О. Є. КОНОВАЛЕНКО, М. А. ТКАЧУК, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Харків 2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

О. Є. КОНОВАЛЕНКО, М. А. ТКАЧУК, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів спеціальності
«Інформаційні технології проектування»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 04.06.2014

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

УДК 519.854(075)

ББК 22.176я7

К 64

Рецензенти:

Г.Г. Асєєв, д-р техн. наук, проф., зав. каф. інформаційних технологій ХДАК;

О.В. Устиненко, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПІ».

Авторський колектив: О.Є. Коноваленко, ст. викладач, М.А. Ткачук, проф., зав. каф. теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, А.В. Грабовський, доцент

Коноваленко О.Є.

К 64 Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с.

ISBN

Навчально-методичний посібник містить перелік основних тем, які входять до програми курсу, методичні вказівки, індивідуальні розрахункові завдання, приклади розв’язання типових задач.

Призначено для студентів спеціальності «Інформаційні технології проектування». Посібник може бути використаний для всіх спеціальностей, до програми навчання яких входить курс «Дискретна математика», усіх форм навчання.

Бібліогр. 20 назв.

УДК 519.854(075)

ББК 22.176я7

ISBN

В С Т У П

Дискретна математика є найбільш динамічною галуззю знань. На сьогодні однією з основних та значущих сфер застосування методів дискретної математики є комп'ютерні технології. Це пояснюється необхідністю розробки та експлуатації електронних обчислювальних машин, засобів передачі та обробки інформації, автоматизованих систем управління та проектування. На межі дискретної математики та програмування з'являються нові дисципліни, такі як розробка та аналіз обчислювальних алгоритмів, не чисельне програмування, комбінаторні алгоритми, алгоритмізація процесів. Традиційно до дискретної математики належать галузі математичних знань, такі як теорія множин, комбінаторика, математична логіка, теорія графів та сіток.

Кожна математична теорія стає більш зрозумілою та доступною, якщо її вдається застосувати для розв'язання практичних задач. Цей посібник дозволить кожному студенту набути навичок використання теоретичних знань на практиці. Він може бути використаний студентами як денної, так і заочної форми навчання різних спеціальностей, до навчальної програми яких входить вивчення «Дискретної математики».

У посібнику коротко викладається необхідний теоретичний матеріал та наводяться формули, які потрібні для розв'язання задач. Кожна задача має 31 варіант. Як еталонний розв'язано нульовий варіант. Усі задачі різних варіантів однотипні. Числові дані наведено у таблицях і розміщено за номером варіанта. При вивченні курсу студент розв'язує свій варіант з набору задач.

При виконанні роботи студент повинен переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їх значеннями для варіанта, що розв'язується. Встановити, які формули слід застосувати для розв'язання. Обчислення провести по можливості точно.

І. Елементи теорії множин

Основні поняття

Множини є неозначене математичне поняття. Проілюструвати множину можна на прикладах.

1) множина книжок в бібліотеці;

2) множина непарних чисел;

3) множина функцій неперервних на певному відрізку тощо.

Множини позначаються великими літерами латинського алфавіту *A, B*, *C, ..., N*, …, а елементи множин маленькими літерами *a, b, c, ..., n, …* Якщо елемент *a* належить множині *A*, то пишуть $a \in A$, в протилежному випадку $a \notin A$ (елемент а не належить множині *A*).

Кількість елементів скінченої множини *A* має назву *потужності A* і позначається $|A|$. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* та позначається $\varnothing$.

Способи опису множин

1. Перерахування всіх елементів.

Наприклад, $A=\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

2. Показ характеристичної властивості елементів даної множини.

Наприклад, якщо *F* – множина коренів рівняння $\sin\frac{x}{2}=0$, яка належить інтервалу [0; 2π], то пишуть: $F=\{x:\sin\frac{x}{2}=0, x\in[0;2\pi]\}$.

Порівняння множин

Якщо кожен елемент множини *A* є також елементом множин *B*, то *A* має назву *підмножини* (або частини) множини *B*. Позначається $A \subset B$.

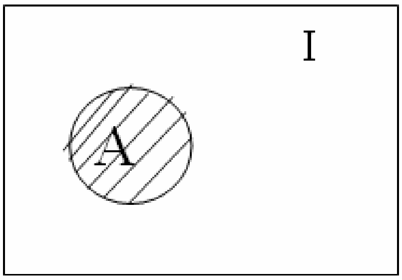
Множини *A* та *B* *рівні*, якщо одночасно виконуються умови $A \subset B$ та $B \subset A$. Позначається $A=B$.

Діаграми Ейлера – Венна

Множина, яка об'єднує всі однотипні множини, має назву *універсальної множини*, або *універсума*. Позначається I.

Наприклад, універсумом зоології є множина всіх тварин. Універсумом математики є множина чисел.

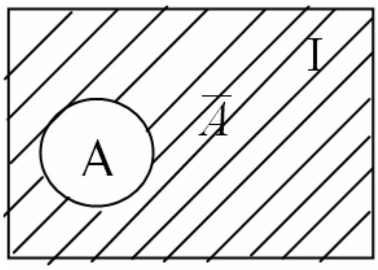
Множини та операції над множинами для наочності зображають на площині у вигляді кругів Ейлера. Універсум I зображають у вигляді області прямокутника, а його підмножини – у вигляді кругів, еліпсів тощо.



Операції над множинами

1. *Заперечення (доповнення) множини.*

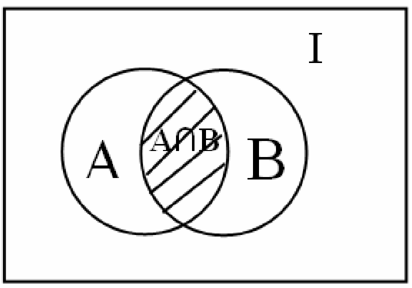
Означення. Запереченням множини A називають множину $\overline{A}$ (не A), елементами якої є всі елементи універсума, за виключенням елементів множини A. З означення випливає, що $\overline{\overline{A}} = A$



$\overline{A}$ заштриховано

2. *Переріз множин.*

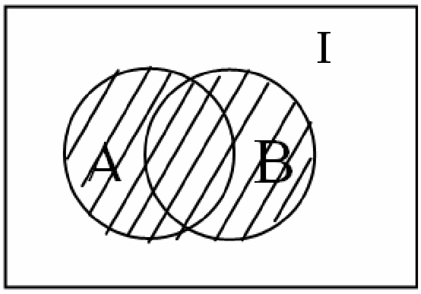
Означення. Перерізом множин A та B називають множину $A \cap B$ $(A \cdot B)$, яка складається з усіх елементів, що належать A та B одночасно



$A \cap B$ заштриховано

3. Об'єднання множин.

Означення. Об'єднанням множин *A* та *B* називається множина *A U B* *(A+B)*, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин



A U B заштриховано

Примітка 1. Операції перерізу та об’єднання можна узагальнити для *n* множин *(n>2)* $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$; $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Примітка 2. Якщо в виразі немає дужок, то спочатку виконується заперечення (доповнення), потім переріз, потім об'єднання.

Властивості операцій

1. Комутативність $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \cap B = B \cap A$.
2. Асоціативність $A \bigcup B \bigcup C = (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$;
   $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Дистрибутивність:
   3.1. $A \cap (B \bigcup C) = (A \cap B) \bigcup (A \cap C)$;
   3.2. $A \bigcup (B \cap C) = (A \bigcup B) \cap (A \bigcup C)$.
4. $A \bigcup A = A$; $A \cap A = A$.
5. $A \bigcup \overline{A} = I$; $A \bigcup \overline{A} = \varnothing$.
6. $A \bigcup I = I$; $A \cap I = A$.
7. $A \bigcup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.
8. Правило де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. Поглинання $A \cup \left(A \cap B\right) = A$;
   $A \cap \left(A \cup B\right) = A$.

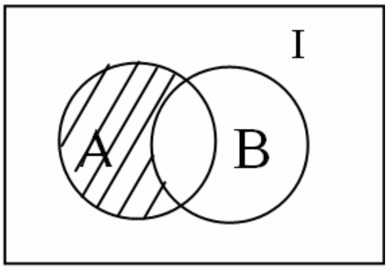
Примітка 3. Правило де Моргана можна узагальнити на випадок *n* множин (*n>2*): $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$,

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_n .$$

Операції заперечення, перерізу та об'єднання називають базисними операціями. Через ці операції можна виразити інші операції теорії множин, наприклад різницю множин, симетричну різницю.

4. Різниця множин.

Означення. Різницею множин *A* і *B* називається множина $A \backslash B$, що складається з усіх елементів *A*, які не належать *B* $A \backslash B = \{x\colon x \in A,\ x \notin B\}$



$A \backslash B$ заштриховано

Легко побачити, що $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \overline{A} = A$; $\overline{A} \setminus A = \overline{A}$; $A \setminus I = \varnothing$; $I \setminus A = \overline{A}$, $A \setminus \varnothing = A$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

Різницю множин можна записати формулою: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

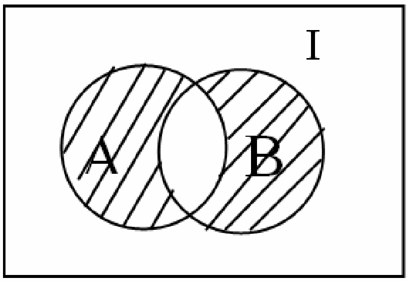
Різниця множин не комутативна та не асоціативна.

5. Симетрична різниця (диз'юнктивна сума)

Означення. Симетричною різницею множин *A* і *B* називається множина $A \oplus B$, яка складається з елементів множини *A* або множини *B*, за виключенням елементів, які належать *A* і *B* одночасно

$A \oplus B = \{x\colon x \in A$ або $x \in B$ та $x \notin A \cap B\}$.

Симетрична різниця комутативна й асоціативна, крім того $A \oplus A = \varnothing$; $A \oplus \overline{A} = I$; $A \oplus I = \overline{A}$; $A \oplus \varnothing = A$



$A \oplus B$ заштриховано

За допомогою діаграми Ейлера – Венна легко показати, що

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

II. Відповідності та відношення

Прямий (декартовий) добуток множин

Нехай маємо дві множини: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ та $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Означення. Прямим (декартовим) добутком множин A та B (позначається $A \times B$) називається множина усіх упорядкованих пар (a_i, b_j), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ таких, що перший елемент належить множині A, а другий – множині B.

Відповідно декартовим добутком трьох множин A, B, C ($C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$) називається множина усіх упорядкованих трійок (a_i, b_j, c_k), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$,

де $a_i \in A$, $b_j \in B$, $c_k \in C$, позначається $A \times B \times C$ тощо.

Відповідності. Відношення.

Відповідністю називається будь який зв'язок між елементами однієї множини або елементами різних множин.

Поняття відповідності – найбільш загальне поняття, на якому базуються поняття функції, відображення тощо.

Для того щоб задати відповідність G між елементами множин X та Y необхідно вказати, які елементи $y \in Y$ відповідають елементам $x \in X$, тобто вказати пари (x, y).

Відношення є частинним випадком відповідності, але заданої не на різних множинах, а на одній множині X. Між елементами цієї множини можуть існувати певні логічні зв'язки, тобто елементи знаходяться в певних відношеннях один з одним. Той факт, що елемент $x_i \in X$ знаходиться у відношенні R з елементом $x_j \in X$ записується так: $x_i R x_j$, або $(x_i, x_j) \in R$.

Таке відношення називається бінарним. Таким чином, бінарне відношення, яке задано на множині X, є підмножиною декартового добутку $X \times X$ $R \subseteq X \times X$.

Способи задання відношень

Відношення можна задавати або перерахуванням пар елементів, які йому належать, або таблицею (матрицею), або графом.

Приклад 1. Відношення R – "бути менше", яке задано на множині $A = \{1, 3, 4, 8, 9\}$.

Його можна задати:

1. Перерахуванням пар:

R = {(1, 3),(1, 4),(1, 8),(1, 9),(3, 4),(3, 8),(3, 9),(4, 8),(4, 9),(8, 9)}

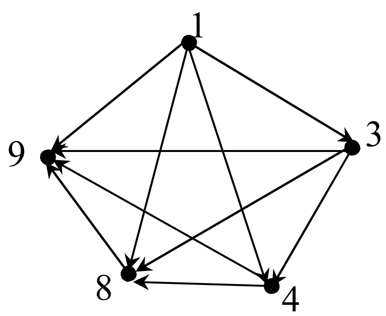
2. Таблицею: якщо пара $(a_i, a_j) \in R$, то на перетині i-го рядка та j-го стовпця стоїть одиниця, якщо $(a_i, a_j) \notin R$ – то 0.

В нашому прикладі маємо:

R	1	3	4	8	9
1	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0

або $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Граф. Елементи позначаються точками (вершинами), а зв'язок між ними – дугами (ребрами), причому дуга має напрямок – від першого елемента пари до другого.



Операції над відношеннями

Оскільки відношення є множиною, то над відношеннями виконуються всі ті операції, що й над множинами: об'єднання, переріз, різниця, симетрична різниця, доповнення (до $X \times X$). Крім того, існують операції інверсії та композиції.

1. *Інверсія* – будується на основі поняття *інверсії пари*, тобто інверсія пари (x_i, x_j) є пара (x_j, x_i). Інверсія відношення R є відношення R^{-1}, яке утворене інверсією пар. R^{-1} ще називають *оберненим* відношенням до R. Для відношення R (приклад 1) R^{-1} є:

$R^{-1} = \{(3, 1),(4, 1),(8, 1),(9, 1),(4, 3),(8, 3),(9, 3),(8, 4),(9, 4),(9, 8)\}$.

2. Нехай на множині X задано відношення R та P. Нехай $(a_i, a_j) \in R$, а

$(a_j, a_к) \in P$.

Композицією цих двох пар є пара $(a_i, a_к)$. Композицією відношень R та P називається відношення $Q = R \circ P$, яке утворено композицією пар.

Наприклад, нехай на множині $A=\{1, 3, 4, 8, 9\}$ задано відношення R – «бути менше» (приклад 1) та P – «ділитись без залишку», тобто

$P = \{(9, 1),(8, 1),(4, 1),(3, 1),(9, 3),(8, 4)(1, 1),(3, 3),(4, 4),(8, 8),(9, 9)\}$.

Тоді $R \circ P = Q = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (3, 1), (3, 4), (3, 8), (3, 3), (3, 9), (4, 1), (4, 4), (4, 8), (4, 3), (4, 9), (8, 1), (8, 3), (8, 9)\}$.

Властивості відношень

1. *Рефлексивність.*

Означення. Відношення R називається рефлексивним, якщо кожен елемент множини A, на якому задано відношення, знаходиться в цьому відношенні сам з собою, тобто $\forall a_i \in A;\ (a_i, a_i) \in R$. Граф рефлексивного відношення при кожній вершині має петлю.

2. *Антирефлексивність.*

Означення. Відношення R називається антирефлексивним, якщо жоден з елементів множини A, на якому задано відношення, не знаходиться в цьому відношенні сам з собою, тобто $\forall a_i \in A;\ (a_i, a_i) \notin R$. У графа антирефлексивного відношення ніяка вершина не має петель.

3. *Симетричність.*

Означення. Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари $(a_i, a_j) \in R$, $a_i, a_j \in A$ одночасно виконується умова $(a_j, a_i) \in R$. Граф симетричного відношення має тільки подвійні ребра різного напрямку, а петлі можуть бути або не бути.

4. *Антисиметричність.*

Означення. Відношення R називається антисиметричним, якщо для жодної пари різних елементів $a_i, a_j \in A$, таких, що $(a_i, a_j) \in R$, одночасно не виконується умова $(a_j, a_i) \in R$. Граф антисиметричного відношення містить тільки одинарні ребра, а петлі можуть бути або не бути.

5. Транзитивність.

Означення. Відношення R називається транзитивним, якщо з того, що одночасно виконуються умови $(a_i, a_j) \in R$ та $(a_j, a_к) \in R$ випливає умова $(a_i, a_к) \in R$.

На графі транзитивного відношення, якщо є два послідовних ребра одного напрямку, то обов'язково повинно бути ребро, яке йде з початку першого ребра до кінця другого.

Види відношень

1. *Еквівалентність.*

Означення. Еквівалентністю називається відношення R, яке задовольняє властивостям рефлексивності, симетричності та транзитивності.

2. Частковий порядок.

Означення. Частковим порядком називається відношення R, яке задовольняє властивостям рефлексивності, антисиметричності та транзитивності.

3. *Суворий порядок.*

Означення. Суворим порядком називається відношення R, яке задовольняє властивостям антирефлексивності, антисиметричності та транзитивності.

ІІІ. Елементи математичної логіки

Логіка (logos – слово, думка, мова, розум – з грецької) – це сукупність наук про закони та форми мислення. Можна казати про традиційну логіку, яка є початковою сходинкою логіки та вивчає загальні форми висновків та способи зв'язку висловлювань у висновках (Аристотель IV століття до н.е.).

Криза традиційної логіки підштовхнула дослідників до розроблення інших підходів щодо формалізації висновків (Джордж Буль, Огюст де Морган – середина XIX ст.) Внаслідок цього виникла математична логіка (теоретична логіка, символічна логіка) та закладено основи алгебри логік – булевої алгебри.

Булева алгебра

Логічними (булевими) змінними називають змінні, які набувають значення 0 або 1.

Логічною називають функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задану на множині логічних змінних $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ і яка набуває значення 0 або 1. З комбінаторики відомо, що для n-місної функції кількість різних наборів змінних дорівнює 2^n. Логічні функції можна задати формулами або таблицями, які мають назву таблиць істинності. Область визначення логічної функції – це множина наборів, на яких вона є визначеною.

Приклад.

Область визначеності – набори (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	-
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	1

Основні елементарні логічні функції

1. *Інверсія* (ні, заперечення, ¬, доповнення). Інверсія $f(x) = \bar{x}$ – логічна функція однієї змінної, яка задається таблицею істинності:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Легко побачити, що $\bar{\bar{x}} = x$.

2. *Кон'юнкція* (*І*, логічний добуток).

Кон'юнкція – це бінарна логічна функція, яка задається виразом:

$f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2 = \min\{x_1, x_2\}$

Таблиця істинності кон'юнкції має вигляд

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1 та x_2 – логічні співмножники

3. *Диз'юнкція* (АБО, математичне додавання).

Диз'юнкція – це бінарна логічна функція, яка задається виразом:

$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$

Її таблиця істинності має вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1 та x_2 – логічні доданки

Примітка. Операції кон'юнкції та диз'юнкції можна узагальнити на *n* логічних співмножників та *n* логічних доданків.

Основні тотожності алгебри Буля

1. Диз'юнкція та кон'юнкція комутативні:

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \quad x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1.$

2. Диз'юнкція та кон'юнкція асоціативні:

а) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$;

б) $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$.

3. Диз'юнкція та кон'юнкція взаємно дистрибутивні:

а) $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$;

б) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$.

4. Правила де Моргана (закони де Моргана):

а) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$;

б) $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

Взагалі $\overline{x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge .... \wedge \overline{x_n}$;

$\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee .... \vee \overline{x_n}$.

5. $x \wedge x = x \quad x \vee x = x$:

$x \wedge \overline{x} = 0 \quad x \vee \overline{x} = 1$

$x \wedge 0 = 0 \quad x \vee 0 = x$

$x \wedge 1 = x \quad x \vee 1 = 1$

6. Закон поглинання:

$x_1 \wedge x_2 \vee x_1 = x_1, \quad (x_1 \vee x_2) \wedge x_1 = x_1.$

7. Закон склеювання:

$x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} = x_1, \quad (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1.$

Довести тотожність можна за допомогою таблиць істинності.

Якщо в логічному виразі відсутні дужки, то спочатку виконуються операції заперечення, потім кон'юнкції, далі – диз'юнкції.

Інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція – основні функції (операції) математичної логіки, тому що через них можуть бути визначені інші логічні функції (операції), наприклад, імплікація, еквіваленція, сума за mod2.

а) *імплікація (логічне слідування)*

$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$ (якщо x_1, то x_2).

Таблиця істинності має вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

б) *еквіваленція (функція рівнозначності)*

$f(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_1 \wedge x_2.$

Таблиця істинності

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в) *сума за mod2 (відокремлюване АБО, строга диз'юнкція, не еквівален-ція).*

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1}\, x_2.$$

Таблиця істинності

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Властивості:

1) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ – (комутативність);

2) $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$ – (асоціативність);

3) $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$.

Диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми булевих функцій

Елементарною кон'юнкцією називається кон'юнкція попарно різних змінних або їх заперечень, наприклад, $x_1 \; x_2 \overline{x_3}$ або $x_1 \overline{x_2} \; x_3$.

Елементарною диз'юнкцією називається диз'юнкція попарно різних змінних або їх заперечень, наприклад, $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$.

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) булевої функції називається диз'юнкція будь-якої скінченної множини попарно різних елементарних кон'юнкцій, наприклад $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \vee x_1, \overline{x_2}, x_3 \vee x_1 x_3$.

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називається кон'юнкція будь якої скінченної множини попарно різних диз'юнкцій, наприклад

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3).$$

Досконалою ДНФ (*досконалою КНФ*) булевої функції називається така її ДНФ (КНФ), в якої будь-яка елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) містить в собі в прямому або інверсному вигляді всі істотні змінні.

Будь-яка формула алгебри Буля може бути приведена до ДНФ (КНФ) таким чином:

1) за допомогою законів де Моргана позбавитися в формулі від значень заперечення відносно декількох змінних;

2) за допомогою першого закону дистрибутивності. 3а (для КНФ – другого закону 3б) привести формулу до диз'юнкції кон'юнкцій (кон'юнкції диз'юнкцій);

3) спростити отриманий вираз згідно з тотожностями пунктів 5, 6, 7 (див. основні тотожності алгебри Буля).

Перетворення ДНФ до досконалої ДНФ (ДДНФ) можна виконати розщепленням кон'юнкцій, які містять не всі істотні змінні, шляхом множення цих кон'юнкцій на диз'юнкцію виду ($x_i \vee \overline{x_i}$), де x_i – недостатня змінна. Далі вся формула приводиться до ДНФ.

Аналогічно для перетворення КНФ до досконалої КНФ (ДКНФ) треба розщепити диз'юнкцію, яка містить не всі істотні змінні (наприклад, не містить змінну x_i) шляхом додавання до цієї диз'юнкції доданка $x_i \wedge \overline{x_i}$. Далі формула приводиться до КНФ.

Примітка. КНФ можна отримати з ДНФ шляхом перетворення:

нехай $f = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n = \overline{\overline{f}} = \overline{\overline{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n}} = \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}}$.

Перетворимо вираз під знаком інверсії до ДНФ, потім застосуємо закони де Моргана та отримаємо КНФ.

Аналогічно з КНФ можна отримати ДНФ.

Багаточленом Жегалкіна називається багаточлен, що є сумою константи 0 або 1 і різних одночленів, в які усі змінні входять не вище, ніж в першому ступені.

Всяка булева функція $f(x_1,...,x_n)$ може бути подана поліномом Жегалкіна, тобто у вигляді $f(x_1,...,x_n)=\underset{(i_1,...,i_k)}{\oplus} x_{i1}x_{i2}...x_{ik}\oplus c$, де в кожному наборі ($i_1, \ldots, i_k$) усі i_j різні, а підсумовування ведеться за деякою множиною таких неспівпадаючих наборів. Подання булевої функції у вигляді полінома Жегалкіна єдине з точністю до порядку доданків.

ДПНФ утворюється шляхом заміни в ДДНФ: $\vee$ на $\oplus$ і $\bar{x}$ на $1 \oplus x$.

$$y_{\text{СДНФ}}=(\bar{x}_3\wedge\bar{x}_2\wedge x_1)\vee(\bar{x}_3\wedge x_2\wedge x_1)\vee(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_3\wedge x_2\wedge x_1),$$

$$y_{\text{СКНФ}}=(x_3\vee x_2\vee x_1)\wedge(x_3\vee\bar{x}_2\vee x_1)\wedge(\bar{x}_3\vee x_2\vee\bar{x}_1)\wedge(\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\vee x_1),$$

$$y_{\text{СПНФ}}=(x_3\oplus 1)(x_2\oplus 1)x_1+x_3x_2x_1+(x_3\oplus 1)x_2x_1+x_3(x_2\oplus 1)(x_1\oplus 1).$$

Поліном Жегалкіна називається нелінійним (лінійним), якщо він (не) містить добутки змінних.

Таким чином, лінійність булевої функції рівносильна лінійності відповідного полінома Жегалкіна.

Для отримання полінома Жегалкіна булевої функції, що знаходиться в ДДНФ, використовують аксіоми булевої алгебри, аксіоми булевого кільця $\langle\{0,1\},\oplus\rangle$ і рівності, що виражають операції $\wedge,\vee$ і $\neg$ через операції цього булевого кільця:

$$x\vee y=x\oplus y\oplus xy,\quad x(y\oplus z)=xy\oplus xz,\quad \bar{x}=x\oplus 1,\quad x\oplus 0=x,\quad x\oplus\bar{x}=1,\quad x\bar{x}=0$$

і так далі.

Наприклад, визначити лінійність функції $f(x,y,z)=\overline{xy}z\vee\bar{x}yz\vee x\overline{yz}$.

Маємо

$$f(x,y,z)=(\overline{xy}z\oplus\bar{x}yz\oplus\overline{xy}z\bar{x}yz)\vee x\overline{yz}=(\overline{xy}z\oplus\bar{x}yz)\vee x\overline{yz}=$$
$$=\overline{xy}z\oplus\bar{x}yz\oplus x\overline{yz}\oplus(\overline{xy}z\oplus\bar{x}yz)x\overline{yz}=\overline{xy}z\oplus\bar{x}yz\oplus x\overline{yz}\oplus 0=$$
$$=\bar{x}z(\bar{y}\oplus y)\oplus x\overline{yz}=\bar{x}z\cdot 1\oplus x\overline{yz}=(x\oplus 1)z\oplus x(y\oplus 1)(z\oplus 1)=$$
$$=xz\oplus 1\cdot z\oplus xyz\oplus xz\oplus xy\oplus x=x\oplus z\oplus xy\oplus xyz.$$

Отриманий поліном Жегалкіна є нелінійним, а отже, й функція f нелінійна.

IV. Комбінаторний аналіз

Правило суми та добутку

Нехай маємо множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ та $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$, причому $A \cap B = \varnothing$. Легко побачити, що $|A \cup B| = n + k$; $|A \times B| = n \cdot k$. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n способами, а елемент $b \in B$ – k способами, то вибір «або a, або b» можна зробити $n+k$ способами (правило суми). Вибір «і a і b» можна зробити $n \cdot k$ способами (правило добутку).

Різноманітні конструкції з елементів певної множини A мають назву *комбінаторних конфігурацій* або *комбінацій*. Підмножина множини A потужності r називається (n, r) *вибіркою*. Ця вибірка може бути *упорядкованою* (задано порядок слідування елементів) або *неупорядкованою* – в протилежному випадку.

Розміщення

Означення. Розміщення – це такі конфігурації, які розрізняються елементами або їх порядком, тобто всілякі упорядковані вибірки. Розміщення можуть допускати або не допускати повторень елементів. Число розміщень з n елементів до r позначають A_n^r та обчислюють за формулою:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Число розміщень з n елементів до r з повтореннями елементів позначають $\overline{A}_n^r$ та обчислюють за формулою: $\overline{A}_n^r = n^r$.

Перестановки

Означення. Перестановками з n елементів називають конфігурації, що відрізняються тільки порядком елементів.

Якщо розглядати розміщення без повторень при $r = n$, то отримаємо перестановки. Число перестановок з n елементів без повторень позначається P_n.

Оскільки $P_n = A_n^n$, то маємо:

$$P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Нехай множина A має n елементів, причому елементів першого виду n_1, другого виду – n_2, … k-го виду – n_k. $n_1 + n_2, + \dots + n_k = n$.

Кількість різних перестановок з повтореннями визначається за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \qquad (*)$$

Розглянемо задачу на розбиття множини. Нехай маємо n-елементну множину A. Розіб'ємо цю множину на k підмножин A_i, $i = \overline{1,k}$, $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$. Нехай $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, … $|A_k| = n_k$. $(n_1 + n_2, + \dots + n_k = n)$. Скільки існує способів здійснити таке розбиття?

Відповідь: число розбиттів підраховується за формулою (∗).

Сполучення

Означення. Сполученнями називають такі конфігурації, які розрізняються елементами, але не їх порядком. Тобто це є різноманітні неупорядковані вибірки.

Число сполучень без повторень позначається C_n^r, сполучень з повтореннями – $\overline{C}_n^r$. Число сполучень з n елементів до r без повторень обчислюється за формулою: $C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Числа C_n^r називаються ще біноміальними коефіцієнтами та задовольняють властивостям:

а) $C_n^r = C_n^{n-r}$, б) $C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$, в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Число сполучень з n елементів по r з повтореннями можна підрахувати за формулою:

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = C_{n+r-1}^{n-1}.$$

Формула включень і виключень

Нехай A і B – скінченні множини, причому $|A|$ і $|B|$ відомі. Визначення $|AUB|$ безпосередньо випливає з операції об'єднання множин:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Справедлива загальна теорема: якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < \ldots < l \le n} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l|. \quad (1)$$

Існує ще одна форма запису формули включень і виключень. Нехай X – скінченна множина, причому $|X| = N$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – деякі властивості, які притаманні або не притаманні елементам з X. Нехай $N(\alpha_i)$ – кількість елементів, яким притаманна властивість α_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$, $N(\alpha_i, \alpha_j)$ – кількість елементів, яким притаманні властивості α_i та α_j одночасно, …

Якщо N_0 – кількість елементів, яким не притаманна жодна властивість $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Тоді справедлива формула:

$$N_0 = N - \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(\alpha_i, \alpha_j) - \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \quad (2)$$

V. Графи

З геометричної точки зору граф – це конфігурація точок (*вершин* графа), які з'єднані неперервними лініями (*ребрами*). Ребра, які не мають орієнтації, називаються *неорієнтованими*, в протилежному випадку – *орієнтованими*, або *дугами*. Відповідно граф називається *орієнтованим* (орграфом), якщо кожне його ребро є орієнтованим, і *неорієнтованим*, якщо кожне його ребро є неорієнтованим.

Якщо ребро e_k з'єднує вершини v_i і v_j, то кажуть, що між вершинами v_i, v_j та ребром e_k установлено відношення інцидентності, тобто ребро e_k інцидентне вершинам v_i і v_j, або вершини v_i і v_j інцидентні ребру e_k . Вершини, з'єднані ребром, називаються *суміжними*. Ребра, які мають спільну вершину, теж називаються *суміжними*.

Таким чином з теоретико-множинної точки зору граф є сукупністю двох множин: множини вершини $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ і множини ребер $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, між якими встановлено відношення інцидентності.

Ребро, яке починається і закінчується в одній вершині, має назву *петлі*.

Степенем вершини v_i графа G називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Вершини, ступінь яких дорівнює 0, називаються *ізольованими*. Вершини, степінь яких дорівнює 1, називаються *висячими*.

Два графа G і G' називаються *ізоморфними*, якщо між множинами вершин V і V' можна встановити взаємнооднозначну відповідність, яка зберігає відношення суміжності вершин.

Якщо множина ребер графа співпадає з декартовим добутком VxV, то граф називається *повним* (з петлями). Якщо (v_i,v_i) для будь-якого i не належить графу, то маємо *повний* граф без петель.

Матричні способи задання графів

Нехай $G=G(V,E)$ – граф, який має n вершин та m ребер.

1) *Матрицею суміжності* графа G називається квадратна матриця $A(G) = ||a_{ij}||$, яка має n рядків та n стовпців, елемент a_{ij} якої дорівнює кількості

ребер, інцидентних вершинам v_i та v_j (для орієнтованих графів – які починаються у вершині v_i і закінчуються у вершині v_j). Елемент $a_{ij} = 0$, якщо вершини v_i та v_j не суміжні.

2) *Матрицею інцидентності орієнтованого графа G* називається матриця $B(G) = ||b_{ij}||$ розміром n×m, елементи якої мають вигляд:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є початком ребра } e_j; \\ 1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є кінцем ребра } e_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } v_i \text{ не є інцидентною ребру } e_j; \end{cases}$$

$$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Примітка. Якщо вершина v_i інцидентна петлі e_j, то елемент b_{ij} приймають рівним *a*, або будь якому числу, яке відрізняється від 0, 1, –1.

3) *Матрицею інцидентності неорієнтованого графа G* називається матриця $B(G) = ||b_{ij}||$ розміру $n \times m$, елементи якої мають вигляд:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна ребру } e_j; \end{cases}$$

Таким чином два графи $G_1=(V_1,E_1)$ та $G_2=(V_2,E_2)$ є ізоморфними, якщо при відповідній нумерації вершин вони мають однакові матриці суміжності.

Маршрути, ланцюги, цикли

Маршрутом, який з'єднує вершини v_1 та v_l графа *G,* називається послідовність ребер

$(v_1,v_2), (v_2,v_3), \ldots, (v_{k-1},v_k), (v_k,v_{k+1}), \ldots, (v_{l-1},v_l).$

Маршрут можна задати, перелічуючи або ребра, або вершини. Вершина v_1 називається *початком* маршруту, v_l – *кінцем*.

Маршрут *замкнутий*, якщо $v_1 = v_l$.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні. Маршрут називається *простим_ланцюгом*, якщо всі його вершини різні. Замкнутий ланцюг називається *циклом*. Замкнутий простий ланцюг називається *простим циклом*. Для орієнтованих графів запроваджують поняття *орієнтованого_маршруту*, *орієнтованого (простого) ланцюга*, орієнтованого (простого) циклу. Орієнтований маршрут, тобто маршрут, у якого існує напрямок, який приводить з початку маршруту v_1 в кінець v_l має ще назву *шлях*.

Вершини v_i і v_j називаються *зв'язними*, якщо вони з'єднані маршрутом.

Граф називається *зв'язним*, якщо всі його вершини зв'язні. В протилежному випадку граф *незв'язний*. Незв'язний граф розпадається на зв'язні компоненти, які не з'єднані між собою. Будь-який граф (зв'язний чи незв'язний) характеризується *цикломатичним числом* $V = n_e - n_v + k$, де n_e – кількість ребер, n_v – кількість вершин, k – кількість компонент зв'язності графа. Для зв'язного графа $V = n_e - n_v + 1$.

Зв'язний граф, який не має циклів, має назву *дерева*. Зв'язний орграф називається деревом, якщо він має одну вершину (корінь), в яку не заходить жодна дуга, а в кожну іншу вершину заходить тільки одна дуга.

Будь-якому орієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф, замінивши кожне неорієнтоване ребро на дві орієнтовані в протилежних напрямках дуги. Крім того, для кожного орієнтованого графа існує також *співвіднесений* неорієнтований граф, ребрами якого є дуги орграфа, але без орієнтації. При цьому дві дуги протилежного напрямку, що з'єднують дві певні вершини v_i і v_j, замінюються на одне ребро.

Орграф є зв'язний, якщо зв'язний співвіднесений йому неорграф.

Вершина v_j називається *досяжною* з вершини v_j, якщо існує орієнтований маршрут (шлях) з v_i в v_j. Вершини v_i та v_j називаються *сильно зв'язними*, якщо v_i досяжна з v_j і v_j досяжна з v_i

Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо всі його вершини є *сильно зв'язними*.

Граф (орграф) можна задати матрицею зв'язності (сильної зв'язності) $S(G) = ||S_{ij}||$ розміром $n \times n$, де n – кількість вершин графа G, елементи якого мають вигляд:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершини } \mathrm{v_i} \text{ та } v_j \text{ зв'язні (сильно зв'язні)} \\ 0, \text{ якщо вершини } \mathrm{v_i} \text{ та } v_j \text{ не є зв'язні (сильно зв'язні)} \end{cases}$$

Граф називається *зваженим*, якщо кожному його ребру (v_j, v_j) поставлено у відповідність певне число, яке має назву *ваги* ребра (дуги) або довжини ребра (дуги).

Алгоритм Краскала

Суграфом або *остовим підграфом* графа $G = G(V,E)$ називається граф $G' = G(V,E')$, отриманий з графа G тільки за допомогою одної або декількох операцій вилучення ребра.

Нехай задано зважений зв'язний граф з n вершинами.

Задача: побудувати для цього графа зв'язний остовий підграф, який є деревом з мінімальною сумарною вагою ребер.

Розв'язок цієї задачі про мінімальне остове дерево може бути отримано за допомогою алгоритму Краскала.

Алгоритм Краскала.

1. Обираємо найкоротше ребро e_1 графа G, потім ребро e_2, найкоротше з тих, що залишилися.
2. Із ребер, що залишилися, обираємо найкоротше ребро таким чином, щоб воно не утворювало циклу з вибраними раніше ребрами.
3. Продовжуємо цей процес і на k-му кроці він закінчується $(k = n-1)$. Залишаємо тільки обрані ребра. Це й є шукане дерево.

Ейлерівський граф

Цикл, який проходить по всіх ребрах скінченного графа рівно по одному разу, називається *ейлеровим циклом*. Граф, який містить ейлерівський цикл, називається *ейлеровим графом*.

За теоремою Ейлера скінченний граф G є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли 1) він зв'язний, 2) степені всіх його вершин є парними.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке множина? Як можна задати множину?

2. Які множини називаються рівними?
3. Яка множина називається порожньою?
4. Що таке підмножина другої множини?
5. Що таке булеан (множина – степінь) множини?
6. Що таке універсальна множина (універсум)?
7. Як будується і для чого застосовується діаграма Ейлера – Венна?
8. Як визначається об'єднання множин?
9. Що таке переріз множин?
10. Як визначається різниця множин?
11. Що таке доповнення множин?
12. Які властивості мають операції об'єднання та перерізу множин?
13. Як формулюються закони де Моргана?
14. В чому полягають закони поглинання?
15. Що таке упорядкована пара?
16. Як визначається прямий (декартовий) добуток множин?
17. Що таке бінарне відношення?
18. Як визначається ліва, права область та поле бінарного відношення?
19. Які існують способи задання бінарного відношення?
20. Які бінарні відношення називають рефлексивними, антирефлексивними?
21. Які бінарні відношення називають симетричними, антисиметричними?
22. Які бінарні відношення називають транзитивними?
23. Як визначається відношення еквівалентності?
24. Що таке клас еквівалентності?
25. Як визначається відношення порядку?
26. Яке відношення порядку називається строгим?
27. Які бінарні відношення називають функціональними?
28. Яке функціональне відношення називають відображенням, функцією?
29. Яка різниця між поняттями відображення та функції?
30. Яке відображення називають *бієктивним*?
31. Які множини називають рівнопотужними?
32. Що означає поняття потужності множини?
33. Що таке висловлення?
34. Як утворюються складні висловлення?
35. Які логічні поєднання ви знаєте?
36. Як визначаються булеві функції?

37. Скільки існує булевих функцій *n* змінних?
38. Який вид має таблиця істинності імплікації, еквівалентності?
39. У чому полягає комутативність булевих функцій?
40. Що таке асоціативність булевих функцій?
41. Які основні класи булевих функцій ви знаєте?
42. Як формулюється теорема Поста про функціональну повноту?
43. Що таке диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)?
44. Як записати довершену ДНФ (ДДНФ)?
45. Як записати ДДНФ булевої функції за її таблицею істинності?
46. Що таке кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)?
47. Як записати довершену КНФ булевої функції за її таблицею істинності?
48. Що таке предикат?
49. Що таке вибірка?
50. Що таке сполучення, перестановки?
51. Як формулюються правила суми та добутку?
52. Чому дорівнює кількість впорядкованих вибірок з повторенням?
53. Чому дорівнює кількість впорядкованих вибірок без повторення?
54. Чому дорівнює кількість перестановок з *n* елементів?
55. Чому дорівнює кількість невпорядкованих вибірок без повторення?
56. Чому дорівнює кількість невпорядкованих вибірок з повторенням?
57. Як формулюється основна теорема методу включень та виключень?
58. Які графи називаються орієнтованими, неорієнтованими?
59. Як можна задати граф?
60. Що таке петля в графі?
61. Який вигляд має матриця суміжності орієнтованого та неорієнтованого графів?
62. Як будується матриця інцидентності орієнтованого та неорієнтованого графів?
63. Що таке підграф, суграф?
64. Що таке ланцюг, маршрут, цикл графа?
65. Який граф називається ейлеровим, гамільтоновим?
66. Які графи називаються ізоморфними?
67. Як формулюється алгоритм Краскала?

Задача 1. Замість знака «?» поставити знаки $\in, \notin, \supset, =$ і т. і.

№	*Зміст*	№	*Зміст*	№	*Зміст*
1.1	$1?(-2;8),\ 2?[2;18),\ 7?[-11;-7),$ $6?[9;14],\ 2?\{1;3;5\}$	1.11	$\{1\}?(-2;9),\ [-3;0]?(-5;1],\ 0?\{0\}$ $(-4;6)?[-4;6],\ [8;10]?(8;10)$	1.21	$0?(3;7],\ 1?(1;3),\ 3?[3;6),\ 3?\{3\}$ $[-3;1)?[-3;2]$
1.2	$[-4;1)?(-4;1],[1;6)?(1;6),(-4;6)?[-4;6],$ $8?[2,10),\{1;3\}?\{1;2;4;6\}$	1.12	$\{1;3\}?\{1;2;4;6\},[-3;0]?(-5;1],\{1\}?\{1\},$ $[-3;1\}?[-3;2],[8;10]?(8;10)$	1.22	$7?\{7\},\{18\}?[9;20),[2;5)?[1;6),$ $[3;7)?[3;8),\{1\}?[1;6)$
1.3	$\{2\}?(-2;4),(-2;4)?[-2;4],8?[2;18),$ $[-2;0]?(-4;1],\{4\}?\{1;3;5\}$	1.13	$\{2;4\},?\{1;3;5;6\},3?(1;3),[2;6)?[1;7),$ $\{5\}?[1;6),\{7\}?\{7\}$	1.23	$2?(2;8),\{2\}?\{2;8\},\{2\}?\{2\},2?\{2\},$ $[4;5]?(3;6)$
1.4	$(1;3)?(0;4),[2;7]?[1;7],\{1\}?[0;2],$ $\{2;8\}?\{1;2;8;9\},\{0\}?(-1;7)$	1.14	$2?[2;3),\{2\}?[2;3],\{3\}?[2;4),$ $4?(2;4],0?[6;7)$	1.24	$(2;3)?(1;4],1?\{1;3\},2?\{1;3;5;7\},$ $3?[0;3],[4;5)?[4;5]$
1.5	$4?(0;6],\{2\}?[2;4),\{2;3;4\}?[2;5],$ $0?(0;5),[2;3]?(1;5)$	1.15	$3?\{3;4;5\},6?[1;6),2?(1;7),\{2\}?(1;7),$ $\{1;3;5\}?[1;5]$	1.25	$\{1\}?[1;7),0?\{8\},9?\{1;9;17\},$ $[2;3]?(1;4),(2;3]?[2;3]$
1.6	$0?(-2;1),1?(-1;4],1?(-1;1],$ $\{1\}?(-1;1],2?\{0;1;2\}$	1.16	$\{1;2\}?\{0;1;2\},[-3;0]?[-4;1],1?\{1\}$ $(-2;0)?[-2;0],[-2;0)?(-2;0]$	1.26	$2?\{2;12\},3?(3;15),3?[3;8),$ $8?[3;8),\{3;4;5\}?[3;8)$
1.7	$[-3;1)?[-5;2],(7;8)?(6;9),(2,4)?(1;5),$ $[0;1]?[-1;2],4?\{4\}$	1.17	$\{3;4\}?\{1;3;4;5\},[5;6]?[3;6],\{8\}?\{7;8\},$ $5?[0;7],(1;2]?[1;9]$	1.27	$3?(-2;4),\{3\}?(-2;4),\{3;4\}?[-2;4),$ $\{3;4\}?(2;5],0?(3;4)$
1.8	$\{2\}?(-2;3),2?(-2;4),\{2;3\}?(-2;3],$ $\{2;3\}?(1;4],\{5\}?(0;6)$	1.18	$[-7;1]?[-8;2),(6;9)?[6;9],(6;8]?[6;8],$ $(2;3)?[2;3),0?[-2;3)$	1.28	$3?(3;8],\{3\}?[0;3],\{1;2;3\}?[0;3],$ $4?\{1;4;5\},6?[0;7]$
1.9	$(7;8)?[7;8],[0;5]?[0;6),[0;5)?[0;5],$ $0?\{7\},2?\{2\}$	1.19	$1?(0;1),\{1\}?(0;1],\{2;3\}?[2;3],$ $2?\{1;2;3;4\},\{2\}?\{1;2;3;4\}$	1.29	$[-3;0)?[-5;1],(-4;1]?[-4;1],0?\{-4;0\},$ $0?\{4\},4?\{4\}$
1.10	$6?\{6;7\},\{6\}?\{6;7\},-2?[-2;3),$ $\{1;2\}?\{1;2;4\},5?\{5\}$	1.20	$[-3;0]?[-4;1],0?[-4;0],7?\{7\},$ $[-4;0)?[-4;0],0?[2;3)$	1.30	$0?\{0;4\},0?\{5\},5?\{5\},\{2;3\}?\{1;2;3\}$ $4?[0;6]$

Задача 2. Видаливши з множин *A*, *B*, *C* і *D* вказані елементи, записати множини, одержані після виконання операцій над множинами, вказаними у задачі.

Вважаємо, що:

U = A ⋃ B ⋃ C ⋃ D,

A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 },

B = { 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13},

C = { 11, 12, 13, 14, 15, 16 },

D = { 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16 }.

№	A	B	C	D	Операції
2.1	3,6	11, 12, 13	12, 16	3, 15	$\bar{A}\cup B, A\setminus\left(\bar{B}\cap D\right), \overline{\bar{A}\cup C}$
2.2	3, 4	4, 5, 11	14, 16	15,16	$\overline{B\cup A}, A\cup\left(D\setminus\bar{C}\right), \overline{A\cup\bar{C}}$
2.3	6, 7	10, 11, 12	11, 12, 16	2, 3, 15	$\overline{\bar{B}\cap D}, \bar{B}\setminus\left(B\cap D\right), A\cup\left(A\cap C\right)$
2.4	7, 8	10, 11, 12	14, 15	2, 3, 14, 15	$\overline{\bar{A}\setminus\bar{D}}, \bar{A}\setminus(B\setminus D), A\cup\left(\bar{A}\cup B\right)$
2.5	1, 8	7, 13	12, 13	3, 4, 14	$\bar{A}\cap B, A\cup(B\cap\bar{C}), (A\cap\bar{D})\cup(B\cap C)$
2.6	2, 5	4, 6	14, 15, 16	4, 14	$A\cup B, A\setminus(B\cap C), (\bar{A}\cap D)\cup(\bar{B}\cap C)$
2.7	2, 7	4, 8	11, 12, 13	2, 16	$\bar{A}\cup B, A\setminus(\bar{B}\cap C), (A\cap\bar{D})\cup(\bar{A}\cap C)$
2.8	2, 8	4, 9	14, 16	3, 15	$A\cup\bar{B}, A\setminus(B\setminus C), (B\cap\bar{C})\cap(C\cap\bar{D})$
2.9	4, 5	4, 10	11, 12	4, 14	$\bar{A}\cup\bar{B}, \bar{A}\setminus(B\setminus C), (A\cap\bar{B})\cup(C\cap\bar{D})$
2.10	4, 7	4, 11	13, 14	14, 15	$A\cap\bar{C}, A\setminus(\overline{B\cup C}), (A\cap B)\cup(\bar{B}\cap\bar{D})$
2.11	4, 8	4, 12	14, 15, 16	14, 16	$\bar{A}\cap C, \bar{A}\cup(\overline{B\setminus C}), (B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{D})$
2.12	5, 6	1, 13	11, 12, 13	1, 2, 4	$A\cup C, A\setminus\left(\bar{B}\cap C\right), \left(\bar{B}\cap C\right)\cup\left(D\cap A\right)$
2.13	5, 7	5, 6, 7	14, 15,16	1, 4, 14	$A\cup C, D\cup\left(\bar{C}\setminus B\right), \left(B\cap\bar{C}\right)\cup\left(C\cap\bar{B}\right)$
2.14	5, 8	4, 5, 6,7	12, 13	2, 4, 15	$\bar{B}\cap C, D\cup\left(A\setminus\bar{B}\right), \overline{\left(A\cap B\right)}\cup\left(\bar{C}\cap D\right)$
2.15	6, 8	4, 5, 6, 7, 8	15, 16	3, 14, 16	$B\cap\bar{C}, B\cup\left(\bar{C}\setminus D\right), \left(A\setminus B\right)\cup\left(\bar{C}\cap D\right)$
2.16	7, 8	5, 6, 9	13, 14	2, 14	$\bar{B}\cap C, B\cup\left(\bar{A}\setminus D\right), \left(\bar{B}\setminus A\right)\cup\left(C\cap D\right)$
2.17	1, 3	10, 11	14, 15	2, 3, 4	$\bar{B}\cap\bar{C}, A\cup\left(\bar{B}\setminus C\right), \overline{\left(B\setminus A\right)}\cup\left(\bar{C}\cap D\right)$
2.18	2, 5	10, 11, 12	11, 12	14, 15	$A\cap\bar{D}, \bar{A}\cup\overline{\left(B\cap D\right)}, \left(C\setminus\bar{A}\right)\cup\left(D\cap B\right)$
2.19	3, 6	11, 12, 13	12, 16	3, 15	$\bar{A}\cap D, C\cap\left(\bar{B}\setminus A\right), \left(C\cap\bar{A}\right)\cap\left(D\cup\bar{B}\right)$

Продовження задачі 2

№	A	B	C	D	Операції
2.20	4, 7	6, 11	11, 15	1, 2, 4	$\overline{A}\cap\overline{D}, C\cap\left(B\setminus\overline{A}\right), \left(C\setminus\overline{A}\right)\cup\left(\overline{D}\cup A\right)$
2.21	5, 8	7, 12	13, 16	2, 3, 4	$\overline{A}\cup D, D\setminus\left(A\setminus\overline{B}\right), (A\setminus C)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$
2.22	1, 2	5, 11, 12	13, 15	14, 15, 16	$\overline{A}\cup\overline{D}, D\setminus\left(\overline{C}\setminus\overline{D}\right), (B\setminus D)\cup(D\setminus B)$
2.23	3, 4	4, 5, 11	14, 16	15, 16	$B\cap D, \overline{D}\cup\left(B\cup\overline{C}\right), (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
2.24	2, 6	4, 12	12, 15	14,15,16	$\overline{B}\cap D, D\cup(B\setminus C), (A\setminus B)\cap\left(\overline{B}\setminus A\right)$
2.25	3, 6	10, 11	12, 16	1, 2, 3, 4	$B\cap\overline{D}, A\setminus\left(B\cup\overline{D}\right), \left(\overline{A}\setminus C\right)\cap\left(\overline{C}\setminus A\right)$
2.26	5, 6	8, 10	11, 15	4, 14	$B\cup D, \left(A\setminus\overline{B}\right)\cap\overline{C}, (C\setminus A)\cup\overline{B}$
2.27	5, 7	9, 10, 12	11, 16	3, 4, 14	$B\cup\overline{D}, \overline{A}\setminus C\setminus D, \left(D\setminus\overline{B}\right)\cap C$
2.28	6, 7	10, 11, 12	11, 12, 16	2, 3, 15	$\overline{B\cup\overline{D}}, C\setminus\overline{A}\setminus\overline{D}, \left(\overline{C}\setminus B\right)\cap D$
2.29	2, 8	11, 12, 13	11, 12, 13	1, 2, 3, 14	$C\cap D, C\cup\left(\overline{A}\setminus D\right), \left(A\cup\overline{B}\right)\setminus C$
2.30	7, 8	10, 11, 12	14, 15	2, 3,14, 16	$\overline{A}\cap\overline{D}, \left(\overline{C}\setminus D\right)\cap A, \left(\overline{A}\cup B\right)\setminus C$

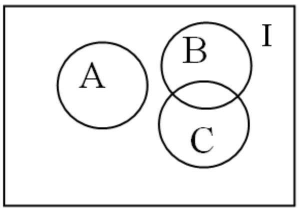
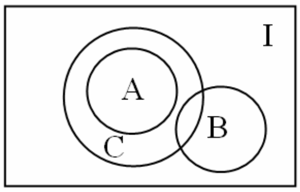
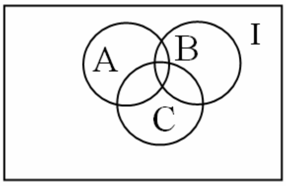
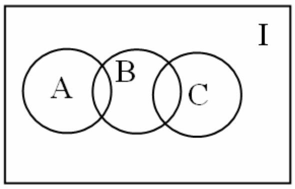
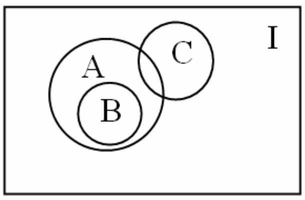
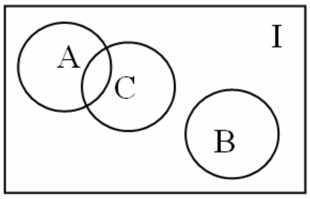
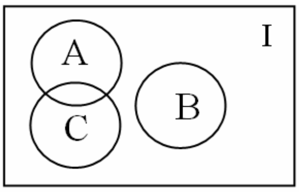
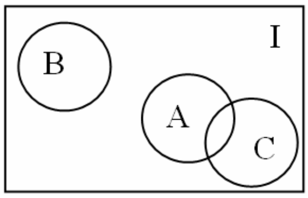
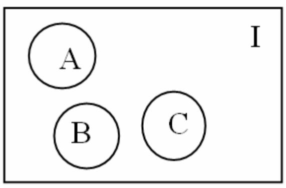
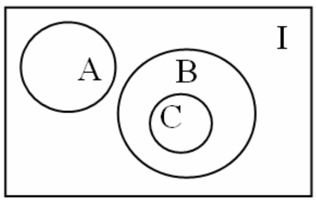
Задача 3. Спростити вираз.

№	Вираз		№	Вираз
3.1	$\left(\overline{A}\cap B\right)\cup(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$		3.16	$\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup A\right)$
3.2	$\overline{\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}$		3.17	$\left(\overline{A}\cup B\right)\cap A$
3.3	$\left(A\cup\overline{B}\right)\cup\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cup C$		3.18	$\overline{A\setminus B}\cup\overline{B\setminus C}\cup\overline{C\setminus A}$
3.4	$\overline{(A\setminus B)\cap B}$		3.19	$\overline{A\cap B\cap C}\cup(A\cup B\cap C)$
3.5	$\overline{A}\cap B\cap\left(\overline{B}\cup A\right)$		3.20	$\overline{((B\cup A)\Delta(A\cap B))\cup B}$
3.6	$\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]\cap\overline{A}$		3.21	$B\setminus(B\setminus A)$
3.7	$\left(\overline{A}\cup B\right)\cap A\cap\overline{B}$		3.22	$(A\cap B)\cap\left(A\cap\overline{B}\right)$
3.8	$(A\setminus B)\cup(A\cap C)\cup\left(B\cap\overline{C}\right)$		3.23	$(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$
3.9	$[(A\oplus B)\setminus A]\cup(A\cap B)$		3.24	$(A\cap X)\cap\left(X\cup\overline{X}\right)$
3.10	$(B\setminus A)\cap\left(\overline{B}\cup A\right)\cap C$		3.25	$\left((A\Delta B)\cup\overline{A\cup(B\setminus A)}\right)\setminus\overline{A}$
3.11	$A\cup(A\oplus C)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)$		3.26	$\varnothing\cap(A\cup M)$
3.12	$[A\setminus(B\cup C)]\cap B\cap C$		3.27	$\overline{\left((A\cap(A\Delta B))\cup(A\setminus B)\right)}\cap(A\cap B)$

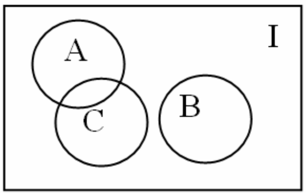
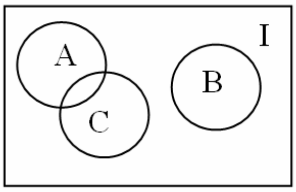
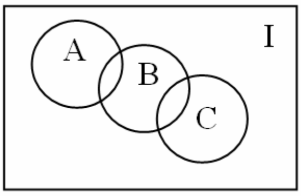
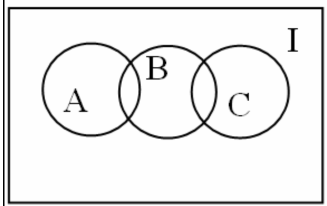
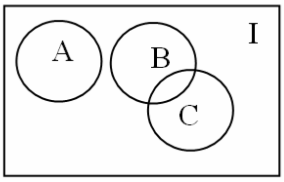
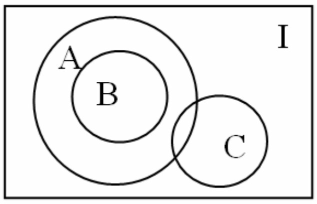
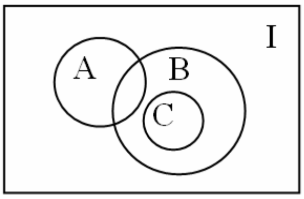
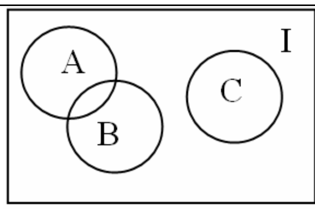
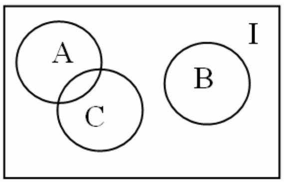
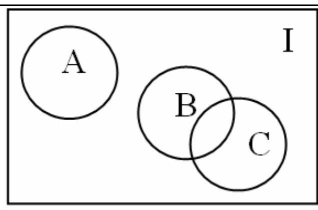
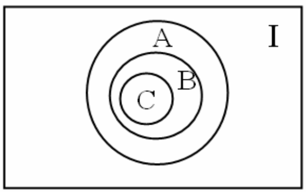
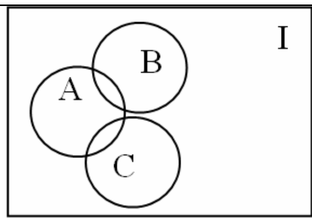
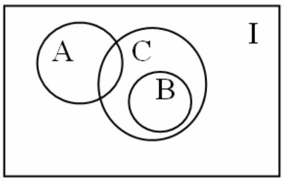
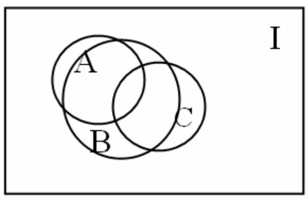
Продовження задачі 3

№	Вираз		№	Вираз
3.13	$\overline{\overline{C} \cap B \cap [C \setminus (A \cup B)]}$		3.28	$\left((A \Delta B) \cap \overline{A \cup (B \setminus A)}\right) \setminus \overline{A}$
3.14	$A \cup (B \setminus A) \cup \overline{B}$		3.29	$\overline{\left((A \cap (A \Delta B)) \cup (A \setminus B)\right) \cup (A \cap B)}$
3.15	$A \cap (A \oplus C) \cup (A \cap C)$		3.30	$\overline{\left((A \cap (A \Delta B)) \cup (A \setminus B)\right)} \cup (A \cap B)$

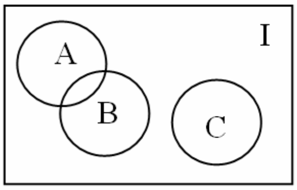
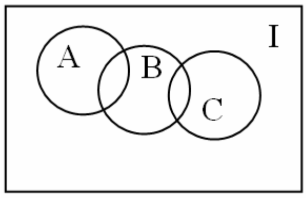
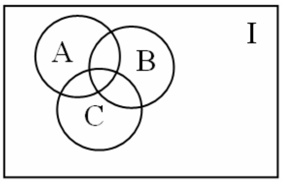
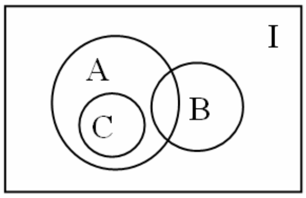
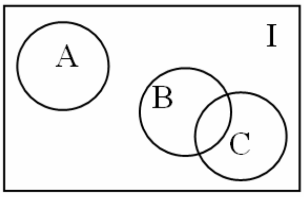
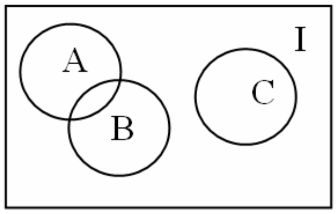
Задача 4. Виконати операції над трьома множинами та закреслити результат на діаграмі Ейлера – Венна.

№	Умова		№	Умова	
4.1		$(A \setminus \overline{B}) \cap \overline{C}$	4.16		$(A \oplus C) \cap \overline{B}$
4.2		$(A \oplus \overline{B}) \cup \overline{C}$	4.17		$(A \oplus C) \cap \overline{B}$
4.3		$\overline{A \cup B} \cap C$	4.18		$A \cup \overline{B} \cap C$
4.4		$A \cup \overline{B} \cap C$	4.19		$(B \oplus C) \cup \overline{A}$
4.5		$(\overline{A} \oplus B) \cap C$	4.20		$(B \cap \overline{C}) \setminus \overline{A}$

Продовження задачі 4

№	Умова		№	Умова	
4.6		$\overline{A\cup\overline{B}}\cap\overline{C}$	4.21		$(A\setminus C)\cap\overline{B}$
4.7		$\overline{A\cup B}\cap C$	4.22		$(A\oplus C)\cup B$
4.8		$\overline{A}\cap(B\oplus\overline{C})$	4.23		$\overline{C}\setminus(A\cap\overline{B})$
4.9		$A\cap\overline{C}\cup\overline{B}$	4.24		$(A\cup B)\setminus\overline{C}$
4.10		$(\overline{A}\oplus C)\cap\overline{B}$	4.25		$\overline{A}\setminus(B\setminus C)$
4.11		$A\cup B\cap\overline{C}$	4.26		$A\cup B\cap\overline{C}$
4.12		$(A\oplus\overline{C})\cup B$	4.27		$(A\cap\overline{B})\cap C$

Закінчення задачі 4

№	Умова	№	Умова
4.13	 $(A\setminus B)\cap\overline{C}$	4.28	 $(A\oplus B)\cap\overline{C}$
4.14	 $(\overline{A}\oplus B)\cup C$	4.29	 $(\overline{A}\cap B)\cup\overline{C}$
4.15	 $A\setminus(\overline{B}\oplus\overline{C})$	4.30	 $\overline{B}\cap A\cup\overline{C}$

Задача 5. Довести тотожність.

№	Тотожність	№	Тотожність
5.1	$(A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup$ $\cup(C\cap X)=C$	5.14	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C.$
5.2	$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C})=I$	5.15	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C).$
5.3	$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$	5.16	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C.$
5.4	$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$	5.17	$A\cap(B\setminus A)\cup B=B.$
5.5	$(A\cap B\cap X)\cup(A\cap B\cap C\cap X\cap Y)\cup$ $\cup(A\cap X\cap\overline{A})=A\cap B\cap X$	5.18	$(\overline{A}\cup B)\cap A\cup\overline{B}=A\cup\overline{B}$
5.6	$(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cup B$	5.19	$\left[\overline{C\cup(B\cap\overline{C})}\right]=\overline{B}\cap\overline{C}$
5.7	$\left[(A\cup\overline{B})\cup(\overline{A}\cup B)\right]\cap B=B$	5.20	$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup\overline{B}=I$
5.8	$A\cup B\cup C\cup\overline{(A\cap B\cap C)}=I$	5.21	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$
5.9	$C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$	5.22	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$
5.10	$C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$	5.23	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$
5.11	$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$	5.24	$(A\cap\overline{A\cap B})\cup B=A\cup B$
5.12	$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$	5.25	$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

5.13	$\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\right)\cup$ $\cup\left(A\cap B\cap C\right)=A\cup B\cup C$	5.26	$A\subseteq B\Rightarrow(A\setminus C)\subseteq(B\setminus C)$

Довести еквівалентність тверджень *а*) і *б*):

5.27	*а*) $(A\bigcup B)\subseteq C$, *б*) $A\subseteq C$ і $B\subseteq C$.	5.29	*а*) $A\bigcap B\subseteq C$, *б*) $A\subseteq\overline{B}\bigcup C$.
5.28	*а*) $A\subseteq B\bigcap C$, *б*) $A\subseteq B$ і $A\subseteq C$.	5.30	*а*) $A\subseteq B\bigcup C$, *б*) $A\bigcap\overline{B}\subseteq C$.

Задача 6. Розв’язати задачу, використовуючи поняття потужності множини й формулу включення й виключення.

6.1. Серед 100 олімпійців 70 спортсменів завоювали ”золото”, 45 – ”срібло” й 23 – і ”срібло” й ”золото”. Скільки спортсменів не завоювали ні однієї медалі?

6.2. У цеху 25 станків, які можуть виконувати три види операцій: А, В, С. З них 10 станків виконують операцію А, 15 – операцію В, 12 – С. Операції А і В можна виконати на 8 станках, А і С – на 5, В і С – на 3 станках. Скільки станків можуть виконувати всі три операції?

6.3. У класі 20 дітей. З них 10 додатково займаються в музичній школі, 6 – займаються тенісом, 5 – китайською мовою. Музичну школу та заняття тенісом відвідують 3 дитини, музикою та китайською мовою займаються 3 дитини, тенісом та китайською мовою займаються дві. Всіма трьома видами додаткових занять займається одна дитина. Скільки дітей не займається жодним з перерахованих видів занять?

6.4. У буфеті студенти купують або одну чашку кави або одну шоколадку, або каву із шоколадкою. В один із днів було продано 57 чашок кави й 36 шоколадок. Скільки було покупців, якщо 12 студентів купили по одній каві із шоколадкою?

6.5. У студентській групі 25 чоловік. Для отримання допуску на екзамен з дисципліни необхідно захистити курсову роботу, виконати лабораторну роботу та здати залік. Захистили курсову роботу 15 студентів, 20 виконали лабораторну роботу, 17 здали залік. Захистили курсову роботу і здали залік 13 чоловік, захистили курсову роботу і виконали лабораторну роботу 12 чоловік, виконали лабораторну роботу 12 чоловік і здали залік 16 чоловік. Скільки чоловік допущено до екзамену?

6.6. На курси з іноземних мов записалось 100 чоловік. З'ясувалось, що 70 чоловік будуть вивчати англійську, 60 – французьку, 30 – німецьку мови. Англійську та французьку обрали 40 чоловік, англійську і німецьку – 20, французьку і німецьку – 10. Скільки чоловік будуть вивчати всі три мови?

6.7. У студентській групі 65 % хлопців уміють грати у футбол, 70 % – у волейбол й 75 % – у баскетбол. Яка найменша кількість хлопців, які уміють грати й у футбол, і у волейбол, і баскетбол?

6.8. До книжкового кіоску завезли для продажу 100 книжок Пушкіна, Лермонтова та Тургенєва. Книжки Пушкіна купили 60 чоловік, Лермонтова – 50, Тургенєва – 30 чоловік. Книги Пушкіна та Лермонтова купили 40 чоловік, Пушкіна і Тургенєва – 20, Лермонтова і Тургенєва – 10 чоловік. П'ять чоловік купили книжки всіх трьох авторів. Скільки чоловік не купили жодної книги?

6.9. Аналіз історій хвороб групи з 20 дітей показав, що 10 дітей хворіли вітрянкою, 6 – корем, 5 – свинкою. Вітрянкою та корем хворіли 3, корем та свинкою – 2, вітрянкою та свинкою – 3. Всіма хворобами перехворіла одна дитина. Скільки дітей не хворіли жодною з цих хвороб?

6.10. Протягом тижня в кінотеатрі показували фільми А, В і С. З 40 студентів, кожний з яких бачив або всі три фільми або один із трьох, фільм А бачили 13, фільм В – 16, фільм С – 19. Знайти кількість студентів, які переглянули всі три фільми.

6.11. Група наукових співробітників складається із 100 чоловік. З них 70 чоловік володіє англійською, 50 – німецькою, 40 – французькою, 30 – англійською і німецькою, 25 – англійською та французькою, 15 – французькою і німецькою. Хоча б одну мову знає кожен науковець. Скільки чоловік володіють всіма трьома мовами?

6.12. У групі 40 студентів. З них уміють плавати 30, 27 – грати в шахи й тільки п'ятеро не вміють ні того, ні іншого. Скільки студентів уміють плавати й грати в шахи?

6.13. З'ясувалось, що в групі туристів 15 чоловік були раніше у Франції, 19 – в Італії, 8 – у Німеччині, 9 туристів були у Франції та Італії, 7 – у Франції та Німеччині, 6 – і в Італії, і в Німеччині, 4 туристи були у всіх трьох країнах. Скільки туристів були хоча б в одній з трьох країн?

6.14. Групі студентів з 30 чоловік була запропонована контрольна робота з трьох задач. Першу задачу розв'язали 15 студентів, другу – 13, третю – 12. Першу і другу задачі рішили 7 чоловік, першу і третю – 6, другу і третю – 5 чоловік. Всі три задачі розв'язали 2 студенти. Скільки студентів з групи не розв'язали жодної задачі?

6.15. Підприємство оголосило набір робітників на посади токаря, слюсаря та зварювальника. До відділу кадрів звернулося 25 чоловік. З них 10 чоловік володіли професією токаря, 15 – слюсаря, 12 – зварювальника. Професією токаря та слюсаря володіли 6 чоловік, токаря та зварювальника – 5 чоловік, слюсаря та зварювальника – 3 чоловіки. Скільки чоловік володіють всіма трьома професіями?

6.16. На іспиті викладач вирішив довідатися, хто з 40 студентів читав книги А, В і С. Результати опитування такі: А читали 25 студентів, В – 29, С – 22. Книгу А або В читали 33 студента, А або С – 32 студента, В або С – 31, а всі три книги прочитали 10 студентів. Скільки студентів прочитали по одній книзі? Скільки студентів не читали ні однієї книги?

6.17. У туристичній групі 10 чоловік знають англійську мову, 10 – італійську, 6 - іспанську. По дві мови знають: 6 чоловік – англійську та італійську, 4 – англійську та іспанську, 3 – італійську та іспанську. Один турист знає всі три мови. Скільки туристів в групі?

6.18. Кожний зі студентів групи на канікулах двічі побував у кіно, при цьому фільми А, В і С бачили одночасно 25, 12 й 23 чоловік. Скільки студентів у групі? Скільки з них бачили фільми А і В, А і С, В і С?

6.19. На день авіації на літовищі всіх бажаючих катали на літаку, планері, дельтаплані. На літаку каталися 30 чоловік, на планері – 20, на дельтаплані – 15. На літаку і планері катались 10 чоловік, на літаку і дельтаплані – 12, на планері і дельтаплані – 5. Два чоловіки катались і на літаку, і на планері, і на дельтаплані. Скільки було бажаючих прокотитись?

6.20. Всі грибники повернулися додому з повними кошиками. У десятьох з них у кошиках були білі гриби, у 18 – підберезовики, у 12 – лисички. Білі та підберезовики були в шістьох кошиках, білі і лисички – в чотирьох, підберезовики та лисички – в п’яти. Всі три види грибів були у двох грибників. Скільки було грибників?

6.21. У групі студентів на перерві готові з'їсти шматочок сиру 70 %, 60 % – готові з'їсти шматочок ковбаси, а 80 % – шоколадку. Скільки як мінімум чоловік готові з'їсти ” бутерброд ” з ковбаси й сиру із шоколадною плиткою?

6.22. Були опитані 70 чоловік. З’ясувалось, що 45 чоловік знають англійську мову, 29 – німецьку, 9 – обидві мови. Скільки чоловік з опитаних не знає ні англійської, ні німецької мов?

6.23. На іспиті 28 студентів розв’язували три задачі. Результати такі: 1-шу задачу вирішили 20 студентів, 2-гу – 15 студентів, 3-тю – 17 студентів. 1-шу або 2-гу – 23 студента, 1-шу або 3-тю – 21 студент, 2-гу або 3-тю – 18 студентів, а всі три задачі розв’язали 6 студентів. Скільки студентів вирішили по одній задачі?

6.24. З 10 учасників ансамблю шестеро уміють грати на гітарі, п’ятеро – на ударних інструментах, п’ятеро – на духових. Двома інструментами володіють: гітарою і ударними – троє, ударними та духовими – двоє, гітарою та духовими – четверо. Один учасник грає на всіх інструментах. Інші учасники ансамблю тільки співають. Скільки співаків у ансамблі?

6.25. Групі студентів запропоновано три спецкурси: з мультимедіа, штучного інтелекту та імітаційного моделювання. На спецкурс з мультимедіа записались 22 студенти, 18 – на спецкурс зі штучного інтелекту, 10 – на спецкурс з імітаційного моделювання, 8 – на спецкурси з мультимедіа та штучного інтелекту, 15 – на спецкурси з мультімедіа та імітаційного моделювання, 7 – на спецкурси зі штучного інтелекту та імітаційного моделювання, 5 – записались на всі три спецкурси. Скільки студентів в групі?

6.26. Усім учасникам автоперегонів не поталанило. З них 12 загрузли у піску – прийшлось штовхати машину, у шістьох перегрівся двигун, восьми знадобилась заміна колеса, п'ятеро і штовхали машину і міняли колесо, четверо – штовхали машину та охолоджували двигун, троє міняли колесо та охолоджували двигун. Одному прийшлось зіткнутись з усіма видами неполадок. Скільки було учасників автоперегонів?

6.27. У спортивному таборі 100 спортсменів, які займаються плаванням, легкою атлетикою та лижами. З них 10 займаються всіма видами спорту, 18 – плаванням та легкою атлетикою, 15 – плаванням та лижами, 21 – легкою атлетикою та лижами. Число спортсменів, що займаються плаванням, дорівнює числу легкоатлетів, дорівнює числу лижників. Знайти це число.

6.28. Опитування групи студентів показало, що 70 % із них люблять ходити в кіно, 60 % – в театр, 30 % – на концерти. В кіно і театр ходять 40 % студентів, в кіно і на концерти – 20 %, в театр і на концерти – 10 %. Скільки студентів (%) ходять в кіно, театр і на концерти?

6.29. На кафедрі лінгвістики працюють 13 чоловік, кожний з яких знає хоча б одну іноземну мову. Десять чоловік знає англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку. 5 чоловік знає англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік знає всі три мови, тільки дві мови, тільки англійську мову?

6.30. В одній студентській групі 10 чоловік може працювати на DELPHI, 10 – на PASCAL, 6 – на C++. По дві мови програмування знають: 6 чоловік – DELPHI і PASCAL, 4 – PASCAL і C++, 3 – DELPHI та C++. Один чоловік знає всі три мови. Скільки студентів у групі?

Задача 7. Дано дві множини M та N. Записати M×N, M×M, N×N, N×M.

№	Множини	№	Множини
7.1	M={1; 3; 7; 22};N={$\alpha,\beta,\gamma,\delta,r$}	7.16	M={7; 9; 15}; N={π; e; ε; δ}
7.2	M={*a; b; c*}; N={*m; n; p; q*}	7.17	M={100; 200; 300}; N={*a*; *b; c;.d*}
7.3	M={–1; 2; 4; 7}; N={3; 5}	7.18	M={*r; s; p; q*}; N={1; 7; 13}
7.4	M={3; 5; 8}; N={ℓ; *m; n; p*}	7.19	M={2; 6; 13; 18}; N={*a; b; c*}
7.5	M={*x; y; z; w*}; N={1; 3; 7}	7.20	M={1; 4; 10; 11}; N={0; 2; 3}
7.6	M={0; π; e}; N={p; q; r; s}	7.21	M={3; 7; 9; 11}; N={0; 10; 20}
7.7	M={1; 2; 3}; N={m; n; p}	7.22	M={–1; 0; 1}; N={k; e; m; n}
7.8	M={3; 7; 11; 34}; N={*a*; b; c; d}	7.23	M={*a*; b; c; d}; N={p; q; r}
7.9	M={0,5; 2; 3; 3,3}; N={k; r; ℓ}	7.24	M={$\alpha;\beta;\gamma;\delta$}; N={–2; 1; 2}
7.10	M={17; 18; 19; 20}; N={7; 8;9}	7.25	M={1; 3; 8}; N={2; 4; 6; 7}
7.11	M={14; 22; 100}; N={s; m; n; p}	7.26	M={5; 6; 13; 17}; N={$\alpha;\beta;\gamma$}
7.12	M={3; 5; 7}; N={p; q; r}	7.27	M={1; 2; 3; 4}; N={k; p; r}
7.13	M={ℓ; m; p; n}; N={1; 7; 12}	7.28	M={a_1; a_2; a_3; a_4}; N={–2; 0; 2}
7.14	M={$\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}$}; N={4; 3; 2}	7.29	M={3; 4; 9; 11}; N={2; 5; 6}
7.15	M={r; s; t; f}; N={1; 4; 7}	7.30	M={b; d; f; k}; N={7; 10; 13}

Задача 8. На множині *A* задане відношення R_1, R_2. Записати R_1 та R_2, перерахуванням пар, графами. Визначити: які мають властивості R_1 та R_2, до яких видів відносяться. Виконати операції $R_1 \oplus R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \circ R_2$ та подати у вигляді графів та перерахування пар.

№	Умова	№	Умова
8.1	*A*={2; 3; 6 ; 8; 27} R_1 – «бути дільником», R_2 – «бути рівним».	8.16	*A*={–3; –1; 1; 2; 3} R_1 – «бути рівним за модулем», R_2 –«бути більше на 4 одиниці».
8.2	A={ 21; 22; 23; 27; 28} R_1 – «бути менше на одиницю», R_2 – «бути порівняними за модулем 2».	8.17	*A*={0,5; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3; $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$} R_1 – «мати однакову цілу частину», R_2 – «менше».
8.3	*A*={3; 4; 6; 7; 8} R_1 – «бути більше вдвічі», R_2 – «бути більше чи рівним».	8.18	*A*={4; 6; 9; 11; 12} R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «менше чи дорівнює».
8.4	*A*={1,1; $\sqrt{2}$; 2; e; $\sqrt{6}$}: e ≈ 2,718 R_1 – «мати однакову цілу частину», R_2 – «більше чи дорівнює».	8.19	*A*={1; 3; 4; 6; 7} R_1 – «бути менше», R_2 – «бути дільником».

Продовження задачі 8

№	Умова	№	Умова
8.5	A={2; 6; 18; 54} R_1 – «бути втричі менше», R_2 – «бути більше або рівним».	8.20	A={1; 2; 5; 7; 8} R_1 – «бути більше на одиницю», R_2 – «бути порівняними за модулем 2».
8.6	A={1; 3; 4; 6; 7; 9} R_1 – «мати однаковий залишок при діленні на 3», R_2 – «більше».	8.21	A={3; 5; 8; 100; 113} R_1 – «бути порівняними за модулем 5», R_2 – «менше чи дорівнює».
8.7	A={–2; 0; 1; 8; 9} R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «більше».	8.22	A={2; 5; 6; 10; 20} R_1 – «ділитись без залишку на», R_2 – «менше».
8.8	A={4; 9; 10; 12; 18; 19} R_1 – «бути порівняними за модулем», R_2 – «бути кратним».	8.23	A={–2; –1; 0; 0,5; 1; 2} R_1 – «бути рівним за модулем», R_2 – «бути більше».
8.9	A={4; 5; 6; 10; 12; 15} R_1 – «бути дільником», R_2 –«менше чи дорівнює».	8.24	A={4; 6; 8; 12; 14; 16} R_1 – «бути менше в два рази », R_2 – «бути порівняними за модулем 4».
8.10	A={1; 4; 7; 12; 15; 18} R_1 – «бути більше на 3 одиниці», R_2 – «бути менше на 6 одиниць».	8.25	A={ $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$ } R_1– «мати однакову цілу частину», R_2 – «більше чи дорівнює».
8.11	A={1; $\sqrt{12}$; 4; $8\sqrt{3}$; 16} R_1 – «бути більше в 4 рази», R_2 – «бути більше».	8.26	A={3; 5; 6; 8; 11; 12} R_1 – «бути порівняними за модулем 3», R_2 – «більше чи дорівнює».
8.12	A={2; 5; 6; 8; 9} R_1 – «не дорівнює », R_2 – «менше на 3 одиниці».	8.27	A={2; 3; 4; 6; 9} R_1 – «бути дільником», R_2 – «менше чи дорівнює».
8.13	A={1; 2,1; 2,7; 3,3; 4; $\sqrt{17}$ } R_1 – «мати однакову цілу частину», R_2 – «менше чи дорівнює».	8.28	A={4; 6; 8; 12; 14; 16} R_1 – «бути вдвічі більше», R_2 – «бути порівняними за модулем 4».
8.14	A={–2; 2; 3; 6; 12} R_1 – «бути більше на 4», R_2 – «бути вдвічі менше».	8.29	A={0; 3; 4; 6; 12} R_1 – «бути порівняними за модулем 3 », R_2 – «бути дільником».
8.15	A={2; 5; 7; 11; 15} R_1 – «бути рівним», R_2 – «бути більше».	8.30	A={3; π, 5; 6; 9; 10} R_1 – «ділиться без залишку на», R_2 – «менше чи дорівнює».

Задача 9. Задана функція. Чи являється ця функція сюр'єктивною, ін'єктивною, бієктивною? Пояснити чому.

№	Функція	№	Функція
9.1.	$f(x)=x^2+e^x, \quad R\to R$	9.16.	$f(x)=x^2+e^{-x}, \quad R\to R$
9.2.	$f(x)=x+e^x, \quad R\to R$	9.17.	$f(x)=x+e^{-x}, \quad R\to R$
9.3.	$f(x)=x^3+e^x, \quad R\to R$	9.18.	$f(x)=x^2+\sqrt{x}, \quad R\to R$
9.4.	$f(x)=x+\sqrt{x}, \quad R\to R$	9.19.	$f(x)=\sin x+\sqrt{x}, \quad R\to R$
9.5.	$f(x)=\ln x+\sqrt{x}, \quad R^+\to R$	9.20.	$f(x)=x^2+\ln x, \quad R\to R$
9.6.	$f(x)=x+\dfrac{1}{x}, \quad R\to R$	9.21.	$f(x)=3\sin\dfrac{\pi x}{2}, \ [0,1]\to[0,3]$
9.7	$f(x)=x^2+2^x, \quad R\to R$	9.22.	$f(x)=x^3\cdot e^x, \quad R\to R$
9.8	$f(x)=e^x+\sqrt{x}, \quad R^+\to R$	9.23.	$f(x)=2x+\ln x, \quad R\to R$
9.9.	$f(x)=3^x, \ [0,1]\to[0,3]$	9.24.	$f(x)=\sin x, \quad R\to R$
9.10.	$f(x)=tgx, \quad R\to R$	9.25.	$f(x)=x^2+x^3, \quad R\to R$
9.11.	$f(x)=e^x, \quad R\to R$	9.26.	$f(x)=arctgx, \quad R\to R$
9.12.	$f(x)=x^3, \quad R\to R$	9.27.	$f(x)=\ln(1+\lvert x\rvert), \quad R\to R$
9.13.	$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3), R\to R$	9.28.	$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}, \quad R\to R$
9.14.	$f(x)=2^x+\sqrt{x}, \quad R^+\to R$	9.29.	$f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}, \quad R\to R$
9.15.	$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}, \quad R\to R$	9.30.	$f(x)=12(x-\dfrac{1}{2})^2, \ [0,1]\to[0,3]$

Задача 10. Застосовуючи закони математичної логіки та властивості операцій, спростити вираз.

№	Вираз	№	Вираз
10.1	$(x_1\sim x_2)\to((x_1\wedge x_3)\vee x_2)$	10.16	$x\leftrightarrow y\oplus z\vee\overline{y}$
10.2	$((x_3\oplus\overline{x}_1)\wedge x_2)\to(x_1\vee x_3)$	10.17	$x\vee y\wedge\overline{z}\oplus y$
10.3	$((x_2\to x_3)\wedge x_1)\sim((x_1\vee x_3)\oplus x_2)$	10.18	$(x\oplus y)\wedge z\vee\overline{x}$
10.4	$x\oplus y\wedge z\to\overline{x}\vee\overline{z}$	10.19	$(x\to\overline{y})\oplus(z\vee y)$
10.5	$x\vee\overline{y\to z}\oplus y$	10.20	$(x\mid y)\wedge z\vee\overline{x}$
10.6	$\overline{(x_3\vee x_1)\sim(x_2\mid x_1)}$	10.21	$(x\to y)\oplus z\leftrightarrow\overline{y}$
10.7	$(x\downarrow y)\vee\overline{x\to z}$	10.22	$(x\downarrow y)\leftrightarrow z\oplus y$
10.8	$(x\vee y\to\overline{z})\oplus y$	10.23	$x\wedge\overline{y\to z}\leftrightarrow\overline{y}\oplus z$

Продовження задачі 10

№	Вираз	№	Вираз
10.9	$\left(x \downarrow y\right) \oplus z \vee \overline{x}$	10.24	$y \oplus z \leftrightarrow z \wedge x \vee x$
10.10	$\left(x \oplus y\right) \oplus \left(z \vee \overline{x}\right)$	10.25	$\overline{x \rightarrow y} \wedge \left(x \vee \overline{y} \oplus z\right)$
10.11	$\left(x \mid y\right) \oplus \left(y \rightarrow z \wedge \overline{x}\right)$	10.26	$\overline{x \rightarrow y} \vee \overline{y} \oplus z$
10.12	$\left(x \wedge y \rightarrow z\right) \vee x \oplus y$	10.27	$\left(x \vee y\right) \oplus z \rightarrow y$
10.13	$\left(x \rightarrow y\right) \wedge \left(y \rightarrow x\right)$	10.28	$x \wedge \left(y \sim x\right) \wedge \left(\overline{x} \vee z\right)$
10.14	$\overline{(x_1 \vee \overline{x_2}) \rightarrow (x_3 \oplus \overline{x_1})}$	10.29	$\left(x \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{y}\right) \wedge \left(z \rightarrow y\right)$
10.15	$\left(x \wedge y \sim z\right) \wedge x \wedge \overline{z}$	10.30	$\left(\overline{x} \wedge y\right) \rightarrow \left(z \wedge x\right)$

Задача 11. Записати логічну функцію *f(x*$_1$*, x*$_2$*, x*$_3$*)* в диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ). Підставляючи набори логічних змінних, знайти значення логічної функції. Знайти ДДНФ.

11.1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge \left(\overline{x}_1 \wedge \overline{\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3}\right).$

11.2. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1 \vee \overline{x}_3} \vee \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}}.$

11.3. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}}.$

11.4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \overline{\overline{x_1 \wedge \overline{x}_2} \vee \overline{x}_3}.$

11.5. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \wedge \overline{x}_2} \wedge x_3.$

11.6. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \wedge \left(\overline{\overline{\overline{x}_3 \wedge x_1} \wedge \overline{x_2 \wedge \overline{x}_1}}\right).$

11.7. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_3 \vee \overline{x_1 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3}}.$

11.8. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x}_2 \vee \overline{\overline{x}_1 \vee x_3}}.$

11.9. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} \vee x_2 \wedge \overline{x}_3.$

11.10. $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee x_2\right) \wedge \overline{x_1 \wedge x_3} \wedge x_2.$

11.11. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee x_3 \wedge \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3}.$

11.12. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge x_2}.$

11.13. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \wedge \overline{\overline{x}_3 \wedge (x_2 \vee x_1)}.$

11.14. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee \overline{x}_2} \wedge \overline{x_3 \wedge x_1}.$

11.15. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x}_1 \vee x_2 \wedge x_3} \wedge (x \vee \overline{x}_3).$

11.16. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge \overline{\overline{x_3 \vee x_2} \vee \overline{x_3 \wedge x_1}}.$

11.17. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_3 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1} \wedge (\overline{\overline{x}_3 \wedge \overline{x}_2} \vee \overline{x}_1)}.$

11.18. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \wedge x_2 \vee x_3} \vee x_1} \wedge x_2.$

11.19. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x}_2 \vee \overline{x_3 \wedge x_1} \wedge \overline{x_3 \wedge x_2}}.$

11.20. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_3 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1} \wedge \overline{x_1 \wedge x_2}}.$

11.21. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_2 \wedge \overline{x}_1} \vee \overline{\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2} \wedge x_1$

11.22. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_3 \wedge x_1} \vee x_2} \wedge \overline{\overline{x}_3 \wedge x_1} \vee x_3 \wedge x_1.$

11.23. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_1} \wedge \overline{\overline{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_3}.$

11.24. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \wedge x_3} \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_3 \vee \overline{\overline{x}_2 \vee x_1 \wedge x_3}}.$

11.25. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge \overline{\overline{x_2 \wedge x_3 \vee x_1} \vee x_2 \wedge x_3}.$

11.26. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \vee (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge \overline{(x_1 \vee x_2) \wedge x_3}}.$

11.27. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x}_2 \wedge x_3} \wedge \overline{\overline{x}_1 \vee x_2 \wedge \overline{\overline{x}_1 \vee x_3 \wedge \overline{x}_2}}.$

11.28. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_2 \wedge x_3} \vee x_3 \wedge \overline{\overline{\overline{x}_1 \vee x_2} \wedge x_3}.$

11.29. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1} \wedge x_1 \wedge x_2.$

11.30. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1} \vee \overline{x_3 \wedge x_1}.$

Задача 12. З’ясувати питання про рівносильність ДНФ f_1, f_2, f_3. Перетворити f_2 в КНФ, спростити отриманий вираз якщо це можливо.

№	f_1	f_2	f_3
12.1	$\overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{y} \vee yz$	$x\overline{y} \vee xz$	$\overline{y} \vee z$
12.2	$\overline{y}\,\overline{z} \vee xz \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{y} \vee yz$	$\overline{z}\,\overline{x} \vee \overline{y} \vee xz$
12.3	$\overline{y}\,\overline{z} \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{y}$	$y\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{y}\,\overline{x} \vee \overline{y}z$	$x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}$
12.4	$x\overline{y}\,\overline{z} \vee xz \vee \overline{x}yz$	$x\overline{y}\,\overline{z} \vee z \vee \overline{x}y$	$x\overline{y} \vee yz$
12.5	$\overline{y}z \vee xy \vee y\overline{z} \vee \overline{z}\,\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y} \vee xz \vee yz$	$\overline{y}\,\overline{x} \vee y\overline{z} \vee xz$

Продовження задачі 12

№	f_1	f_2	f_3
12.6	$\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,z \vee x$
12.7	$y\,z \vee x\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$y\,\bar{x} \vee \bar{y}\,x \vee x\,z$	$z\,\bar{x} \vee \bar{y}\,x \vee \bar{z}$
12.8	$\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{z} \vee x\,\bar{y} \vee y\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}$	$y\,x \vee \bar{y}\,x \vee z$	$\bar{y}\,z \vee y\,\bar{z} \vee x\,\bar{z}$
12.9	$\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee y\,\bar{z} \vee \bar{z}\,x\,\bar{y}$	$y\,\bar{x} \vee \bar{y}\,x \vee x\,\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{z}$
12.10	$x\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{z} \vee y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z$	$y\,\bar{x} \vee \bar{y}\,x \vee x\,\bar{z}$	$\bar{x} \vee y\,\bar{z}$
12.11	$\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,y \vee \bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,y \vee x$	$\bar{y}\,z \vee y\,\bar{z} \vee x$
12.12	$\bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z}$	$y\,\bar{x} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee z$	$\bar{y}\,\bar{x} \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z$
12.13	$\bar{y}\,\bar{z} \vee y\,\bar{z} \vee x\,z$	$x\,y \vee \bar{y}\,z$	$x \vee \bar{z}$
12.14	$\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee x\,y \vee \bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z} \vee y\,\bar{z} \vee x\,z$	$\bar{y}\,\bar{x} \vee y\,x \vee \bar{z}$
12.15	$\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z \vee y\,\bar{z} \vee \bar{z}\,\bar{x}$	$\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,z \vee \bar{z}\,x$	$\bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}$
12.16	$\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee y\,x$	$x \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee y\,z$	$\bar{z}\,y \vee x\,z$
12.17	$y\,z \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,\bar{x} \vee \bar{z}\,x$	$y\,x \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee x\,z$	$y\,x \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z$
12.18	$\bar{x}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee y\,\bar{x}\,z$	$\bar{x}\,y \vee \bar{y}\,z$	$y \vee x\,\bar{y}\,z$
12.19	$\bar{x}\,y\,z \vee x\,y \vee x\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{y}\,z \vee y\,\bar{z} \vee x\,y$	$\bar{x} \vee \bar{y}\,x \vee \bar{z}\,y$
12.20	$x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y \vee y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z$	$y\,z \vee y\,\bar{z} \vee x$	$y\,\bar{x} \vee z\,\bar{x} \vee x\,\bar{z}$
12.21	$\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z \vee x\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}$	$y\,\bar{x} \vee \bar{y}\,z \vee y\,\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{z}$
12.22	$x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,z \vee x\,y\,\bar{z}$	$\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y \vee y\,\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{x}\,z$
12.23	$\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,y \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z$	$y\,z \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee y$	$z\,\bar{x} \vee y \vee x\,\bar{z}$
12.24	$x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z$	$\bar{y}\,z \vee x \vee \bar{x}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y \vee x\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z}$
12.25	$y\,x \vee \bar{x}\,\bar{z}$	$y\,\bar{x} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee y\,\bar{z}$
12.26	$x\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee y$	$\bar{x}\,z \vee y\,x$	$x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee y\,z$
12.27	$\bar{y}\,x \vee y\,z \vee \bar{x}\,\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y \vee \bar{y}\,x \vee z\,x$	$y\,z \vee y\,x \vee \bar{x}\,\bar{z}$
12.28	$\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{x}$	$\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{z}$	$z \vee x\,y\,\bar{z}$
12.29	$x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y \vee y\,z \vee x\,\bar{y}\,z$	$z\,\bar{x} \vee y\,z \vee x\,\bar{z}$	$y\,\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{x}\,z$
12.30	$\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,z$	$z\,\bar{x} \vee y \vee x\,z$	$\bar{x}\,y \vee x\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z}$

Задача 13. Для заданих логічних функцій побудувати таблицю істинності, ДДНФ, ДКНФ, поліном Жегалкіна (ДПНФ).

№	f_1	f_2
13.1	$f_1 = x_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3$	$f_2 = (\overline{\bar{x}_1\,\bar{x}_2} \vee x_1x_3 \vee x_2x_3) \wedge (\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3})$
13.2	$f_1 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3$	$f_2 = (\overline{\bar{x}_2x_1} \vee \bar{x}_2x_3) \vee (\overline{x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3} \vee x_1x_2)$
13.3	$f_1 = 1$ на наборах 0, 3	$f_2 = (\overline{\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_2x_3}) \wedge (\overline{x_2x_1 \vee x_2x_3 \vee x_3\bar{x}_1})$
13.4	$f_1 = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$f_2 = (\overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3}) \wedge (\overline{x_2x_3} \vee x_1\bar{x}_2)$

Продовження задачі 12

№	f_1	f_2
13.5	$f_1 = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$f_2 = \overline{x_1x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3} \wedge \left(\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} \vee x_2x_3\right)$
13.6	f_1 = 1 на наборах 0, 1, 3	$f_2 = (\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3}) \vee (\overline{x_1x_2 \vee x_2x_3} \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)$
13.7	$f_1 = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$f_2 = (\overline{x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3}) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3}\right)$
13.8	$f_1 = \bar{x}_1 \vee x_2$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3\right)$
13.9	f_1 = 1 на наборах 3, 7	$f_2 = (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3) \vee (x_2x_3 \vee \overline{x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2})$
13.10	$f_1 = x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_3$	$f_2 = \left(x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}\right) \wedge \left(x_1\bar{x}_2 \vee \overline{x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_3\right)$
13.11	$f_1 = \bar{x}_1 \vee x_3$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3} \vee x_2\bar{x}_3\right)$
13.12	f_1 = 1 на наборах 0, 1, 3, 7	$f_2 = (x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}) \vee (\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3})$
13.13	$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3$	$f_2 = \left(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3} \vee x_1x_3\right)$
13.14	$f_1 = x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3\right)$
13.15	f_1 = 1 на наборах 0, 1, 2, 3, 7	$f_2 = (\bar{x}_2x_1 \vee \overline{x_1\bar{x}_3} \vee \overline{x_2\bar{x}_3}) \vee (\overline{x_1\bar{x}_3} \vee x_2\bar{x}_3)$
13.16	$f_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_3\right)$
13.17	$f_1 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}\right)$
13.18	f_1 = 1 на наборах 2, 5, 6	$f_2 = (\bar{x}_2x_1 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \vee (\overline{x_1\bar{x}_3} \vee x_2\bar{x}_3)$
13.19	$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$	$f_2 = \left(\bar{x}_3x_1 \vee \overline{\bar{x}_3x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3\right)$
13.20	$f_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\bar{x}_3x_1 \vee \overline{\bar{x}_3x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}\right)$
13.21	f_1 = 1 на наборах 0, 2, 5, 7	$f_2 = (\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2) \wedge (\overline{x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_2)$
13.22	$f_1 = \bar{x}_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\bar{x}_3x_1 \vee \overline{\bar{x}_3x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_3} \vee \overline{x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_2\right)$
13.23	$f_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$	$f_2 = \left(\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_3\right) \wedge \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right)$
13.24	f_1 = 1 на наборах 0, 1, 3	$f_2 = (\overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3}) \wedge (\overline{x_1x_2 \vee x_2x_3} \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)$
13.25	$f_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}\right) \wedge \left(\bar{x}_3x_2 \vee \overline{\bar{x}_3x_1}\right)$
13.26	$f_1 = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$	$f_2 = \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3\right) \wedge \left(x_1\bar{x}_3 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}\right)$
13.27	f_1 = 1 на наборах 3, 4, 6, 7	$f_2 = (x_1x_2 \vee \overline{\bar{x}_2x_3}) \wedge (\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3} \vee x_1x_2 \vee x_2x_3)$
13.28	$f_1 = \bar{x}_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\bar{x}_3x_1 \vee \overline{\bar{x}_3x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee \overline{x_1\bar{x}_3} \vee x_2\bar{x}_3\right)$
13.29	$f_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$f_2 = \left(\overline{\bar{x}_3x_1} \vee \bar{x}_3x_2\right) \wedge \left(\overline{x_1\bar{x}_2} \vee \overline{x_1\bar{x}_3} \vee x_2\bar{x}_3\right)$
13.30	$f_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$	$f_2 = (\bar{x}_3x_1 \vee \overline{x_2\bar{x}_3}) \wedge (\overline{x_1\bar{x}_3} \vee \overline{x_2\bar{x}_3} \vee x_1\bar{x}_2)$

Набори значень логічних змінних

№	x_1	x_2	x_3	№	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	4	1	0	0
1	0	0	1	5	1	0	1
2	0	1	0	6	1	1	0
3	0	1	1	7	1	1	1

Задача 14.

14.1. У групі з 20 студентів проведено голосування. “За” проголосувало 10 студентів, “проти” – 7, “утримались” – 3. Якою кількістю способів могло бути проведено голосування?

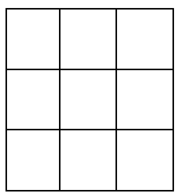
14.2. Літери в азбуці Морзе являють собою набір крапок та тире. Скільки літер може бути в азбуці Морзе, якщо літера не повинна містити більше чотирьох знаків?

14.3. У групі 7 спортсменів. Скільки можна сформувати команд для 4-етапної естафети, якщо на останньому етапі повинен бути спортсмен А.

14.4. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

14.5. Скількома способами можна викласти колоду з 32 карт, якщо за кожною дамою повинен йти король такої ж масті?

14.6 Скількома способами можна розфарбувати квадрат, поділений на 9 частин, чотирма кольорами таким чином, щоб в перший колір було пофарбовано 3 частини, в другий – 2, в третій – 3, в четвертий – 1?



14.7. Хокейна команда складається з двох воротарів, семи захисників, 10 форвардів. Скількома способами тренер може скласти стартову шістку, що складається з воротаря, двох захисників і трьох нападаючих?

14.8. Скількома способами з п'яти кольорів (один з яких є червоний) можна скласти триколірний прапор в смугу, якщо одна зі смуг має бути обов'язково червоною?

14.9. У розіграші першості з футболу було зіграно 153 матчі. Кожні дві команди зустрічались між собою один раз. Скільки команд брало участь у розіграші першості?

14.10. У магазині продають тістечка чотирьох видів. Скількома способами можна купити дев'ять тістечок?

14.11. Скількома способами з колоди (32 карти) можна витягти п'ять карт, щоб три з них були однієї масті (порядок карт не має значення)?

14.12. Скільки різних перестановок можна скласти з букв слова “математика”?

14.13. Скількома способами на шаховій дошці (8x8) можна вибрати два поля, які не лежать по одній горизонталі або вертикалі?

14.14. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох чоловік для чергування, якщо один з них має бути старшим?

14.15. На одній з бічних сторін трикутника взято n точок, на другій – m точок. Кожна вершина біля основи трикутника з'єднана прямими з точками, що взяті на протилежному боці. На скільки частин поділяють трикутник ці прямі?

14.16. Перерахуйте число різних результатів кидків двох гральних кісток?

14.17. Скільки парних п'ятизначних чисел можна отримати з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

14.18. У групі з 100 студентів англійською мовою володіють 28 чоловік, німецькою – 30, французькою – 42, англійською та німецькою – 8, англійською та французькою – 10, німецькою та французькою – 5, а всіма трьома мовами володіють три студенти. Скільки студентів не знають жодної з названих мов?

14.19. У шаховому турнірі, де спортсмени зустрічаються між собою один раз, два шахісти вибули за захворюванням, однак встигли зіграти тільки по три партії кожний (між собою не зустрічались). Скільки шахістів починали турнір, якщо всього було зіграно 84 партії?

14.20. Скількома способами на чорні поля шахової дошки (32 чорних поля і 32 білих) можна поставити 12 чорних та 12 білих шашок?

14.21. В аудиторії сидять кілька студентів, причому в кожного з них у журналі є хоча б одна оцінка. При цьому: 6 осіб отримали "5", 7 – "3", 6 – "4", 4 особи – "4" та "5", 3 особи – "4" та "3", 2 особи – "3" та "5", а один отримав відразу "3", "4", та "5". Скільки студентів знаходиться в аудиторії?

14.22. Скільки існує п'ятизначних чисел, в яких кожна наступна цифра менша за попередню?

14.23. На площині проведено 10 прямих ліній так, що ніякі дві з них не паралельні між собою і ніякі три з них не перетинаються в одній точці. Знайти число трикутників, які утворюють ці прямі, та на скільки частин ділять площину ці прямі.

14.24. У скількох випадках при виборі з колоди в 52 карти десяти карт серед них опиняться усі 4 тузи?

14.25. В одній купці – 12 карт, а в іншій – 10. Скількома способами можна три карти з однієї купки поміняти на три карти з іншої.

14.26. Скількома способами можна розкласти 20 однакових куль по чотирьох різних урнах?

14.27. Знайти кількість цілих додатних чисел не більше 100, які діляться на 2; 3 та 5.

14.28. Маємо 38 предметів: з них 13 із сталі, 10 чорних, 14 сферичних; сталевих і чорних – 4; чорних і сферичних – 3; не мають жодної з вказаних властивостей 12 предметів. Скільки сферичних предметів, які до того ж є сталевими та чорними?

14.29. Скільки існує п'ятизначних чисел, в яких кожна наступна цифра більше за попередню?

14.30. Скільки непарних п'ятизначних чисел можна отримати з цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10, якщо цифри в цих числах різні?

Задача 15.

Розв'язати рівняння:

№	Рівняння	№	Рівняння
15.1	$A_x^2 - C_x^1 = 80$	15.11	$3 \cdot C_{x+1}^2 - 2 \cdot A_x^2 = x$
15.2	$C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15} \cdot A_{x+1}^3$	15.12	$\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}$
15.3	$11 \cdot C_x^3 = 24 \cdot C_{x+1}^2$	15.13	$C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2}$
15.4	$A_x^3 - 2 \cdot C_x^4 = 3 \cdot A_x^2$	15.14	$\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \frac{4}{5}$
15.5	$12 \cdot C_{x+3}^4 = 55 \cdot A_{x+1}^2$	15.15	$\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$
15.6	$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$	15.16	$\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$
15.7	$\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}$	15.17	$\frac{C_{x+1}^3}{C_x^4} = \frac{6}{5}$
15.8	$12 \cdot C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$	15.18	$A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$
15.9	$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$	15.19	$3 \cdot C_{x+1}^2 + P_2 \cdot x = 4 \cdot A_x^2$
15.10	$11 \cdot C_x^3 = 24 \cdot C_{x+1}^2$	15.20	$C_x^3 + C_x^4 = 11 \cdot C_{x+1}^2$

Довести тотожність:

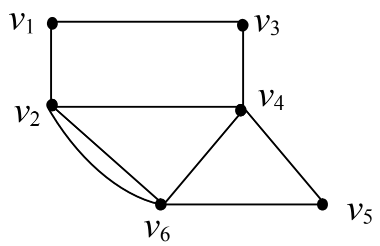
15.21	$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, если $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$	15.24	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$
15.22	$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^r = 3^n$	15.25	$C_{n+1}^k = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \ldots + C_{n-k}^0$
15.23	$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n+2}^k + \ldots + C_k^k$	15.26	$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$

Довести властивості біноміних коефіцієнтів:

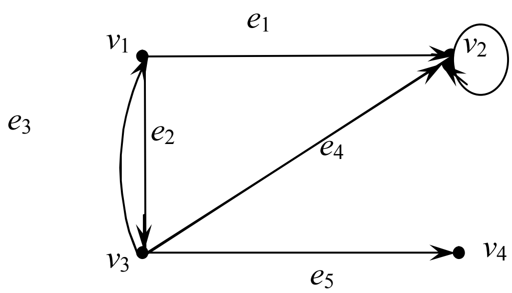
15.27	$C_n^k C_n^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$	15.29	$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
15.28	$\sum\limits_{r=k}^{n} C_k^r = C_{n+1}^{k+1}$	15.30	$C_{n+1}^k = \dfrac{n+1}{n-k+1} C_n^k$

Задача 16.

16.1. Який з циклів цього графа є ейлеровим?

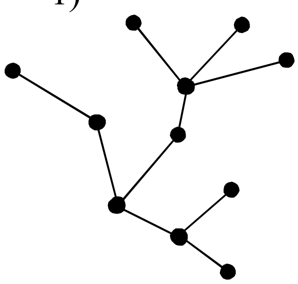


16.2. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа.

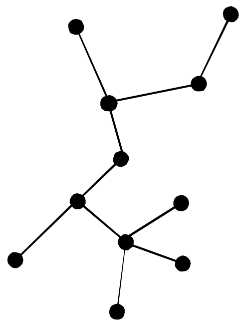


16.3. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа.

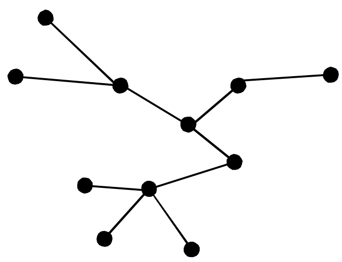
1)



2)

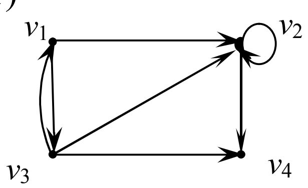


3)

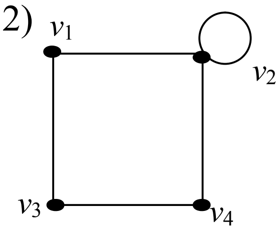


16.4. Задана матриця суміжності. Якому з наведених графів вона відповідає?

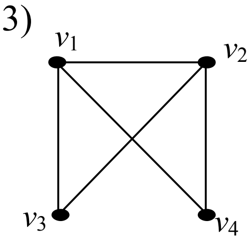
1)



2)

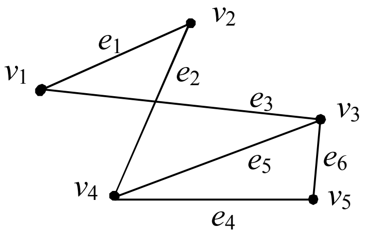


3)

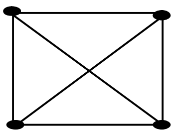
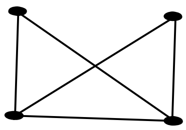
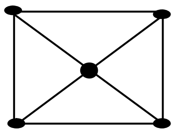
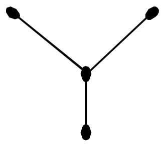


	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0

16.5. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа.

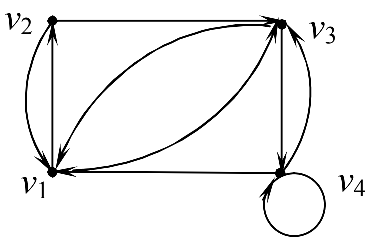


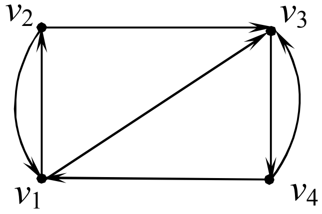
16.6. Який із зображених графів є повним?

1)  2)  3)  4) 

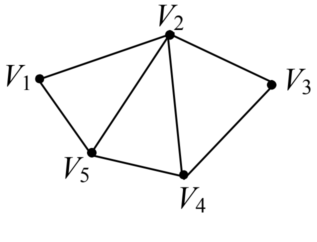
16.7. Якому орієнтованому графу відповідає матриця суміжності?

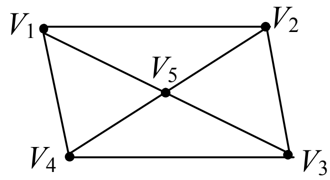
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	1	0
v_3	1	0	0	1
v_4	1	0	1	1

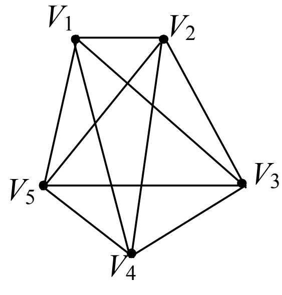
1)


2)


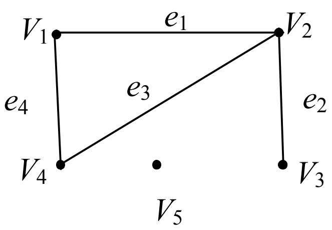
16.8. Який із зображених графів повний?







16.9. Яка матриця інцидентності відповідає графу



1)

	e_1	e_2	e_3	e_4
V_1	1	0	0	1
V_2	1	0	1	0
V_3	0	0	0	0
V_4	0	0	0	1
V_5	0	0	0	0

2)

	e_1	e_2	e_3	e_4
V_1	1	0	0	1
V_2	1	1	1	0
V_3	0	1	0	0
V_4	0	0	1	1
V_5	0	0	0	0

16.10. Побудувати орграф,

матриця суміжності якого є

$A(G)=$

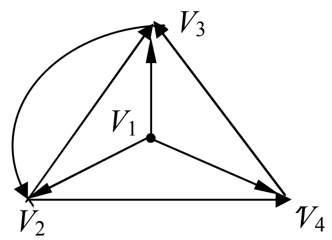
	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	0	0	0
V_2	0	0	1	0
V_3	1	0	0	0
V_4	0	0	1	0

а матриця інцидентності є

$B(G)=$

	e_1	e_2	e_3	e_4
V_1	–1	0	1	0
V_2	1	–1	0	0
V_3	0	1	–1	1
V_4	0	0	0	–1

16.11. Чи є цей граф зв’язним, сильно зв’язним?



16.12. Побудувати граф, матриця суміжності якого є

$A(G)=$

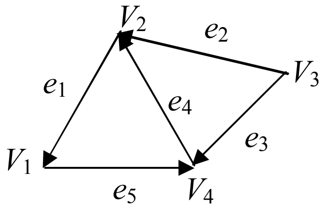
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	0	1	0
V_2	1	0	1	1	0
V_3	0	1	0	1	0
V_4	1	1	1	0	1
V_5	0	0	0	1	0

матриця інцидентності $B(G)$ є:

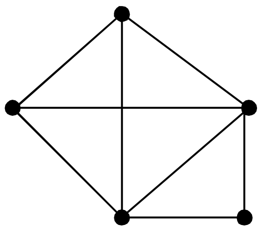
$B(G)=$

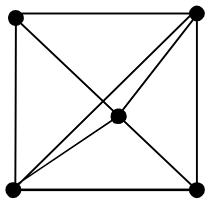
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_4	e_6
V_1	1	0	0	0	1	0
V_2	1	1	0	1	0	0
V_3	0	1	1	0	0	0
V_4	0	0	1	1	1	1
V_5	0	0	0	0	0	1

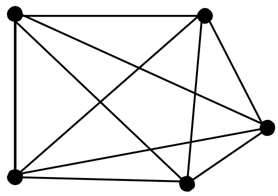
16.13. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа:



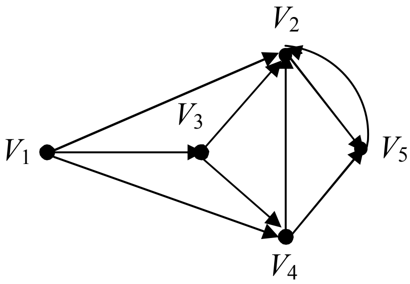
16.14. Який із зображених графів є повним?

1) 

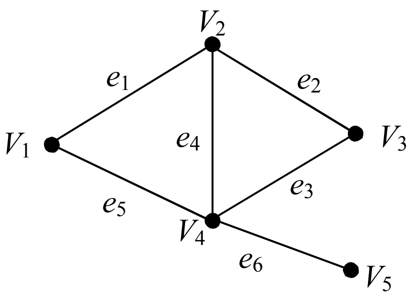
2) 

3) 

16.15. Чи є граф G зв'язним, сильно зв'язним?

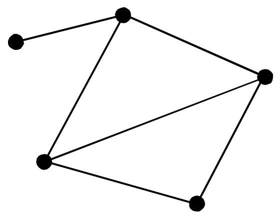


16.16. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа:

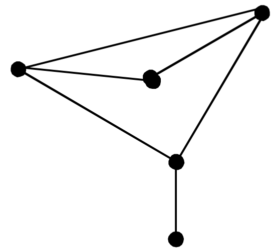


16.17. Вказати, які графи є ізоморфними?

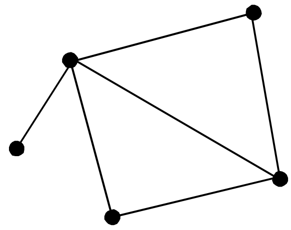
1)



2)



3)

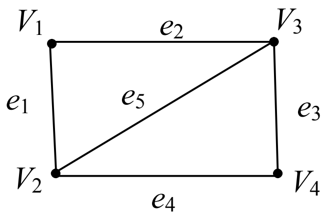


16.18. Задана матриця інцидентності графа

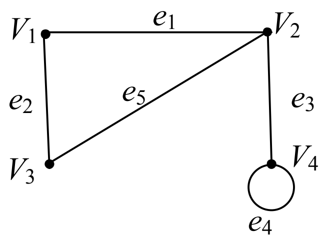
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
	V_1	1	1	0	1	0
$B(G)=$	V_2	1	0	0	0	1
	V_3	0	1	1	0	0
	V_4	0	0	1	1	1

Якому з наведених графів вона відповідає?

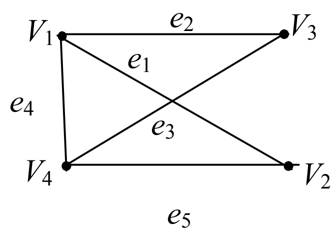
1)



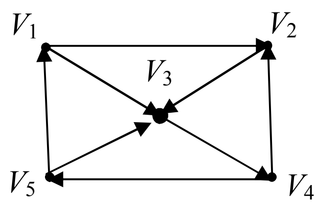
2)



3)



16.19. Чи є цей граф зв’язним, сильно зв’язним?

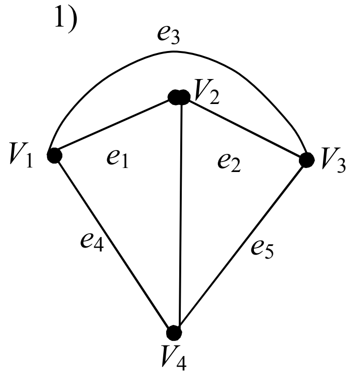


16.20. Задана матриця інцидентності графа

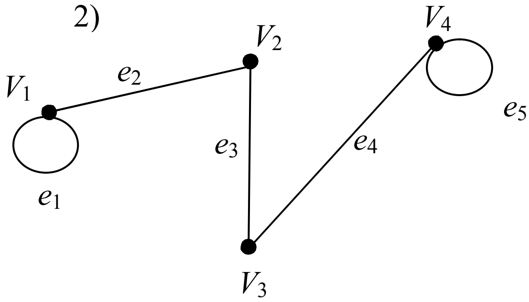
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
	V_1	1	1	0	0	0
$B(G)=$	V_2	1	1	1	0	0
	V_3	0	0	1	1	1
	V_4	0	0	0	1	1

Якому з наведених графів вона відповідає?

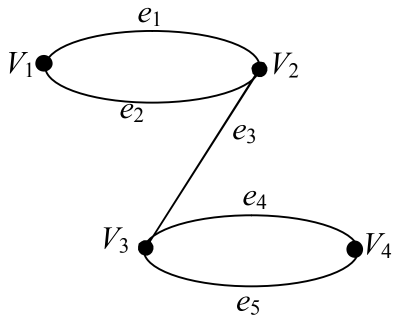
1)



2)

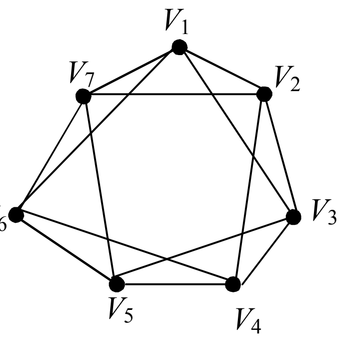


3)

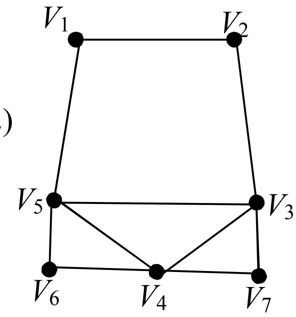


16.21. Вказати, якщо є ізоморфні графи?

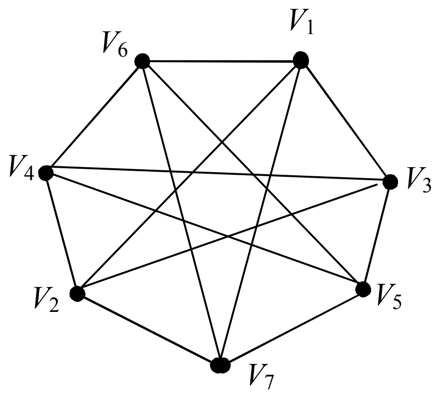
1)



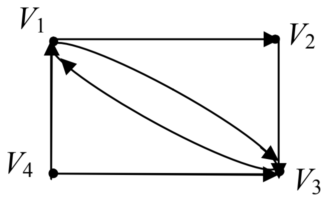
2)



3)

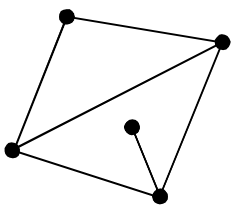


16.22. Чи є граф G зв’язним, сильно зв’язним?

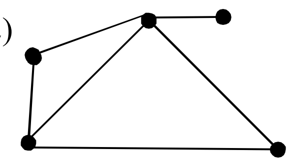


16.23. Вказати, які графи є ізоморфними.

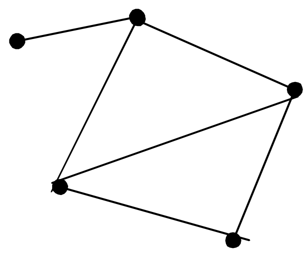
1)



2)



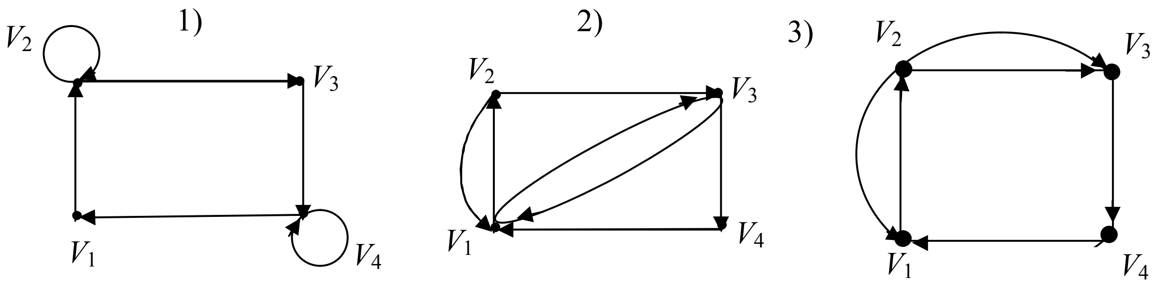
3)



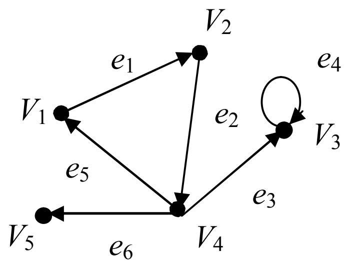
16.24. Якому орграфу відповідає матриця суміжності:

$A(G)=$

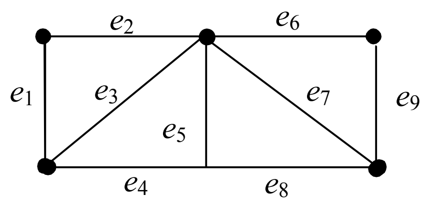
	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	1	1
V_2	1	0	1	0
V_3	1	0	0	1
V_4	1	0	0	0



16.25. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа:

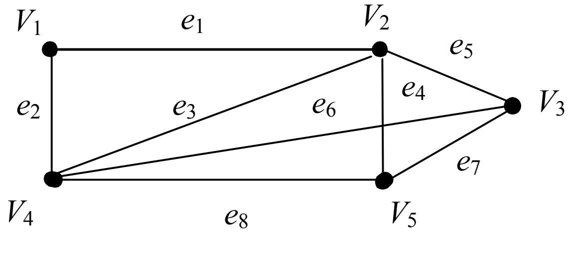


16.26. Який з наведених шляхів відповідає гамільтоновому циклу для заданого графа?

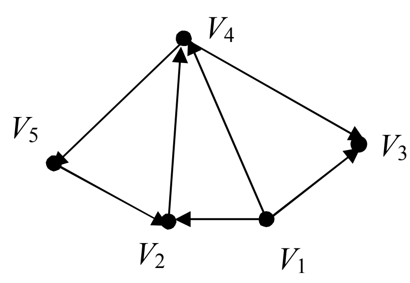


1) e_4, e_5, e_6
2) e_2, e_6, e_6, e_9, e_7, e_3, e_1
3) e_1, e_2, e_6, e_9, e_8, e_4
4) не існує гамільтонового циклу

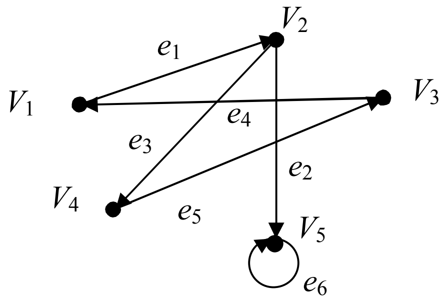
16.27. Побудувати матрицю суміжності $A(G)$ та матрицю інцидентності $B(G)$ графа.



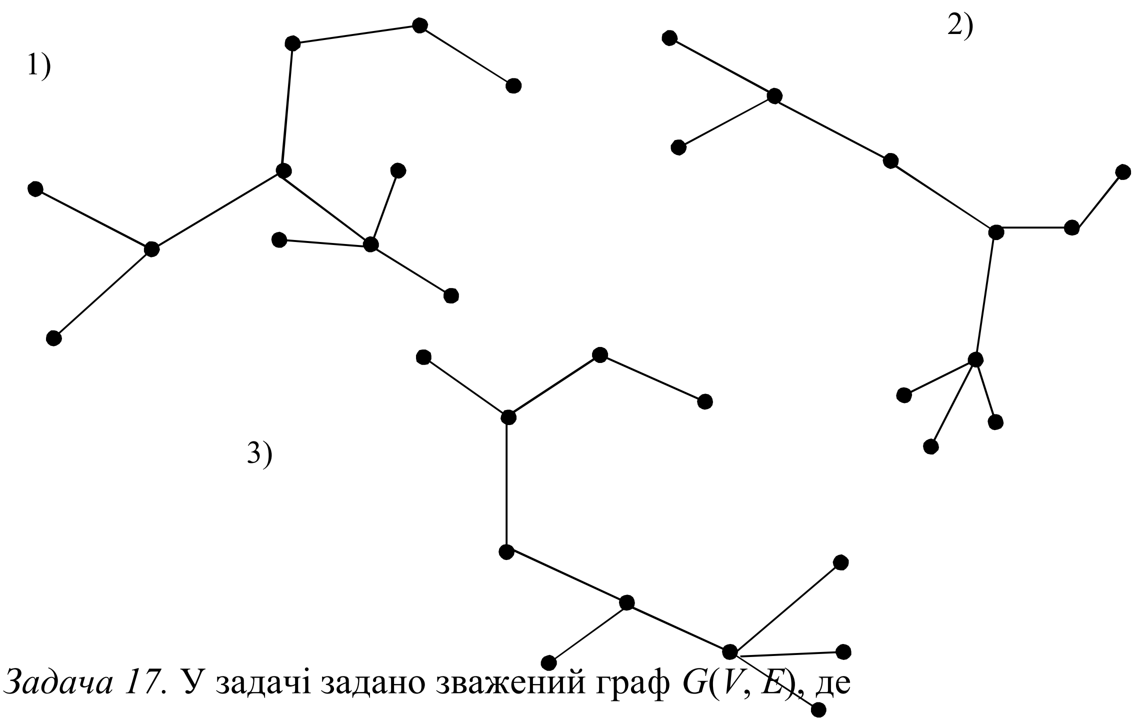
16.28. Чи є цей граф зв'язним, сильно зв'язним?



16.29. Побудувати матриці суміжності та інцидентності графа



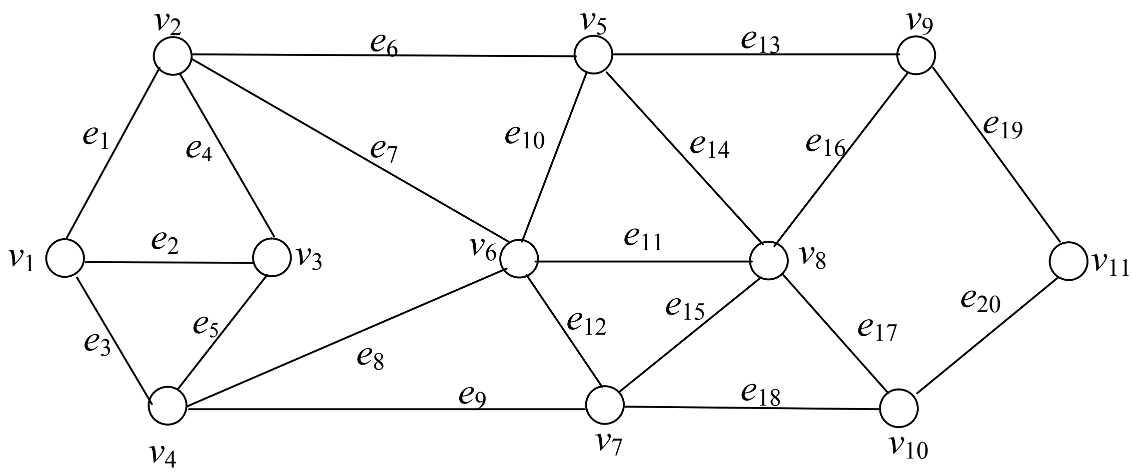
16.30. Які з наведених дерев є ізоморфними?



Задача 17. У задачі задано зважений граф $G(V, E)$, де

$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10},v_{11}\}$,

$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16},e_{17},e_{18},e_{19},e_{20}\}$



Вага ребра e_i дорівнює m_i і задана таблицею ($i = \overline{1,20}$). Побудувати мінімальне остове дерево за алгоритмом Краскала.

17.1.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	3	2	1	4	2	3	2	1	4	1	1	2	3	2	2	4	3

17.2.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	5	2	1	1	2	2	4	3	4	3	2	1	2	3	1	4	3	4

17.3.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	3	1	4	1	1	2	3	3	4	1	3	2	3	3	1	1	2	2	5

17.4.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	1	3	4	1	2	4	3	1	2	2	3	3	4	3	2	2	1	1	4

17.5.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	3	2	1	4	3	2	1	1	2	4	3	2	4	3	3	2	2

17.6.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	2	3	2	1	4	4	3	2	4	3	3	4	5	1	2	1	3	3

17.7.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	3	3	2	2	4	4	1	2	3	4	3	2	3	4	2	1	2	4

17.8.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	1	1	2	3	1	2	3	4	2	3	1	1	3	2	1	2	3	3	1

17.9.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	2	1	4	3	2	2	1	4	3	2	2	1	4	3	2	2	4	3

17.10.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	2	4	3	2	1	1	2	4	3	3	2	4	2	1	3	1	1	2

17.11.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	3	4	3	2	1	1	2	2	3	3	1	2	3	4	1	2	4	2	5

17.12.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	3	4	1	2	4	1	3	2	3	3	4	4	1	2	4	1	3	5

17.13.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	4	4	3	2	1	1	2	4	3	3	2	1	1	3	3	2	2	1	5

17.14.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4	3	2	3	4

17.15.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	3	4	2	2	4	3	1	1	2	3	3	2	1	2	1	2	2	5

17.16.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	4	2	1	4	3	2	2	3	4	4	3	2	2	1	3	3	1	3

17.17.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	5	2	4	1	3	5	2	4	1	3	5	2	4	1	3	5	1	3

17.18.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	1	3	1	4	1	1	1	2	1	3	1	4	1	1	2	1	3	1

17.19.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	4	3	4	1	2	1	3	1	4	2	3	2	4	1	2	3	1	1	4	5

17.20.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	2	4	1	3	2	1	3	4	5	1	4	2	2	3	3	2	1	2

17.21.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	2	1	1	2	3	3	4	1	1	1	3	2	2	2	1	3	2	3

17.22.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	5	1	4	5	3	2	4	5	3	3	2	1	2	3	4	1	2	2

17.23.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	4	2	1	1	3	4	2	1	3	3	4	4	3	2	1	1	2	4

17.24.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	4	1	2	4	3	1	2	4	3	3	2	1	3	4	2	1	2	4	3	1

17.25.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	4	1	3	4	2	1	2	4	1	3	4	2	1	2	3	3	2	4

17.26.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	3	4	3	2	1	1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	2	4	2

17.27.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	3	2	1	3	2	1	2	2	3	2	1	1	3	4	1	2	3	5	3

17.28.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	5	3

17.29.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	1	4	2	3	2	4	1	3	3	4	4	2	1	1	2	1	2	4

17.30.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	1	2	2	4	3	2	1	2	4	3	3	3	3	4	5	3	3	2

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Замість знака «?» поставити знаки $\in, \notin, \supset, =$ і т. ін:

$(-2,7)?[-2,8)$, $\{1,2,3\}?\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$, $8?\{1,8,14\}$, $(5,7]?[1,7)$, $5?\{4,21,28\}$.

Розв'язання.

a) $(-2,7)?[-2,8)$. Множина $(-2,7)$ є підмножиною множини $[-2,8)$, тому $(-2,7)\subset[-2,8)$;

b) $\{1,2,3\}?\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$. Множина $\{1,2,3\}$ є елементом множини $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$, тому $\{1,2,3\}\in\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$;

c) $8?\{1,8,14\}$. Число 8 належить до елементів множини $\{1,8,14\}$, тому $8\in\{1,8,14\}$.

d) $5?\{4,21,28\}$. Число 5 не належить до елементів множини $\{4,21,28\}$, а тому $5\notin\{4,21,28\}$.

Задача 2. Видаливши з множини A елементи {1, 2}, B – {9, 10}, C – {11, 13} і D – {14, 16}, записати множини, одержані після виконання вказаних операцій $A \cap D$, $A \setminus (B \cap C)$, $B \cup D$.

Вважаємо, що:

$U = A \cup B \cup C \cup D$,

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$,

$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$,

$C = \{ 11, 12, 13, 14, 15, 16 \}$,

$D = \{ 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16 \}$.

Розв'язання. Видаляємо вказані елементи з цих множин.

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\}$,

$C = \{12, 14, 15, 16\}$,

$D = \{1, 2, 3, 4, 15\}$.

Виконуємо вказані у завданні операції:

а) $A \cap D$ – це операція перерізу. Перерізом множин A та D називають множину $A \cap D$*,* яка складається з усіх елементів, що належать A та D одночасно.

$A \cap D = \{3, 4\}$.

б) Спочатку виконуємо операцію в дужках. $(B \cap D) = \{4\}$.

$A \setminus (B \cap D)$ – це різниця множин. Різницею множин A і $(B \cap D)$ називається множина $A \setminus (B \cap D)$, що складається з усіх елементів A, які не належать $(B \cap D)$.

$A \setminus (B \cap D) = \{3, 5, 6, 7, 8\}$.

в) $B \cup D$ – це операція об'єднання. Об'єднанням множин B та D називається множина $B \cup D$, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин, тому

$B \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15\}$.

Задача 3. Спростити вираз.

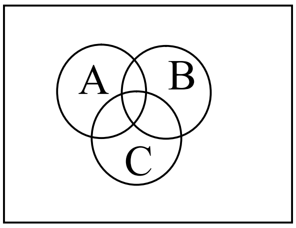
$$A \cap (\overline{B} \cup A) \cap \overline{(\overline{A} \cup B)} \cup \overline{B}$$

<u>Розв'язання</u>. Послідовно будемо опускати операції доповнення, використовуючи закони де Моргана, й спрощувати за рахунок інших властивостей і законів (поглинання, ідемпотентності):

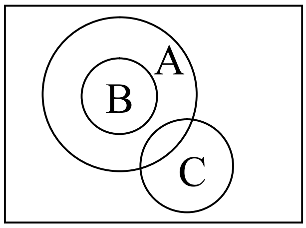
$$A \cap \overline{(\overline{B} \cup A) \cap \overline{(\overline{A} \cup B)}} \cup \overline{B} = A \cap \overline{(\overline{B} \cup A) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})} \cup \overline{B} = A \cap \overline{(\overline{B} \cup A) \cap (A \cup \overline{B})} \cup$$
$$\cup \overline{B} = A \cap (\overline{A \cup \overline{B}}) \cup \overline{B} = A \cap (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup \overline{B} = A \cap (\overline{A} \cap B) \cup \overline{B} = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup \overline{B} =$$
$$= \varnothing \cup \overline{B} = \overline{B}.$$

Задача 4. Виконати операції над трьома множинами та закреслити результат на діаграмі Ейлера – Венна.

а) $\overline{A} \cup B \cap C$

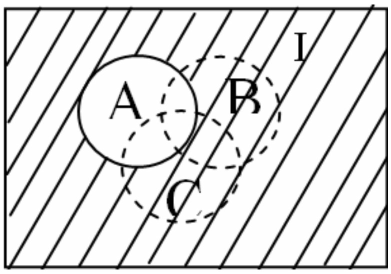


б) $(A \oplus B) \cup \overline{C}$

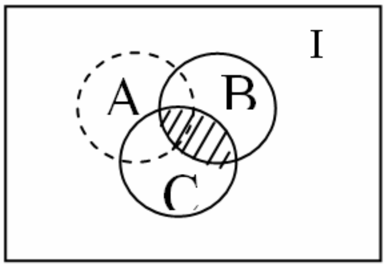


Розв'язання.

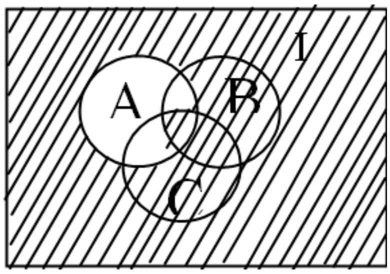
а) Знайдемо спочатку $\overline{A}$:



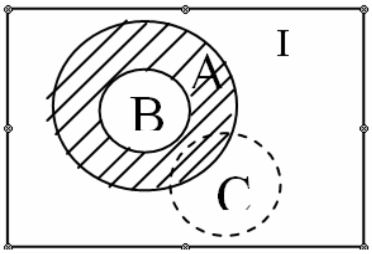
Далі знайдемо B ∩ C:



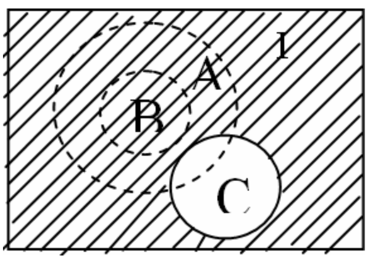
Остаточно:



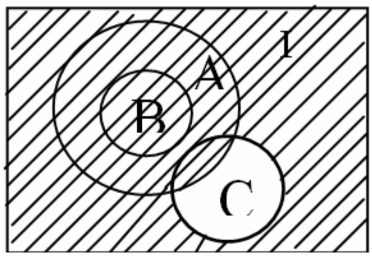
б) Знайдемо $A \oplus B$:



$\overline{C}$:



Остаточно:



Задача 5. Довести тотожність: $A \cap [B \setminus (A \setminus \overline{B})] = \varnothing$.

Розв'язання. Почнемо спрощення лівої частини рівності з виразу в квадратних дужках, причому для цього застосуємо рівність $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, а також інші властивості операцій.

$$B \setminus (A \setminus \overline{B}) = B \setminus (A \cap \overline{\overline{B}}) = B \setminus (A \cap B) = B \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$= (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing = B \cap \overline{A}.$$

$$A \cap [B \setminus (A \setminus \overline{B})] = A \cap (B \cap \overline{A}) = (A \cap \overline{A}) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing.$$

Отже, $\varnothing = \varnothing$. Тотожність доведено.

Задача 6. У групі 35 студентів. З них 20 чоловік рудих, а 11 – таких, що встигають. Крім того, відомо, що не рудих таких, які не встигають – 10 чоловік. Знайти кількість рудих успішних і кількість рудих студентів таких, які не встигають.

Розв'язання. Нехай E – множина студентів, $A \subseteq E$ – множина рудих студентів, $B \subseteq E$ – множина успішних. Тоді з умови одержимо, що $|E| = 35, |A| = 20, |B| = 11,$ $\left|\overline{A} \cup \overline{B} = 10\right|$, і потрібно знайти $|A \cap B|$ й $|A \cap \overline{B}|$.

Застосуємо формули включень і виключень:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|. \quad (1)$$

Отже, необхідно знайти $A \cup B$. Для цього розглянемо співвідношення: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \Rightarrow \left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = \left|\overline{A \cup B}\right| = 10$, а використовуючи той факт, що

$E = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B})$ й $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B}) = \varnothing$, можемо записати:

$$|E| = |A\cup B| + |\overline{A\cup B}| - |(A\cup B)\cap(\overline{A\cup B})| = |A\cup B| + |\overline{A\cup B}| \Rightarrow |A\cup B|| =$$
$$= |E| - |\overline{A\cup B}| = |A\cup B| = 35 - 10 = 25.$$

Тепер з рівняння (1) одержимо: $|A\cap B| = 20 + 11 - 25 = 6$.

Зазначимо, що: $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A\cup(B\cap\overline{B}) = A\cup\varnothing = A$, тоді:

$$|(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})| = |A\cap B| + |A\cap\overline{B}| - |(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})| = |A| \Rightarrow \tag{2}$$

$$\Rightarrow |A\cap B| + |A\cap\overline{B}| - |A\cap B\cap\overline{B}\cap A| = |A| \Rightarrow |A\cap B| + |A\cap\overline{B}| = |A|.$$

Тут ми скористалися розподільним законом, законом ідемпотентності й тим, що $X\cap\overline{X} = \varnothing$ й $|\varnothing| = 0$. Тоді з (2) витікає цілком природний результат:

$$|A\cap\overline{B}| = |A| - |A\cap B| = 20 - 6 = 14.$$

Таким чином, кількість рудих успішних студентів дорівнює 6, а рудих відстаючих – 14.

Задача 7. Дано дві множини: $M = \{а, б, в, г\}$ та $N = \left\{1, 3, \pi, \sqrt{15}\right\}$. Записати $M\times N$, $N\times M$, $M\times M$, $N\times N$.

Розв'язання. Згідно з означенням прямого (декартового) добутку маємо:

$M\times N = \{(а,1),(а,3),(а,\pi),(а,\sqrt{15}),(б,1),(б,3),(б,\pi),(б,\sqrt{15}),(в,1),(в,3),(в,\pi),$
$(в,\sqrt{15}), (г,1),(г,3),(г,\pi),(г,\sqrt{15})\}.$

$N\times M = \{(1,а),(1,б),(1,в),(1,г),(3,а),(3,б),(3,в),(3,г)(\pi,а),(\pi,б),(\pi,в),(\pi,г),$
$(\sqrt{15},а),(\sqrt{15},б)(\sqrt{15},в)(\sqrt{15},г)\}.$

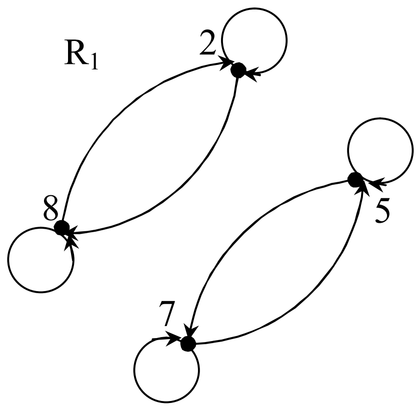
$M\times M = \{(а,а),(а,б),(а,в),(а,г),(б,а),(б,б),(б,в),(б,г), (в,а),(в,б),(в,в),(в,г),(г,а),$
$(г,б),(г,в),(г,г)\}.$

$N\times N = \{(1,1),(1,3),(1,\pi),(1,\sqrt{15}),(3,1),(3,3),(3,\pi),(3,\sqrt{15})(\pi,1),(\pi,3),(\pi,\pi),$
$(\pi,\sqrt{15}),(\sqrt{15},1),(\sqrt{15},3)(\sqrt{15},\pi)(\sqrt{15},\sqrt{15})\}.$

Задача 8. На множині $A=\{2,5,7,8\}$ задано відношення R_1 – «бути порівняними за модулем 2» та R_2 – «бути більше». Записати R_1 та R_2 перерахуванням пар, графами. Визначити: які мають властивості R_1 та R_2 і до яких видів належать. Виконати операції $R_1 \oplus R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \circ R_2$ та подати у вигляді графів та перерахування пар.

Розв'язання. $R_1 = \{(2,8),(2,2),(8,2),(8,8),(5,7),(7,5),(5,5),(7,7)\}$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

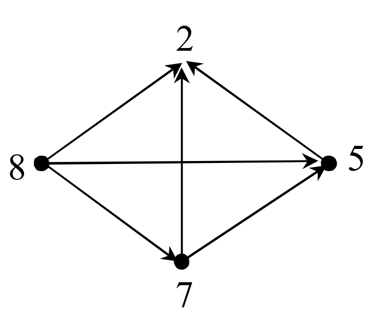


Довідка. Числа a і b порівнянні за модулем $m > 0$, якщо різниця $a - b$ ділиться на m без залишку.

Властивості: рефлексивність, симетричність, транзитивність (тобто еквівалентність)

$$R_2 = \{(5,2),(7,2),(8,2),(7,5),(8,5),(8,7)\}$$

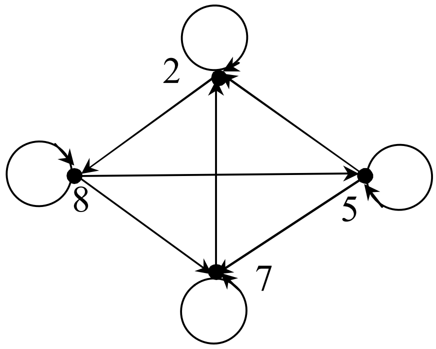
$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



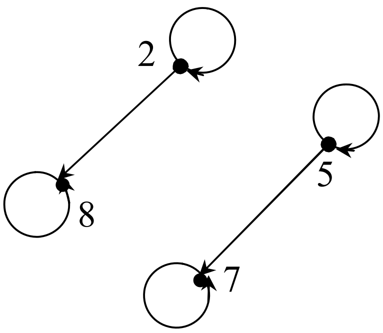
Властивості: антирефлексивність, антисиметричність, транзитивність.

Вид – строгий порядок.

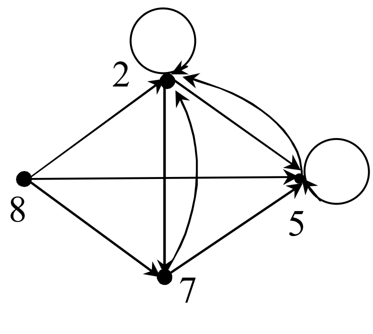
$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) \setminus (R_1 \cap R_2) = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7), (5,2), (7,2), (8,5), (8,7)\}$



$R_1 \setminus R_2 = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7)\}$



$R_1 \circ R_2 = \{(2,2),(2,5),(2,7),(8,2),(8,7),(8,5),(5,2),(5,5),(7,2),(7,5)\}$



Задача 9. Задана функція $f:[0,1]\to[0,3];\quad x\to 12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Чи являється ця функція сюр'єктивною, ін'єктивною, бієктивною? Пояснити чому.

Розв'язання.

З рівняння $y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, знаходимо $x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}},\quad x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$.

Крім того, якщо $0 \le y \le 3$, то обидва корены належать $[0, 1]$; якщо $y = 0$, то корені співпадають $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ і належать $[0, 1]$. Отже, для всіх $y \in [0, 3]$ рівняння $y = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ на $[0, 1]$ має принаймні одне рішення. Тому функція, що розглядається, сюр'єктивна.

Задача 10. Застосовуючи закони математичної логіки та властивості операцій, спростити вираз $x \wedge (y \sim x) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})$

Розв'язання.

$$x \wedge (y \sim x) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}) = x \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (y \sim x) = (x \wedge \overline{x} \vee x \wedge \overline{z}) \wedge (x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}) =$$
$$= (0 \vee x \wedge \overline{z}) \wedge (x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}) = x \wedge \overline{z} \wedge (x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}) = x \wedge \overline{z} \wedge x \wedge y \vee x \wedge \overline{z} \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} =$$
$$= x \wedge y \wedge \overline{z} \vee 0 = x \wedge y \wedge \overline{z}.$$

Задача 11.

Записати логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}) \vee x_3 \vee (x_1 \vee x_2\overline{x_3}) \wedge \overline{x_1}$, в диз'юнктивній нормальній формі. Підставляючи набори логічних змінних знайти значення логічної функції. Знайти ДДНФ.

Розв'язання.

$$x_2 \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}) \vee x_3 \vee \overline{(x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3}) \wedge \overline{x_1}} = x_2 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{(x_1 \vee x_2 \overline{\wedge x_3})} \vee \overline{\overline{x_1}} =$$
$$= x_2 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2 \wedge \overline{x_3}} \vee x_1 = x_2 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \vee x_1 =$$
$$= x_2 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \wedge x_3 \vee x_1 = (x_2 \wedge x_1 \vee x_1) \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee$$
$$\vee (x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_3) \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$$ – це є ДНФ.

Знайдемо значення логічної функції:

x_1	x_2	x_3	$x_2 \wedge \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1

Знайдемо ДДНФ розщепленням:

$$x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge (x_1 \vee \overline{x_1}) \vee x_3 \wedge (x_1 \vee \overline{x_1}) \vee$$

$$\vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge (x_3 \vee \overline{x_3}) = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \vee x_3 \wedge x_1 \vee x_3 \wedge$$

$$\wedge \overline{x_1} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} = x_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee$$

$$\vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \vee x_3 \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_3 \wedge \overline{x_1} \wedge (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee$$

$$\vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} = \underline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \vee \underline{\underline{\underline{x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}}}} \vee \underline{\underline{x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3}} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \vee$$

$$\vee \underline{\underline{\underline{x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}}}} \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee \underline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \vee \underline{\underline{x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3}} \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee$$

$$\vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} = \Big\| \text{оскільки} \quad x \vee x = x \Big\| =$$

$$= x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \vee$$

$$\vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}.$$

Оскільки присутні в доданках всі можливі набори змінних x_1 , x_2, x_3, то функція набуває на них значення 1.

Задача 12. З'ясувати питання про рівносильність ДНФ f_1, f_2, f_3 . Перетворити f_2 в КНФ, спростити отриманий вираз якщо це можливо.

$$f_1(x, y, z) = \overline{x} \wedge \overline{y} \vee y \wedge \overline{z} \vee x \wedge z, \quad f_2(x, y, z) = \overline{x} \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \vee \overline{y} \wedge z,$$

$$f_3(x, y, z) = x \wedge y \vee \overline{y} \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{z}.$$

Розв'язання. Перетворимо надані функції у ДДНФ.

$$f_1(x, y, z) = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{z} \vee x \wedge z = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge 1 \vee 1 \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge 1 \wedge z =$$
$$= \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \left(z \vee \bar{z}\right) \vee \left(x \vee \bar{x}\right) \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \left(y \vee \bar{y}\right) \wedge z = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee$$
$$\vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z.$$

$$f_2(x, y, z) = \bar{x} \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{y} \wedge z = \bar{x} \wedge \left(y \vee \bar{y}\right) \wedge \left(z \vee \bar{z}\right) \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee$$
$$\vee \left(x \vee \bar{x}\right) \wedge \bar{y} \wedge z = \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee$$
$$\vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z = \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee$$
$$\vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z.$$

$$f_3(x, y, z) = x \wedge y \vee \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{z} = x \wedge y \wedge \left(z \vee \bar{z}\right) \vee \bar{x} \wedge \left(y \vee \bar{y}\right) \wedge \bar{z} \vee$$
$$\vee \left(x \vee \bar{x}\right) \wedge \bar{y} \wedge z = x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee$$
$$\vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z.$$

Порівнюючи ДДНФ наданих функцій, доходимо до висновку, що $f_1 = f_3 \neq f_2$.

Перетворимо функцію f_2 в КНФ. Для цього скористаємось одним з дистрибутивних законів:

$$f_2(x, y, z) = \bar{x} \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{y} \wedge z = \left(\bar{x} \vee x \vee y\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bar{x} \vee x \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee z \wedge\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{z} \vee z\right) = \left(1 \vee y\right) \wedge \left(\bar{x} \vee 1\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\right) \wedge \left(1 \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee z \wedge\right) \wedge \left(\bar{x} \vee 1\right) = 1 \wedge 1 \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\right)$$
$$\wedge 1 \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee z \wedge\right) \wedge 1 = \left(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee z \wedge\right).$$

Задача 13. Для заданої логічної функції побудувати таблицю істинності, ДДНФ, ДКНФ, поліном Жегалкіна (ДПНФ).

Розв'язання. Нехай задана булева функція трьох змінних

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \bar{x}_2 \wedge \left(\left(x_1 \vee x_2\right) | \left(\overline{\bar{x}_2 | \bar{x}_3}\right)\right).$$

Позначимо кожну дію окремою функцією:

$$f_1 = x_1 \vee x_3; \quad f_2 = \bar{x}_2 | \bar{x}_3; \quad f_3 = \overline{\bar{x}_2 | \bar{x}_3} = \bar{f}_2; \quad f_4 = \left(x_1 \vee x_3\right) | \left(\overline{\bar{x}_2 | \bar{x}_3}\right) = f_1 | f_3;$$
$$f_5 = \bar{x}_2 \wedge \left(\left(x_1 \vee x_3\right) | \left(\overline{\bar{x}_2 | \bar{x}_3}\right)\right) = \bar{x}_2 \wedge f_4.$$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Двійкова форма $F = 11000100$.

Набори $N_f = (000, 001, 101)$, для яких $f(x_1, x_2, x_3) = 1$, тоді ДДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$.

Набори $N_f = (010, 011, 100, 110, 111)$, де $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, тоді ДКНФ функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3).$$

Побудуємо багаточлен Жегалкіна двома способами.

1) Розглянемо ДДНФ функції $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$; замінимо знак диз'юнкції на знак суми Жегалкіна $\oplus$

$$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \oplus (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3),$$

винесемо з першої та другої кон'юнкції $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$:

$$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_3 \oplus x_3) \oplus (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \oplus (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3).$$

Робимо заміни $\overline{x}_1 = x_1 \oplus 1$; $\overline{x}_2 = x_2 \oplus 1$, отримаємо:

$$((x_1 \oplus 1) \wedge (x_2 \oplus 1)) \oplus (x_1 \wedge (x_2 \oplus 1) \wedge x_3).$$

Розкриваємо дужки:

$$x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus$$
$$\oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Отже, ми отримали багаточлен Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

2) Тепер для побудови багаточлена Жегалкіна застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Для цього складемо такі вісім рівнянь:

$f(0, 0, 0) = a_0 = 1; \quad a_0 = 1;$

$f(0, 0, 1) = a_0 \oplus a_3 = 1; \quad 1 \oplus a_3 = 1; \quad a_3 = 0;$

$f(0, 1, 0) = a_0 \oplus a_2 = 0; \quad 1 \oplus a_2 = 0; \quad a_2 = 1;$

$f(0, 1, 1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0; \quad 1 \oplus 1 \oplus a_{23} = 0; \quad a_{23} = 0;$

$f(1, 0, 0) = a_0 \oplus a_1 = 0; \quad 1 \oplus a_1 = 0; \quad a_1 = 1;$

$f(1, 0, 1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1; \quad 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1; \quad a_{13} = 1;$

$f(1, 1, 0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0; \quad 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12} = 0; \quad a_{12} = 1;$

$f(1, 1, 0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0;$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123} = 0; \quad a_{123} = 1.$$

Записуємо багаточлен Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Задача 14. У якій кількості випадків, граючи в "Спортлото" (угадування 5 номерів з 36), будуть правильно вгадані не менше трьох номерів?

Розв'язання.

3 з 5 «правильних» номерів можна вибрати за формулою для кількості сполучень з 5 по 3, тобто C_5^3. Два, що залишилися, вибираємо з 31 номера за формулою C_{31}^2. Далі за правилом добутку знаходимо кількість варіантів, де правильно вгадано 3 номери з 5, а 2 не вгадано, тобто

$$C_5^3 \cdot C_{31}^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{31!}{2! \cdot 29!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{31 \cdot 30}{2} = 4650.$$

Аналогічно знаходимо кількість варіантів, коли вгадано 4 номери:

$$C_5^4 \cdot C_{31}^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{31!}{1! \cdot 30!} = 5 \cdot 31 = 15.$$

Кількість варіантів, коли правильно вгадано 5 номерів, дорівнює

$$C_5^5 \cdot C_{31}^0 = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot \frac{31!}{0! \cdot 31!} = 1.$$

Кількість варіантів правильного вибору не менше трьох номерів знаходимо за правилом суми, тобто

4650+155+1 = 4806.

Задача 15. *а*) Розв'язати рівняння $C_x^1 + 6\cdot C_x^2 + 6\cdot C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

Розв'язання. Згідно з визначенням кількості сполучень запишемо:

$$x + 6\cdot\frac{x!}{2!(x-2)!} + 6\cdot\frac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x,$$

$$x + \frac{6(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x)}{1\cdot2\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-2))} + \frac{6(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x)}{1\cdot2\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x-3))} =$$

$$= 9x^2 - 14x,$$

$$x + 3\cdot(x-1)\cdot x + (x-2)\cdot(x-1)\cdot x = 9x^2 - 14x,$$

або після скорочень $x^3 - 9x^2 + 14x = 0$, або $x(x^2 - 9x + 14) = 0$,

звідкіля $x_1 = 0,\quad x^2 - 9x + 14 = 0$; $x_{2,3} = \frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2} = \frac{9\pm5}{2}$, $x_1 = 2,\quad x_2 = 7$.

Корені $x_1 = 0$ та $x_1 = 2$ не можуть бути розв'язками рівняння, тому $x_2 = 7$.

б) Довести тотожність : $C_{n+1}^k = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \ldots + C_{n-k}^0$.

Розв'язання. Застосуємо співвідношення

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}. \qquad (1)$$

Другий доданок розкладемо за тією ж формулою :

$$C_{m-1}^{k-1} = C_{m-2}^{2-1} + C_{m-2}^{k-2}.$$

Отримаємо формулу (1) у вигляді:

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-2}^{k-1} + C_{m-2}^{k-2}.$$

Останній доданок знову розкладаємо за формулою (1) до тих пір, поки праворуч не буде $C_{m-k-1}^{k-k} = C_{m-k-1}^0$:

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-2}^{k-1} + C_{m-3}^{k-2} + \ldots + C_{m-k-1}^0.$$

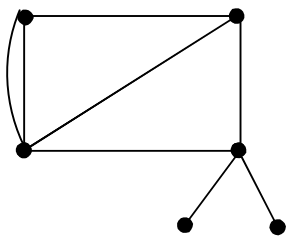
Замінимо $n+1 = m$ та отримаємо:

$$C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k} + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \ldots + C_{n-k}^{0},$$

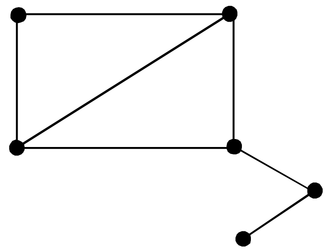
що і треба було довести.

Задача 10. Які з наведених графів ізоморфні?

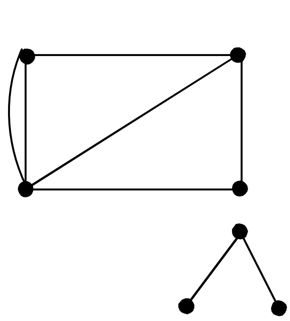
а)



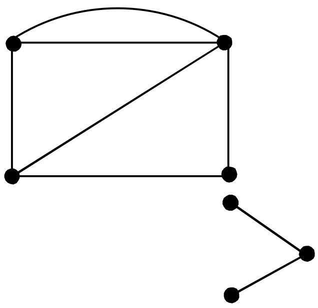
б)



в)



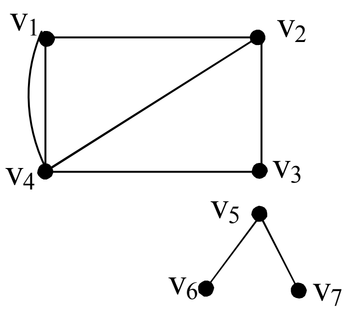
г)



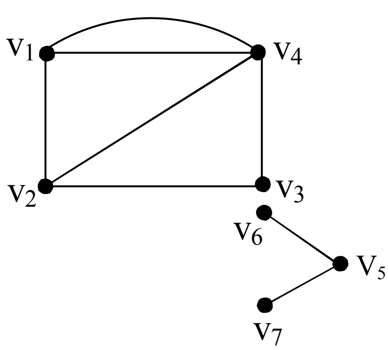
Розв'язання. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин. Тому треба порівнювати графи *а* та *б*, а також *в* та *г*. Але граф *а* має дві висячі вершини, а граф *б* – одну. Тому вони не можуть бути ізоморфними.

Розглянемо графи *в* і *г*. Кількість вершин і кількість ребер у них однакові. Обидва графи мають по дві компоненти зв'язності і по дві висячі вершини. Позначимо вершини графів і знайдемо відповідні вершини, враховуючи степені вершин.

в)



г)



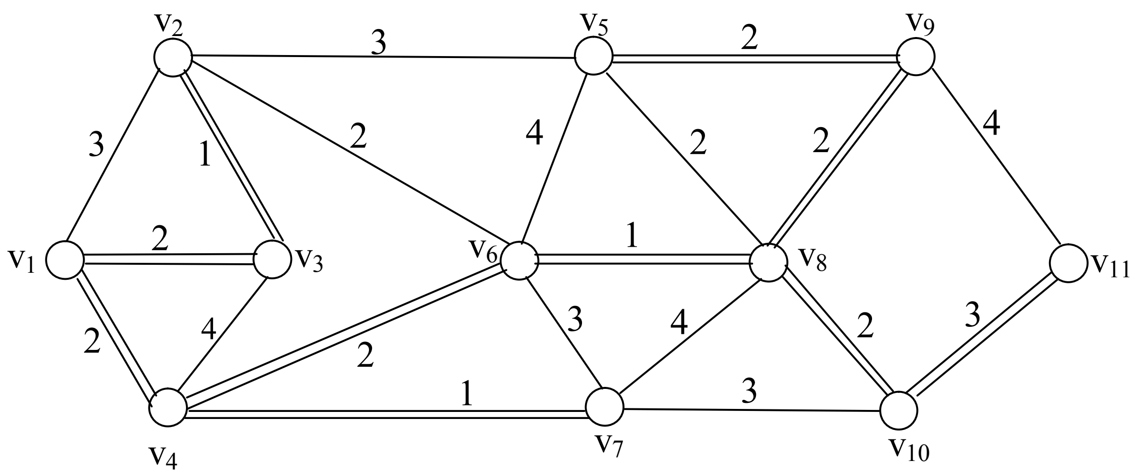
Матриці суміжності обох графів мають вигляд:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Відповідь: *в* і *г* є ізоморфними.

Задача 17. Побудувати мінімальне остове дерево для зваженого графа *G(V,E)* за алгоритмом Краскала.

Розв'язання.



1. Обираємо найкоротше ребро, наприклад (v_2,v_3) з довжиною 1 і позначаємо іншим кольором або двома рисками.

2. Обираємо найкоротше ребро з тих, що залишилися, наприклад (v_4,v_7) .

3. За таким же принципом обираємо дуги (v_6,v_8), (v_1,v_2), (v_1,v_4),(v_4,v_6), (v_5,v_9), (v_8,v_9), (v_8,v_{10}), (v_{10},v_{11}). При цьому треба уважно дивитись, щоб не утворювалося циклів.

Сумарна довжина ребер дорівнює 18.

Список літератури

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001.– 352 с.
2. Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика [Текст] / Дж. А. Андерсон. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с.
3. Андрійчук В.І. Вступ до дискретної математики : навчальний посібник / В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 254 с.
4. Ахо А. В. Структуры данных и алгоритмы / А. В. Ахо, Д. Э. Хопкрофт, Д. Д. Ульман. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. – 400 с.
5. Бардачов Ю. М. Дискретна математика : підручник / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков. – К. : Вища школа, 2007. – 142 с.
6. Гиндакин С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндакин. – М. : Наука, 1972. – 287 с.
7. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учебное пособие / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 288 с.
8. Истомин Л.Ф. Логические основы систем управления : учебное пособие. – Луганск: Изд-во ВНУ, 2005.-322с.
9. Капітонова Ю.В. Основи дискретної математики / Ю.В. Капітонова, С. Л. Кривий, О.А. Летичевський. – К. : Наукова думка, 2002. – 578 с.
10. Кривий С. Л. Дискретна математика: Вибрані питання / С. Л. Кривий. – К. : Видавничий дім „Києво-Могилянська академія”, 2007. – 475 с.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
12. Липский В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М. : Мир, 1998. – 213 с.
13. Лыскова В.Ю. Логика в информатике / В.Ю. Лыскова, Е.А. Ракитина. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 160 с.
14. Михайленко В.М. Дискретна математика : підручник / В.М. Михайленко, Н.Д. Федоренко, В.В. Демченко. – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2003. – 319 с.

15. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики : учебное пособие / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
16. Нікольський Ю. В. Дискретна математика / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – К. : Видавнича група BHV, 2007. – 311 с.
17. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов : учебник для вузов / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2009. – 364 с.
18. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М. : ИНФРА-М, Новосибирск : НГТУ, 2002. – 280 с.
19. Судоплатов С.В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова – М. : ИНФРА-М; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 224 с.
20. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – 4-е изд. Стереотипное. – М. : Высшая школа, 2003. – 484 с.

Зміст

Навчальне видання

КОНОВАЛЕНКО Ольга Євгенівна
ТКАЧУК Микола Анатолійович
ГРАБОВСЬКИЙ Андрій Володимирович

Дискретна математика

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності
«Інформаційні технології проектування»
Відповідальний за випуск проф. Ткачук М.А.
Роботу до видання рекомендував проф. Дьяченко В.Г.
Редактор Л.А. Пустовойтова

План 2014, поз.194
Підп. до друку _____ _____ _____ Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.
Наклад 50 прим. Зам №______ Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Багалія, 21