ і **n** – сталі.

9. Знайти асимптотичні лінії поверхні:
$\bar{\boldsymbol{r}} = \{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{cos\,v},\ (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{sin\,v},\ \boldsymbol{u}\}$.

10. Знайти асимптотичні лінії поверхні:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3u + 3v} \\ \boldsymbol{y = 3u^2 + 3v^2} \\ \boldsymbol{z = 2u^3 + 2v^3} \end{cases}$$

11. Знайти асимптотичні лінії поверхні:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{chu}} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{uv}}{\boldsymbol{chu}} \\ \boldsymbol{z = arctgv} \end{cases}$$

§ 26. Основні рівняння теорії поверхонь

1. **Дериваційні формули першої і другої групи.** Сенс формул, які нам належить отримати, полягає в тому, що вони виражають частинні похідні від основних векторів в даній точці поверхні - $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}, \bar{\boldsymbol{m}} -$ через самі ці вектори. Тому дериваційні формули для поверхні є аналогом формул Френе для кривих.

Так як вектори $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}, \bar{\boldsymbol{m}}$ лінійно незалежні, то будь-який вектор можна розкласти по цих векторах. Зокрема,

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha}\bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha} + \boldsymbol{\lambda}_{ij}\bar{\boldsymbol{m}}, \tag{26.1}$$

$$\bar{\boldsymbol{m}}_{j} = -\boldsymbol{b}_{j}^{\alpha}\bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha} + \boldsymbol{\xi}_{j}\bar{\boldsymbol{m}},\ \ \boldsymbol{i,j = 1,2}. \tag{26.2}$$

Покажемо, що коефіцієнти Γ_{ij}^{α}, $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$, $\boldsymbol{b_j^{\alpha}}$, $\boldsymbol{\xi_j}$ виражаються через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм $\boldsymbol{g_{ij}}$ і $\boldsymbol{b_{ij}}$.

Помноживши (26.2) скалярно на $\bar{\boldsymbol{m}}$ і на $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}$ по черзі, а також з огляду на лему 1 §5 глави 2, і те, що $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}} \perp \bar{\boldsymbol{m}}$, знаходимо:

$$\boldsymbol{\xi_j = 0}, \tag{26.3}$$

$$\boldsymbol{b_{ij} = b_j^{\alpha} g_{\alpha k}}. \tag{26.4}$$

Позначимо $\boldsymbol{g^{kl}}$ елементи матриці, оберненої до матриці з коефіцієнтів першої квадратичної форми $(\boldsymbol{g_{ij}})$. Тоді:

$$\boldsymbol{g_{i\beta} g^{\beta l} = \delta_i^l} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, \text{если } \boldsymbol{l = i} \\ \boldsymbol{0}, \text{если } \boldsymbol{l \neq i} \end{cases} \tag{26.5}$$

Величини $\boldsymbol{\delta_i^l}$, визначені вищевказаним способом, називаються ***символами Кронекера.***

Помножимо (26.4) на $\boldsymbol{g^{kl}}$ і просумуємо за індексом $\boldsymbol{k}$. В силу (26.5) маємо:

$$\boldsymbol{b_{j\beta} g^{\beta l} = b_j^l}. \tag{26.6}$$

Помножуючи скалярно (26.1) на $\bar{\boldsymbol{m}}$ і $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}$ по черзі з урахуванням (26.5) отримуємо:

$$\boldsymbol{\lambda_{ij} = b_{ij}}, \tag{26.7}$$

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{ij}} \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}} = \Gamma_{\boldsymbol{ij}}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{g_{\alpha k}}. \tag{26.8}$$

Позначимо:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{ij}} \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}} = \Gamma_{\boldsymbol{ij,k}}. \tag{26.9}$$

Тоді $\Gamma_{\boldsymbol{ij,k}} = \Gamma_{\boldsymbol{ij}}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{g_{\alpha k}}$, звідки помножуючи на $\boldsymbol{g^{kl}}$ і сумуючи по індексу $\boldsymbol{k}$ знаходимо

$$\Gamma_{\boldsymbol{ij}}^{\boldsymbol{l}} = \Gamma_{\boldsymbol{ij,\beta}} \boldsymbol{g^{\beta l}}. \tag{26.10}$$

Запишемо очевидні рівності

$$\frac{\boldsymbol{\partial(\bar{r}_i \bar{r}_j)}}{\boldsymbol{\partial u^k}} = \frac{\boldsymbol{\partial g_{ij}}}{\boldsymbol{\partial u^k}} = \boldsymbol{\bar{r}_{ik} \bar{r}_j + \bar{r}_i \bar{r}_{jk}};$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial(\bar{r}_j \bar{r}_k)}}{\boldsymbol{\partial u^i}} = \frac{\boldsymbol{\partial g_{ik}}}{\boldsymbol{\partial u^i}} = \boldsymbol{\bar{r}_{ji} \bar{r}_k + \bar{r}_j \bar{r}_{ki}};$$

$$\frac{\partial(\bar{r}_k\bar{r}_i)}{\partial u^j} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \bar{r}_{kj}\bar{r}_i + \bar{r}_k\bar{r}_{ij}.$$

Віднімаючи першу рівність з суми двох останніх, з урахуванням (26.9) і $\bar{r}_{ik} = \bar{r}_{ki}$, матимемо:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right). \tag{26.11}$$

З (26.10) і (26.11) випливає:

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2} g^{l\beta}\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\beta}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta}\right). \tag{26.12}$$

Величини $\Gamma_{ij,k}$, Γ_{ij}^{l} виражаються тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх похідні і називаються ***символами Крістофеля I і II роду*** відповідно.

З огляду на викладене вище, рівняння (26.1) і (26.2) можемо переписати у вигляді:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha}\bar{r}_\alpha + b_{ij}\bar{m}, \tag{26.13}$$

$$\bar{m}_j = -b_j^{\alpha}\bar{r}_\alpha, \tag{26.14}$$

де Γ_{ij}^{α} і b_j^{α} даються формулами (26.12) и (26.6).

Співвідношення (26.13) і (26.14) називаються відповідно ***першою і другою групою дериваційних формул***. Коефіцієнти в цих рівняннях виражаються тільки через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні і їх частинні похідні.

2. ***Формули Гауса і Петерсона-Кодацці.*** Перша і друга квадратичні форми поверхні не є незалежними. Зв'язок між їх коефіцієнтами може бути отримано наступним чином.

Запишемо очевидні рівності:

$$(\bar{r}_{ij})_k - (\bar{r}_{ik})_j = 0, \qquad \bar{m}_{jk} - \bar{m}_{kj} = 0,$$

де:

$$(\bar{r}_{ij})_k = \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial u^k}, \quad \bar{m}_{jk} = \frac{\partial \bar{m}_j}{\partial u^k}. \tag{26.15}$$

Використовуючи дериваційні формули, представимо (16.15) в формі:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\left(\boldsymbol{b}_j^\alpha\boldsymbol{b}_{ik}-\boldsymbol{b}_k^\alpha\boldsymbol{b}_{ij}+\frac{\partial\Gamma_{ij}^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^j}+\Gamma_{ij}^\beta\Gamma_{\beta k}^\alpha-\Gamma_{ik}^\beta\Gamma_{\beta j}^\alpha\right)$$
$$+\bar{\boldsymbol{m}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}_{ij}}{\partial\boldsymbol{u}^k}-\frac{\partial\boldsymbol{b}_{ik}}{\partial\boldsymbol{u}^j}+\Gamma_{ij}^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha k}-\Gamma_{ik}^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha j}\right)=\mathbf{0};$$

$$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}_j^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^k}-\frac{\partial\boldsymbol{b}_k^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^j}+\Gamma_{\beta k}^\alpha\boldsymbol{b}_j^\beta-\Gamma_{\beta j}^\alpha\boldsymbol{b}_k^\beta\right)+\bar{\boldsymbol{m}}\left(\boldsymbol{b}_j^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha j}-\boldsymbol{b}_k^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha j}\right)=\mathbf{0}.$$

З огляду на незалежність векторів $\bar{\boldsymbol{r}}_1, \bar{\boldsymbol{r}}_2, \bar{\boldsymbol{m}}$ звідси робимо висновок, що:

$$\boldsymbol{b}_j^\alpha\boldsymbol{b}_{ik}-\boldsymbol{b}_k^\alpha\boldsymbol{b}_{ij}=\boldsymbol{R}_{ijk}^\alpha; \tag{26.16}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j}=\boldsymbol{b}_{\alpha j}\Gamma_{ik}^\alpha-\boldsymbol{b}_{\alpha k}\Gamma_{ij}^\alpha; \tag{26.17}$$

$$\frac{\partial b_j^\alpha}{\partial u^k}-\frac{\partial b_k^\alpha}{\partial u^j}=\boldsymbol{b}_k^\beta\Gamma_{\beta j}^\alpha-\boldsymbol{b}_j^\beta\Gamma_{\beta k}^\alpha; \tag{26.18}$$

$$\boldsymbol{b}_j^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha k}-\boldsymbol{b}_k^\alpha\boldsymbol{b}_{\alpha j}=\mathbf{0},$$

де:

$$\boldsymbol{R}_{ijk}^\alpha\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\Gamma_{ik}^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^j}-\frac{\partial\Gamma_{ij}^\alpha}{\partial\boldsymbol{u}^k}+\Gamma_{ik}^\beta\Gamma_{\beta j}^\alpha-\Gamma_{ij}^\beta\Gamma_{\beta k}^\alpha,$$

причому з огляду на (26.6) рівняння (26.7) виконується тотожно, а (26.18) зводиться до (26.17). Величини $\boldsymbol{R}_{\cdot ijk}^{\alpha}$, введені тут, називаються ***символами Рімана II роду.***

Помножуючи (26.16) на $\boldsymbol{g}_{\alpha h}$ и сумуючи по $\boldsymbol{\alpha}$ отримаємо:

$$\boldsymbol{b}_{hj}\boldsymbol{b}_{ik}-\boldsymbol{b}_{hk}\boldsymbol{b}_{ij}=\boldsymbol{R}_{hijk}, \tag{26.19}$$

де:

$$\boldsymbol{R}_{hijk}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{R}_{.ijk}^{h}\boldsymbol{g}_{\alpha h}-$$

символи Рімана I роду.

Індекси $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{h}$ в (26.19) і (26.17) приймають незалежно один від одного значення 1,2 тому в (26.19) міститься $2^4=16$, а в (26.17) - $2^3=8$ рівнянь. Однак, перебираючи всілякі комбінації індексів, приходимо до висновку, що серед (26.19) істотним буде лише одне, а серед (26.17) - два рівняння, а саме:

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = R_{1212} - \textit{рівняння Гауса}$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = b_{\alpha 1}\Gamma_{12}^{\alpha} - b_{\alpha 2}\Gamma_{11}^{\alpha}$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} = b_{\alpha 1}\Gamma_{22}^{\alpha} - b_{\alpha 2}\Gamma_{21}^{\alpha} - \textit{рівняння Петерсона-Кодацці}$$

Оскільки символи Рімана виражаються тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх частинні похідні, з формули Гаусса і (21.3) слідує

Теорема Гауса. Гаусова кривина поверхні виражається тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх похідні.

2. Значення формул Гауса і Петерсона-Кодацці з'ясовує

Основна теорема теорії поверхонь. Нехай $g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$ і $b_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$- дві довільні квадратичні форми, у тому числі перша додатньо визначена. Формули Гауса і Петерсона-Кодацці є необхідними і достатніми умовами того, щоб ці форми були першою і другою квадратичними формами деякої поверхні, яку вони визначають в цьому випадку з точністю до руху.

§ 27. Геодезична кривина кривої на поверхні

Розглянемо криву на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$, задану рівняннями $u^i = u^i(s), i = 1, 2$, де s - натуральний параметр.

Нехай $\bar{t}, \bar{n}, \bar{m}$ – одиничні вектори дотичної, головної нормалі кривої і нормалі до поверхні відповідно, k – кривизна кривої в точці **M**.

Означення. Проекція вектора кривини кривої на дотичну площину до поверхні в даній точці називають ***геодезичною кривиною*** k_g.

Таким чином, вектор кривини кривої розкладається на дві складові – по нормалі і по дотичній:

$$k\bar{n} = \overline{MN} + \overline{MG},$$

де $|\overline{MN}| = k_n, |\overline{MG}| = k_g,\ \overline{MG} \perp \bar{t},\ \overline{MG} \perp \bar{m}.$

Знайдемо вираз для геодезичної кривины $\boldsymbol{k_g}$. За першою формулою Френе $\boldsymbol{k\bar{n}} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} = \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}$. Так як

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}} = \bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha} \quad \text{і} \quad \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = \bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta} + \bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha}\ddot{\boldsymbol{u}}^{\alpha},$$

враховуючи дериваційні формули, запишемо:

$$\boldsymbol{k\bar{n}} = \left(\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta} + \ddot{\boldsymbol{u}}^{\delta}\right)\bar{\boldsymbol{r}}_{\delta} + \boldsymbol{b}_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta}\bar{\boldsymbol{m}}.$$

Очевидно,

$$\overline{\boldsymbol{MG}} = \left(\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta} + \ddot{\boldsymbol{u}}^{\delta}\right)\bar{\boldsymbol{r}}_{\delta}. \qquad (27.1)$$

Оскільки $\bar{\boldsymbol{t}} \perp \overline{\boldsymbol{MG}}$, то

$$|[\bar{\boldsymbol{t}} \times \overline{\boldsymbol{MG}}]| = |\overline{\boldsymbol{MG}}| = \boldsymbol{k_g}.$$

Обчислюючи модуль векторного добутку $\bar{\boldsymbol{t}} = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}} = \bar{\boldsymbol{r}}_{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}$ на $\overline{\boldsymbol{MG}}$ з огляду на (27.1) знаходимо:

$$\boldsymbol{k_g} = \sqrt{\boldsymbol{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\left|\dot{\boldsymbol{u}}^1\left(\ddot{\boldsymbol{u}}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta}\right) - \dot{\boldsymbol{u}}^2(\ddot{\boldsymbol{u}}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{u}}^{\alpha}\dot{\boldsymbol{u}}^{\beta}\right|$$

§ 28. Геодезичні лінії на поверхні

Означення. Геодезичної лінією на поверхні називається крива, геодезична кривина якої в кожній точці дорівнює нулю.

Таким чином, цим означенням по суті виділяється клас «найпряміших» ліній на поверхні. Дійсно, будь-яка крива на поверхні, що проходить через точку **M** в даному напрямку, має одну і ту ж нормальну кривину. Геодезична ж кривина залежить від форми кривої на поверхні. Вибираючи з різноманітних кривих ті, які мають нульову геодезичну кривину, отримуємо лінії найменш викривлені.

З означення випливає:

Теорема. Для того, щоб лінія на поверхні була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб її головна нормаль у всіх точках співпадала з нормаллю до поверхні або щоб лінія була прямою.

Прикладом геодезичних ліній можуть служити прямі на площині, окружності великих кіл на сфері.

Використовуючи (27.1), отримуємо рівняння геодезичних ліній у вигляді:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta.$$

Вправи

1. Доведіть, що геодезична лінія на поверхні цілком визначається однією з властивостей:

a) В кожній точці лінії, де її кривина відмінна від нуля, нормаль до поверхні співпадає з головною нормаллю лінії;

b) В кожній точці лінії, де її кривина відмінна від нуля, нормаль до поверхні лежить в стичній площині лінії;

c) В кожній точці лінії її геодезична кривина дорівнює нулю;

d) В кожній точці лінії її кривина дорівнює модулю нормальної кривини;

e) В кожній точці лінії, де її кривина відмінна від нуля, її спрямна площа співпадає з дотичною площиною поверхні.

2. Доведіть, що будь-яка пряма на поверхні є геодезичною лінією.
3. Доведіть, що геодезичними лініями площини є прямі і тільки вони.
4. Доведіть, що геодезичними лініями циліндричної поверхні є прямолінійні твірні і узагальнені гвинтові лінії і тільки вони.
5. Доведіть, що меридіани поверхні обертання є геодезичними лініями.
6. Знайдіть геодезичні ліній на сфері.
7. Доведіть, що геодезична лінія є асимптотичною тоді і лише тоді, коли вона пряма.
8. Доведіть, що геодезична лінія є лінією кривини тоді і лише тоді, коли вона плоска.

§ 29. Внутрішня геометрія поверхні. Поняття про згинання

Означення. Згинанням поверхні називається безперервна її деформація, при якій зберігаються довжини кривих на поверхні.

Будь-яку аналітичну поверхню (тобто $\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2)$ – аналітична функція) можна згинати, якщо обмежитися досить малими її кусками. Але згинаючи дану поверхню, можна отримати далеко не всі інші поверхні, а тільки певний їх клас. Так, наприклад, навіть дуже малий клаптик сфери не можна зігнути на клаптик площині або сфери іншого радіусу.

Ті геометричні властивості поверхні, які можна встановити, виходячи із завдання тільки першої квадратичної форми, утворюють так звану ***внутрішню геометрію поверхні.***

Очевидно, внутрішня геометрія поверхні інваріантна щодо згинань.

До внутрішньої геометрії поверхні відносяться довжини кривих, кути між кривими, площі областей на поверхні, гаусова кривина $\boldsymbol{K}$, символи Крістофеля I і II роду, символи Рімана I і II роду $\boldsymbol{R}_{hijk}, \boldsymbol{R}^{l}_{.ijk}$, а також геодезична кривина кривої $\boldsymbol{k}_g$ і геодезичні лінії на поверхні.

Контрольні питанна до теми "Теорія поверхонь"

1. Яка точка поверхні називається звичайною?
2. Достатня ознака звичайної точки поверхні.
3. Дотична площина в точці поверхні. Рівняння дотичної площини.
4. Нормаль до поверхні в точці. Рівняння нормалі.
5. Криволінійні координати на поверхні.
6. Координатні лініі на поверхні.
7. Криві на поверхні.
8. Рівняння дотичної площини і нормалі поверхні в криволінійних координатах.
9. Перша квадратична форма поверхні. Її геометричний зміст.
10. Властивості першої квадратичної форми.
11. Довжина дуги кривої на поверхні.
12. Кут між кривими на поверхні.
13. Кут між координатними лініями поверхні.
14. Ознака ортогональної координатної сітки.

15. Чи можуть координатні лінії бути прямими?

16. Площа області на поверхні.

17. Друга квадратична форма поверхні. Її геометричний зміст.

18. Нормальна кривина кривої на поверхні.

19. Нормальна кривина в точці поверхні за даним напрямом.

20. Теорема Меньє.

21. Головні напрями поверхні в точці.

22. Сферичні точки поверхні.

23. Чи може в точці поверхні існувати більше, ніж два головних напрямів?

24. Теорема про головні напрями.

25. Чи може в точці поверхні не існувати головних напрямів?

26. Головні кривини поверхні в точці.

27. Лініі кривини на поверхні.

28. Чи може координатна сітка поверхні співпасти з сіткою ліній кривини?

29. Чи може лінія кривини на поверхні бути прямою?

30. Якщо пряма лінія належить поверхні, чи обов'язково вона буде лінією кривини?

31. Формула Ейлера.

32. Гаусова кривина поверхні.

33. Типи точок на поверхні.

34. Середня кривина поверхні.

35. Асимптотичні напрями поверхні

36. Асимптотичні лінії поверхні.

37. При якій умові координатна сітка на поверхні, що складається лише з точок гіперболічного типу, співпадає з асимптотичною сіткою?

38. Чи може асимптотична лінія на поверхні бути прямою?

39. Якщо пряма лінія належить поверхні, чи обов'язково вона буде асимптотичною?

40. В чому зміст першої групи деривацційних формул поверхні?

41. В чому зміст другої групи деривацційних формул поверхні?

42. Символи Кристофеля I і II роду та зв'язок між ними.

43. Формула Гауса і її зміст.

44. Формули Петерсона-Кодацци та їх зміст.

45. Символи Рімана І і ІІ роду та зв'язок між ними.

46. Теорема Гауса.

47. Основна теорема теорії поверхонь.

48. Геодезична кривина кривої на поверхні. Формула для її обчислення.

49. Звязок між нормальною, геодезичною кривинами кривої на поверхні та її кривиною.

50. Геодезичні лінії на поверхні. Їх існування.

51. Чи може геодезична лінія на поверхні бути прямою?

52. Якщо пряма лінія належить поверхні, чи обов’язково вона буде геодезичною?

53. Поняття про згинання поверхні.

54. Що складає внутрішню геометрію поверхні?

Список рекомендованої літератури

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія та топологія. – Х. : Основа, 1995.
2. Погорелов А. В. Курс дифференциальной геометрии. – М. : Наука, 1974.
3. Лейко С. Г., Диференціальна геометрія. – Одеса : Астропринт, 1999.
4. Кованцов Н. И., Зражевская Г. М., Кочаровский В. Г., Михайловский В. И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. – Сб. задач, К., 1989.
5. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М. : Наука, 1980.
6. Мищенко А. С. и др. Сборник задач по дифференциальной геометрии. – М. : Наука, 1980.
7. Иванов А. О., Тужилин А. А. Лекции по классической дифференцальной геометрии. – М. : Наука, 2009.
8. Иванов А. О., Тужилин А. А. Тензорный анализ на многообразиях. – М. : Наука, 2011.
9. Позняк Э. Г., Шикин Е. В., Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М. : Наука, 1990.
10. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. – М. : Наука, 1956.

Навчальне видання

Курбатова Ірина Миколаївна

Диференціальна геометрія

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів спеціальності 111 «Математика»

Частина І

В авторській редакції

Підп. до друку 13.10.2020. Формат 60х84/16.
Ум.-друк. арк. 3,84. Тираж 10 пр.
Зам. № 2084.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р. Р 51