Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

І.Г.Величко, М.О.Гургєнідзе, П.Г.Стєганцева

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

Навчально-методичний посібник до індивідуальної та самостійної роботи для студентів ІІ курсу математичного факультету

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 11
від 25.06.2009

Запоріжжя
2009

УДК 514.7
ББК 22.151

Величко І.Г., Гургєнідзе М.О., Стєганцева П.Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь: Навчально-методичний посібник до індивідуальної та самостійної роботи для студентів ІІ курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2009. –76с.

Навчально-методичний посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, завдання для самостійної та індивідуальної роботи з курсу «Диференціальна геометрія і топологія».

Призначений для студентів ІІ курсу математичного факультету денного та заочного відділень (спеціальність «Математика»).

Рецензент *А.К. Приварников*
Відповідальний за випуск *М.О.Гургєнідзе*

Зміст

ВСТУП

Диференціальна геометрія є однією з базових математичних дисциплін. Для опанування матеріалу, який викладається в рамках цього курсу, потрібно вільно володіти поняттями і методами аналітичної геометрії, математичного аналізу, лінійної алгебри та диференціальних рівнянь. Знання і навички, отримані при вивченні диференціальної геометрії, будуть в подальшому використані в спеціальних курсах, таких як «Ріманова геометрія» та «Механіка деформівного твердого тіла».

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати елементи теорії плоских і просторових кривих, формули Серре-Френе; елементи теорії поверхонь в тривимірному просторі, означення основних понять: гаусової та середньої кривин, нормальної кривини кривої на поверхні, геодезичної лінії, асимптотичної лінії та лінії кривини, відображення Вейнгартена, формули Гауса та Петерсона-Кодацци; означення криволінійних координат та ріманової метрики;

вміти-обчислювати інваріанти кривих і поверхонь (кривина, скрут, гаусова та середня кривини); обчислювати довжини кривих та площі областей в криволінійних координатах; оперувати з тензорами в координатній формі.

В даному посібнику розглянуто два розділи з курсу диференціальної геометрії: «Теорія кривих» та « Теорія поверхонь». По кожному з них викладені теоретичні відомості, наведені основні означення та формули. Об’єм теоретичного матеріалу дозволяє самостійно розв’язувати запропоновані задачі, без залучення додаткової літератури. Але **автори рекомендують не обмежуватися рамками цього посібника, а попередньо опрацювати лекції і рекомендовану літературу.**

До кожного з розглянутих розділів наведено тестові питання і модульна контрольна робота (зразок), а також приклади розв’язування задач. В кінці посібника є приблизний список питань, які виносяться на екзамен.

Для зручності користування в кінці посібника наведено список основних формул з диференціальної геометрії, таблицю похідних та таблицю інтегралів.

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ

1.1 Основні теоретичні відомості з теорії кривих тривимірного евклідового простору

Нехай E_3– тривимірний евклідів простір і G – зв'язна множина точок числової прямої (сегмент, напівсегмент, інтервал, відкрита або замкнута напівпряма, вся пряма). *Векторною функцією* $\bar{r}(t)$ (вектор – функцією $\bar{r}(t)$), заданою на множині G, називається відображення, при якому кожному значенню $t \in G$ відповідає вектор $\bar{r}(t)$ простору E_3.

Зафіксуємо в E_3 деякий декартовий базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ і розкладемо вектор $\bar{r}(t)$ по цьому базису

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}\,.$$

Скалярні функції $x(t), y(t), z(t)$ називаються *координатами векторної функції* $\bar{r}(t)$. Їхнє завдання рівносильне завданню векторної функції.

Постійний вектор $\bar{a}$ називається *границею векторної функції* $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, якщо для кожного $e > 0$ існує $d > 0$ таке, що для всіх $t \in G$, які задовольняють умові $0 < |t - t_0| < d$, виконується нерівність $|\bar{r}(t) - \bar{a}| < e$. Позначають: $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$.

Векторна функція $\bar{r}(t)$ називається *неперервною в точці* $t_0 \in G$, якщо $\bar{r}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t)$. Якщо векторна функція $\bar{r}(t)$ неперервна в усіх *точках* множини G, то вона називається *неперервною на* цій *множині*.

Векторна функція $\bar{r}(t)$ називається *диференційованою в точці* $t_0 \in G$, якщо при $\Delta t \to 0$ існує границя відношення

$$\frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}\,.$$

Ця границя називається *похідною векторної функції* $\bar{r}(t)$ в точці t_0 й позначається $\bar{r}'(t_0)$.

Очевидно, що для диференційованості векторної функції в точці потрібна її неперервність у цій точці.

Якщо векторна функція $\overline{r}(t)$ диференційована в кожній точці множини G, то вона називається *диференційованою на множині* G.

Нехай векторні функції $\overline{a}(t)$, $\overline{b}(t)$, $\overline{c}(t)$ і скалярна функція $j(t)$ диференційовані в *точці* $t_0 \in G$, тоді в цій *точці* диференційовані функції $\overline{a}(t) \pm \overline{b}(t)$, $j(t)\overline{a}(t)$, $\left(\overline{a}(t), \overline{b}(t)\right)$, $\left[\overline{a}(t), \overline{b}(t)\right]$, $\left(\overline{a}(t), \overline{b}(t), \overline{c}(t)\right)$ і мають місце рівності

1. $\left(\overline{a}(t) \pm \overline{b}(t)\right)' = \overline{a}'(t) \pm \overline{b}'(t)$,
2. $\left(j(t)\overline{a}(t)\right)' = j'(t)\overline{a}(t) + j(t)\overline{a}'(t)$,
3. $\left(\overline{a}(t), \overline{b}(t)\right)' = \left(\overline{a}'(t), \overline{b}(t)\right) + \left(\overline{a}(t), \overline{b}'(t)\right)$,
4. $\left[\overline{a}(t), \overline{b}(t)\right]' = \left[\overline{a}'(t), \overline{b}(t)\right] + \left[\overline{a}(t), \overline{b}'(t)\right]$.
5. $\left(\overline{a}(t), \overline{b}(t), \overline{c}(t)\right)' = \left(\overline{a}'(t), \overline{b}(t), \overline{c}(t)\right) + \left(\overline{a}(t), \overline{b}'(t), \overline{c}(t)\right) + \left(\overline{a}(t), \overline{b}(t), \overline{c}'(t)\right)$

Якщо векторна функція $\overline{r}(t)$, $t \in G$ має на множині G постійний модуль, то в кожній точці цієї множини вектор $\overline{r}(t)$ ортогональний похідній $\overline{r}'(t)$, яка обчислюється в цій точці.

Нехай скалярна функція $t(s)$ диференційована в *точці* s, а векторна функція $\overline{r}(t)$ диференційована в *точці* t. Тоді складна функція $\overline{R}(s) = \overline{r}(t(s))$ диференційована в *точці* s, причому $\overline{R}'_s = \overline{r}'_t t'_s$.

Параметризованою кривою, заданою на зв'язній множині $I \subset R$ називається неперервне відображення $g : I \to E_3$, при якому кожному значенню $t \in I$ відповідає деяка точка простору E_3. Змінна t називається *параметром* кривої. Образ $g(I)$ множини I при відображенні g називається *носієм кривої*.

Зазначене у визначенні параметризованої кривої відображення g є неперервною векторною функцією $\overline{r}(t)$. У зв'язку із цим рівняння

$$\overline{r} = \overline{r}(t)$$

називають *векторним рівнянням кривої*, а рівняння

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ -}$$

параметричними рівняннями кривої. Говорять також, що крива задана за допомогою векторної функції $\bar{r}(t)$ і пишуть

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \text{ або } \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Будемо користуватися записом $M = \bar{r}(t)$, маючи на увазі, що *точка* M кривої є образом при відображенні $g : I \to E_3$.

Крива g, задана за допомогою векторної функції $\bar{r}(t)$, називається *гладкою кривою класу* C^k, де $k \in N \cup \{0\}$ або $k = \infty$, якщо векторна функція $\bar{r}(t)$ має неперервні похідні до порядку k включно. Гладка крива класу C^1 називається *регулярною* в точці t_0, якщо $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$. Вектор $\bar{r}'(t_0)$ називається *вектором швидкості* кривої у точці t_0. Точка параметризованої кривої, у якій вектор швидкості нульовий, називається *особливою точкою кривої*, всі інші точки кривої називаються *неособливими* або *звичайними*.

Заміна параметра на кривій за законом $t = h(t)$, $t \in I$, $t \in I_1$ називається *припустимою*, якщо функція $h(t)$ в проміжку I має неперервну похідну $h'(t)$, що у всіх точках проміжку I відмінна від нуля.

Для обчислення довжини кривої $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in [a, b]$ використовується формула

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt .$$

Параметризація кривої за допомогою довжини дуги, що відлічується від деякої точки кривої, називається *природною* або *натуральною параметризацією*.

Теорема 1. Параметризація кривої є природною тоді й тільки тоді, коли вектор швидкості кривої задовольняє умові $|\bar{r}'(s)| \equiv 1$.

Доведення. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(s)$, $M_0 = \bar{r}(s_0)$. Тоді

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = |\bar{r}'(t)| \cdot \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} = 1 .$$

В іншу сторону. Нехай $\bar{r}=\bar{r}(t)$, $t\in[a,b]$ і $|\bar{r}'(t)|\equiv 1$ й нехай $0\in[a,b]$ (якщо це не так, можна зробити заміну параметра). Виберемо 0 за початок відліку, тоді $s(t)=\int\limits_0^t 1dt=t$, тобто параметр t є довжиною дуги кривої. **Теорема доведена.**

Щоб знайти натуральну параметризацію кривої, заданої векторним рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(t)$, необхідно

1. Знайти $s=s(t)$ за формулою $s(t)=\int\limits_{t_0}^{t}|\bar{r}'(p)|dp$;
2. Виразити t через s;
3. Підставити у векторне рівняння кривої $t=t(s)$.

Криву в E_3 можна визначити як множину точок, координати яких задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases},$$

де $F(x,y,z)$, $\Phi(x,y,z)$ – скалярні функції змінних x,y,z. Оскільки кожне рівняння системи задає в просторі E_3 поверхню, то крива є перетином поверхонь. Будемо називати такий спосіб завдання кривої *неявним*.

Вектор $\overline{\nabla F}=(F_x,F_y,F_z)$ називається *градієнтом* функції $F(x,y,z)$. Точка M неявно заданої кривої буде неособливою, якщо в ній вектор $\left[\overline{\nabla F},\overline{\nabla \Phi}\right]\neq\bar{0}$. Ця умова рівносильна наступній

$$rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}=2.$$

Нехай M_0 – фіксована точка регулярної кривої, M довільна точка цієї кривої. Граничне положення січної M_0M при прагненні точки M по кривій до точки M_0 називають *дотичною прямою* даної кривої у точці M_0. Площина, що проходить через точку кривої перпендикулярно її дотичній прямій у цій точці, називається *нормальною площиною кривої* в даній точці.

Нехай $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – регулярна крива й точка $M_0 = \bar{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ належить цій кривій. Вектор $\bar{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ є напрямним вектором дотичної прямої у точці M_0 та нормальним вектором нормальної площини, канонічні рівняння яких мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0,$$

відповідно.

Для неявно заданої кривої в її неособливій точці $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ рівняння дотичної прямої та нормальної площини

маають вигляд

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{g}$$

і

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + g(z - z_0) = 0,$$

відповідно, де a, b, g - координати вектора $\left[\overline{\nabla F}, \overline{\nabla \Phi}\right]\Big|_{M_0}$.

Стичною площиною просторової кривої в даній її точці M_0 називається граничне положення, до якого прагне січна площина $(M_0 M_1 M_2)$, за умови, що точки M_1 й M_2 прагнуть по кривій до точки M_0.

Нехай дана гладка класу C^k, $k \geq 2$ крива $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Точка $M_0 = \bar{r}(t_0)$ називається *бірегулярною точкою* цієї кривої, якщо в ній виконана умова $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)] \neq \bar{0}$. У противному випадку точка M_0 називається *точкою розпрямлення*.

Усяка крива в будь-якій своїй бірегулярній точці $M_0 = \bar{r}(t_0)$ має стичну площину, нормальним вектором якої є вектор $[\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)]$.

Головною нормаллю кривої в точці M називається пряма, що є перетином стичної і нормальної площин кривої у цій точці. Пряма, що проходить через точку M й перпендикулярна стичній площині, називається *бінормаллю* кривої в точці M. Площина, яка містить в собі дотичну пряму і бінормаль, називається *спрямною площиною* кривої.

Фігура, що складається із трьох прямих (дотичної, головної нормалі й бінормалі) і трьох площин (нормальної, стичної й спрямної), називається *тригранником Френе*.

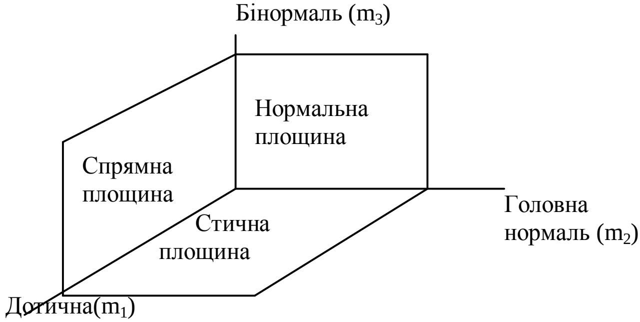

Рис.1 Тригранник Френе

Репером Френе кривої L у її точці M називають правий декартів ортонормований репер $\{M, \overline{m}_1, \overline{m}_2 . \overline{m}_3\}$, базисні вектори якого визначають, відповідно, дотичну, головну нормаль і бінормаль кривої L в точці M .

Щоб знайти координати векторів $\overline{m}_1, \overline{m}_2 . \overline{m}_3$ репера Френе кривої $\bar{r} = \bar{r}(t)$ треба використати формули

$$\overline{m}_1 = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}, \ \overline{m}_3 = \frac{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]}{\|[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]\|}, \ \overline{m}_2 = [\overline{m}_3, \overline{m}_1].$$

Похідні векторів репера Френе можна подати у вигляді лінійних комбінацій векторів базису цього репера:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \overline{m}_1, \quad \frac{d\overline{m}_1}{ds} = k\overline{m}_2, \quad \frac{d\overline{m}_2}{ds} = -k\overline{m}_1 + \aleph\,\overline{m}_3, \quad \frac{d\overline{m}_3}{ds} = -\aleph\,\overline{m}_2,$$

де k й $\aleph$ (читається *каппа*) - скалярні функції натурального параметра s, причому $k(s) > 0$ для кожного $s \in [a, b]$. Ці формули називаються формулами Серре-Френе.

Для кривої $g : \bar{r} = \bar{r}(s)$, параметризованої довжиною дуги, вектор $\overline{N}=\frac{d\overline{m}_1}{ds}=\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$ називається *вектором кривини кривої*. Довжина $\left|\overline{N}\right|=k$ цього вектора називається *кривиною кривої в точці* M. Якщо в точці M кривої $k\neq 0$, то число $R=\frac{1}{k}$ називається *радіусом кривини* кривої у точці M.

Теорема (геометричний зміст кривини). Кривина k кривої $\overline{r}=\overline{r}(s)$ в точці $M_0=\overline{r}(s_0)$ дорівнює кутовій швидкості обертання дотичної прямої навколо точки M_0, тобто $k(s_0)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta j}{\Delta s}$, де Δj – кут повороту дотичної, що відповідає приросту довжини дуги Δs.

Теорема (характеристична властивість прямої). Для того, щоб крива була прямою або її частиною (відрізком, променем), необхідно й достатньо щоб у кожній її точці кривина дорівнювала нулю.

Доведення. **Необхідність**. Нехай $\overline{r}=\overline{r}(s)$ – пряма, що проходить через точку $M_0=\overline{r}_0=\overline{r}(s_0)$ й має напрямний вектор $\overline{a}$, тоді $\overline{r}(s)=\overline{r}_0+\overline{a}s$ – її векторне рівняння. Тому що $\frac{d\overline{r}}{ds}=\overline{a}$, $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}=\overline{0}$, то $k=\left|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|=0$.

Достатність. Нехай для кожного s $k(s)=0$, тобто $k=\left|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|=\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2z}{ds^2}}=0$. Тоді одночасно $\frac{d^2x}{ds^2}=0$, $\frac{d^2y}{ds^2}=0$, $\frac{d^2z}{ds^2}=0$, звідки $\frac{dx}{ds}=a_1$, $\frac{dy}{ds}=a_2$, $\frac{dz}{ds}=a_3$, і, нарешті, $x=a_1s+x_0$, $y=a_2s+y_0$, $z=a_3s+z_0$ – параметричні рівняння кривої. **Теорема доведена.**

Коефіцієнт $\aleph$ у формулах Серре-Френе називається с*крутом кривої*.

Очевидно, що *абсолютний скрут* $|\aleph|$ є абсолютна величина вектора $\dfrac{d\overline{m}_3}{ds}$, тобто $|\aleph| = \left|\dfrac{d\overline{m}_3}{ds}\right|$.

Теорема 5.3 (геометричний зміст абсолютного скруту й знака скруту). Абсолютний скрут кривої в точці M дорівнює кутовій швидкості обертання бінормалі кривої навколо точки M_0, тобто $|\aleph| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$, де Δy – кут повороту бінормалі, що відповідає приросту довжини дуги Δs. Скрут буде додатнім (від'ємним), якщо при спостереженні з кінця вектора швидкості вектор бінормалі при русі точки по кривій обертається проти (по) годинникової стрілки.

Теорема 5.4 (характеристична властивість плоскої кривої). Для того, щоб крива була плоскою, необхідно й достатньо, щоб у кожній її точці скрут дорівнював нулю.

Доведення. **Достатність**. Нехай $\aleph = 0$, тоді $\dfrac{d\overline{m}_3}{ds} = -\aleph\, \overline{m}_2 = \overline{0}$. Отже, $\overline{m}_3 = \overline{const} = \overline{m}_0$. Оскільки $\left(\overline{r}(s), \overline{m}_0\right)' = \left(\overline{r}', \overline{m}_0\right) = \left(\overline{m}_1, \overline{m}_3\right) = 0$, то, інтегруючи, одержимо $\left(\overline{r}(s), \overline{m}_0\right) \equiv C$. Віднімаючи від цієї рівності рівність $\left(\overline{r}(s_0), \overline{m}_0\right) \equiv C$, одержимо $\left(\overline{r}(s) - \overline{r}(s_0), \overline{m}_0\right) \equiv 0$. Звідси випливає, що довільна точка $M = \overline{r}(s)$ кривої належить площині $\left(\overline{R} - \overline{r}(s_0), \overline{m}_0\right) \equiv 0$. Тут $\overline{R}$ – радіус-вектор поточної точки цієї площини.

Необхідність. Нехай $\overline{r} = \overline{r}(s)$ – плоска крива, a – площина, у якій вона лежить. Тому що це дотична площина, то $\overline{m}_3(s)$ – постійний вектор. Виходить, що $\dfrac{d\overline{m}_3}{ds} = -\aleph \overline{m}_2 = \overline{0}$ звідки $\aleph = 0$ для кожного s. **Теорема доведена.**

Формули для обчислення кривини і скруту мають відповідно вигляд

$$k = \frac{\left|\left[\overline{r}', \overline{r}''\right]\right|}{\left|\overline{r}'\right|^3}, \quad \aleph = \frac{\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right)}{\left[\overline{r}', \overline{r}''\right]^2}$$

Для регулярної кривої можна одержати залежності

$$\begin{cases} k = k(s) \\ \aleph = \aleph(s) \end{cases},$$

де s - довжина дуги, які називаються *натуральними рівняннями кривої*.

Теорема (основна теорема теорії кривих). Нехай на множині $I = (0, S)$ задані функції $k(s) > 0$ й $\aleph(s)$ класів C^1 і C^0 відповідно. Тоді існує єдина (з точністю до положення в просторі) регулярна крива, для якої $k(s)$ і $\aleph(s)$ є відповідно кривиною та скрутом в точці, яка відповідає значенню параметра $s \in (0, S)$.

1.2 Завдання для тестування з теорії кривих

1) Яка з точок $A(-1,-5,-3)$ $B(2,-1,3)$ належить прямій $\bar{r}(t)=(t+1,2t-3,3t)$?

а	б	в	г
A	*B*	*A и B*	*жодна*

2) Яка з впорядкованих тройок векторів може складати базис репера Френе даної кривої в точці?

а	б	в	г
$\bar{a}=(-2,5,-3)$ $\bar{b}=(-1,1,1)$ $\bar{c}=(2,3,1)$	$\bar{a}=(1,0,0)$ $\bar{b}=(0,2,1)$ $\bar{c}=(0,-1,2)$	$\bar{a}=\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\bar{b}=(1,0,0)$ $\bar{c}=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$	$\bar{a}=(1,0,0)$ $\bar{b}=\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\bar{c}=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

3) Яка з векторних функцій задає криву класу C^1 на множині $I=(-1,1)$?

а	б	в	г
$\bar{r}(t)=(\lg t,2t)$	$\bar{r}(t)=\left(\frac{1}{t},t^2\right)$	$\bar{r}(t)=(t+1,\lvert t\rvert)$	$\bar{r}(t)=(t,t^2)$

4) Вектор $\bar{a}$ є дотичним до кривої $\bar{r}(t)=(t-\sin t,1-\cos t,\sin t)$ в точці $M(\frac{p}{2}-1,1,1)$

а	б	в	г
$\bar{a}=(0,0,1)$	$\bar{a}=(1,3,2)$	$\bar{a}=(3,3,0)$	$\bar{a}=(1,1,0)$

5) Яке з тверджень не вірне для кривої $\bar{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 0)$?

а	б	в	г
скрут дорівнює 0	*кривина є постійною*	*Параметр t - натуральний*	*Кривина в точці $M=\bar{r}(0)$ дорівнює* $\frac{1}{2}$

Модульна контрольна робота №1 (зразок)
«Диференціальна геометрія кривих»

I. Теоретична частина (5 балів).

1. Визначення векторної функції одного скалярного аргумента.
2. Записати рівняння дотичної прямої до кривої, заданої за допомогою векторної функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в точці $M(t_0)$.
3. Зробити рисунок «Супровідного триграника кривої» та назвати його елементи.
4. Сформулювати теорему про геометричний зміст кривини кривої.
5. Записати формули Серре-Френе кривої.

II. Тестова частина (3 бали).

1. Скрут у вершині $A(a,0)$ еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

а	б	в	г
дорівнює 0	*дорівнює* $\dfrac{1}{a}$	*додатній*	*від'ємний*

2. Кривина кола $x^2 + y^2 = 3$ в точці на осі OX

а	б	в	г
дорівнює $\dfrac{1}{3}$	*дорівнює* 3	*дорівнює* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	*дорівнює* $\sqrt{3}$

3. Точка $M(1,0,1)$ належить кривій

а	б	в	г
$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$	$\bar{r}(t) = (t^2, t+1, \ln\frac{1}{t})$	$\bar{r}(t) = (t^2, t-1, t^3)$	$\bar{r}(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t, \sin t \cos t)$

III. Практична частина (12 балів).

1. $\bar{r} = \bar{r}(s)$ - векторне рівняння кривої, s - довжина дуги. Довести співвідношення: $(\bar{r}', \bar{r}''') = -k^2$
2. Знайти кривину та скрут кривої
$\bar{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ в т. $M(1,0,1)$

3. Скласти рівняння стичної площини кривої
$\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ в точці $M(1,3,4)$

4. Знайти натуральну параметризацію кола радіуса 3.

1.3 Приклади розв'язування задач з теорії кривих

Приклад 1. Перейти до натуральної параметризації прямої, заданої рівнянням $\bar{r}(t)=(t+1,2t-3,3t)$.

Розв'язання. Знайдемо $\bar{r}'(t)=(1,2,3)$, $|\bar{r}'(t)|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$,

$s(t)=\int\limits_0^t |\bar{r}'(t)|dt=\int\limits_0^t \sqrt{14}dt=\sqrt{14}t$. Звідси $t=s/\sqrt{14}$.

Підставивши знайдене $t=t(s)$ в рівняння прямої, одержимо шукану натуральну параметризацію $\bar{r}(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{14}}+1,\frac{2s}{\sqrt{14}}-3,\frac{3s}{\sqrt{14}}\right)$.

Приклад 2. Нехай дана крива $\bar{r}(t)=\left(t+1,t^2-t+3,\sin 2t\right)$. Знайти рівняння дотичної прямої, нормальної й стичної площин в точці $M=\bar{r}(0)$.

Розв'язання. Знайдемо декартові координати точки $M=\bar{r}(0)=(1,3,0)$. Напрямний вектор дотичної прямої в довільній точці $\bar{r}'(t)=(1,2t-1,2\cos(2t))$, а в точці M - $\bar{r}'(0)=(1,-1,2)$.

Канонічні рівняння дотичної прямої в точці M $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-0}{2}$. Для складання рівняння нормальної площини у нас є координати точки та координати нормального вектора. Тому $1(x-1)+(-1)(y-3)+2(z-0)=0$, або, після зведення подібних доданків, отримаємо рівняння нормальної площини у вигляді $x-y+2z+2=0$.

Далі знайдемо $\bar{r}''(t)=(0,2,-4\sin(2t))$ в довільній точці, а потім в точці M, отримаємо $\bar{r}''(0)=(0,2,0)$. Тепер можемо знайти координати нормального вектора стичної площини в точці M :

$$[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=$$

$=-4\bar{i}+0\,\bar{j}+2\bar{k}$. Таким чином, координатами нормального вектора стичної площини є числа $-4,0,2$.

Рівняння стичної площини $-4(x-1)+0(y-3)+2(z-0)=0$, або після зведення подібних доданків отримаємо $2x-z+2=0$.

Приклад 3. Знайти рівняння дотичної прямої та нормальної площини до кривої $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-14=0\\ x^2-y+3z-8=0\end{cases}$ в точці $M(1{,}2{,}3)$.

Розв'язання. Крива задана неявно, тобто належить одночасно двом поверхням. Для функції $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$ знайдемо $F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=2z$.

Підставивши координати точки M, одержимо координати градієнта цієї функції $\left.\overline{\nabla F}\right|_M=(2{,}4{,}6)$. Аналогічно для функції $\Phi(x,y,z)=x^2-y+3z-8$ $\Phi'_x=2x, \Phi'_y=-1, \Phi'_z=3$, $\left.\overline{\nabla \Phi}\right|_M=(2,-1{,}3)$.

Знайдемо координати напрямного вектора дотичної прямої заданої кривої в точці M

$$\left.\left[\overline{\nabla F},\overline{\nabla \Phi}\right]\right|_M=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & 6\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=18\bar{i}+6\,\bar{j}-10\bar{k}=(18{,}6,-10)\ .$$

Отже, рівняння дотичної прямої $\dfrac{x-1}{18}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-3}{-10}$, а рівняння нормальної площини $18(x-1)+6(y-2)-10(y-3)=0$.

Приклад 4. Знайти координати векторів базису Френе кривої $\bar{r}(t)=\left(t^2-1,t+3,\sin(2t)\right)$ у точці M, що відповідає значенню параметра $t=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}'(t)=\left(2t,1,2\cos(2t)\right)$, $\bar{r}''(t)=\left(2,0,-4\sin(2t)\right)$. Підставивши значення параметра, одержимо $\bar{r}'(0)=(0,1,2),\bar{r}''(0)=(2,0,0)$. Далі обчислимо

$$[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=(0,4,-2)$$

Для знаходження координат векторів базису Френе в точці $M=\bar{r}(0)$ скористаємось формулами $\overline{m}_1(0)=\dfrac{\bar{r}'(0)}{|\bar{r}'(0)|}$, $\overline{m}_3(0)=\dfrac{[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]}{\|[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]\|}$, $\overline{m}_2(0)=[\overline{m}_3,\overline{m}_1]$, отримаємо

$$\overline{m}_1(0)\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}(0,1,2)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\overline{m}_3(0)=\frac{1}{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}}(0,4,-2)=\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\overline{m}_2(0)=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{5}{5}\bar{i}=(1,0,0).$$

Приклад 5. Знайти кривину й скрут кривої $\bar{r}(t)=\left(t^2-1,t+3,\sin(2t)\right)$ в точці M, що відповідає значенню параметра $t=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}'(t)=\left(2t,1,2\cos(2t)\right)$, , $\bar{r}''(t)=\left(2,0,-4\sin(2t)\right)$, $\bar{r}'''(t)=\left(0,0,-8\cos(2t)\right)$.

Підставивши значення параметра, одержимо

$\bar{r}'(0)=(0,1,2)$, $\bar{r}''(0)=(2,0,0)$, $\bar{r}'''(0)=(0,0,-8)$.

Далі обчислимо $|\bar{r}'(0)|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$$[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}=(0,4,-2)$$

$$|[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)]|=\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5},$$

$$(\bar{r}'(0),\bar{r}''(0),\bar{r}'''(0))=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{vmatrix}=2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -8\end{vmatrix}=16.$$

Використовуючи формули для кривини та скрута кривої, одержимо $k=\dfrac{[\bar{r}',\bar{r}'']}{|\bar{r}'|^3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^3}=\dfrac{2}{5}$, $\aleph=\dfrac{(\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}''')}{[\bar{r}',\bar{r}'']^2}=\dfrac{16}{(2\sqrt{5})^2}=\dfrac{4}{5}$.

Приклад 6. Довести твердження: якщо всі стичні площини бірегулярної кривої проходять через фіксовану точку, то ця крива плоска.

Доведення. Нехай s - натуральний параметр, тоді $\bar{r}=\bar{r}(s)$– рівняння кривої. $(\bar{R}-\bar{r}(s),\bar{m}_3(s))=0$ - рівняння стичної площини.

Оберемо початок координат в фіксованій точці, тоді всі стичні площини проходять через початок координат, отже $\bar{R}=\bar{0}$ задовольняє рівнянню стичної площини. З цього виходить, що для будь-якого значення s виконується рівність $(\bar{r}(s),\bar{m}_3(s))=0$. Продиференціюємо останню рівність по s, отримаємо

$$(\bar{r}'(s),\bar{m}_3(s))+(\bar{r}(s),\bar{m}_3'(s))=0.$$

Скористаємося формулами Френе: $(\bar{m}_1(s),\bar{m}_3(s))+(\bar{r}(s),-\aleph\bar{m}_2'(s))=0$. Перший доданок дорівнює 0, тому $-\aleph(\bar{r}(s),\bar{m}_2'(s))=0$. Скалярний добуток $(\bar{r}(s),\bar{m}_2'(s))$ не може дорівнювати 0 при любому s, тому $\aleph=0$, тобто крива є плоскою.

Приклад 7. Довести співвідношення $(\bar{r}'', \bar{r}''') = kk'$.

Доведення. Будемо вважати, що параметром кривої є довжина дуги. До такої параметризації завжди можна перейти. Тоді за формулами Френе $\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{ds} = \overline{m}_1$, $\bar{r}'' = \frac{d\overline{m}_1}{ds} = k\overline{m}_2$. Знайдемо третю похідну по параметру s:

$$\bar{r}''' = \frac{d(k\overline{m}_2)}{ds} = k'\overline{m}_2 + k\overline{m}_2' = k'\overline{m}_2 + k(-k\overline{m}_1 + \aleph\,\overline{m}_3) = -k^2\overline{m}_1 + k'\overline{m}_2 + k\aleph\,\overline{m}_3$$

Таким чином, відносно базису Френе $\bar{r}'' = (0, k, 0)$, $\bar{r}''' = (-k^2, k', k\aleph)$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів: $(\bar{r}'', \bar{r}''') = 0 \cdot (-k^2) + kk' + 0 \cdot k\aleph = kk'$, а це і потрібно було довести.

Приклад 8. Записати натуральні рівняння кривої $\bar{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right)$.

Розв'язання. Перш за все знайдемо кривину і скрут кривої в довільній точці $M = \bar{r}(t)$, а потім виразимо параметр t через натуральний параметр і запишемо рівняння $\begin{cases} k = k(s) \\ \aleph = \aleph(s) \end{cases}$.

Знаходимо $\bar{r}'(t) = \left(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\right)$, $\bar{r}''(t) = \left(e^t, e^{-t}, 0\right)$, $\bar{r}'''(t) = \left(e^t, -e^{-t}, 0\right)$,

$$[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} e^t & \sqrt{2} \\ e^t & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2\right),$$

$$(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = ([\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)], \bar{r}'''(t)) = \left(-\sqrt{2}e^{-t}\right) \cdot e^t + \sqrt{2}e^t \cdot \left(-e^{-t}\right) + 2 \cdot 0 =$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2},$$

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} = e^t + e^{-t},$$

$$\left|[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]\right| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \sqrt{2}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Таким чином,

$$k=\frac{\left|\left[\bar r'(t),\bar r''(t)\right]\right|}{\left|\bar r'(t)\right|^3}=\frac{\sqrt{2}\left(e^t+e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^3}=\frac{\sqrt{2}}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$$

$$\aleph=\frac{\left(\bar r'(t),\bar r''(t),\bar r'''(t)\right)}{\left[\bar r'(t),\bar r''(t)\right]^2}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$$

Перейдемо до натурального параметра

$$s=\int_0^t\left|\bar r'(p)\right|dp=\int_0^t\left(e^p+e^{-p}\right)dp=\left(e^p-e^{-p}\right)\Big|_0^t=e^t-e^{-t}.$$

Тепер ми можемо виразити параметр t через параметр s. Але нам досить виразити через s квадрат e^t+e^{-t}.

Тому що $(e^t+e^{-t})^2=(e^t-e^{-t})^2+4=s^2+4$, то натуральні рівняння даної кривої будуть мати вигляд

$$\left\{k=\frac{\sqrt{2}}{s^2+4},\ \aleph=-\frac{\sqrt{2}}{s^2+4}\right..$$

Приклад 9. Відновити криву за її натуральними рівняннями $\begin{cases}k(s)=2s\\ \aleph(s)=0\end{cases}$.

Розв'язання. За умовою скрут в довільній точці кривої дорівнює нулю. Це означає, що крива лежить у деякій площині. Приймемо цю площину за OXY. Рівняння кривої будемо шукати у вигляді $\bar r(s)=(x(s),y(s),0)$. Тому що параметр натуральний, то $\left|\bar r'(s)\right|=\sqrt{(x'(s))^2+(y'(s))^2}\equiv 1$. Звідси випливає, що існує така функція $a(s)$, що $x'=\cos a(s)$, $y'=\sin a(s)$, тобто $\bar r'(s)=(\cos a(s),\sin a(s),0)$. Знайдемо вектор кривини $\bar r''(s)=(-a'(s)\sin a(s),a'(s)\cos a(s),0)$. Відомо, що $k(s)=\left|\bar r''(s)\right|$, тому $k(s)=\sqrt{(-a'\sin a)^2+(a'\cos a)^2}=a'(s)=2s$ або $\frac{da}{ds}=2s$. Звідси одержимо, що $a(s)=\int 2s\,ds=s^2$. У такий спосіб

$\bar{r}'(s) = \left(\cos s^2, \sin s^2, 0\right)$, а звідси $\bar{r}(s) = \left(\int\limits_0^s \cos s^2 ds, \int\limits_0^s \sin s^2 ds, 0\right)$.

1.4 Задачі з теорії кривих для самостійної роботи

1. Довести, що замкнена лінія $\bar{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ має довжину $s = 10$. (*Вказівка.* Крива замкнена, тому $t \in [0,2p]$).
2. Знайти натуральну параметризацію кривої $y = 5x - 1$, якщо $x \in [1,2]$.
3. Знайти кут, між віссю OZ та дотичним вектором до кривої $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2}$.
4. Знайти кути, під якими перетинаються наступні криві: $y^2 = 4x$ і $x^2 = 4y$. (*Вказівка.* Знайти точки перетину кривих, параметризувати криві).
5. Знайти параметричні рівняння головної нормалі та бінормалі лінії $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$ в точці $M(1,1,1)$.
6. Довести, що головна нормаль гвинтової лінії $\bar{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ht)$ перетинає її вісь під прямим кутом.
7. Знайти рівняння елементів тригранника Френе, побудованого в точці $M = \bar{r}(0)$ кривої $\bar{r}(t) = \left(t^2 - 1, t + 3, \sin(2t)\right)$.
8. Довести $(\bar{m}_3', \bar{m}_3'', \bar{m}_3''') = \aleph^5 (\frac{k}{\aleph})'$. (*Вказівка.* Скористатися формулами Серре-Френе. Ліву і праву частину звести до одного і того ж виду).
9. Знайти кривину й скрут кривої $\bar{r}(t) = \left(t^2 - 1, t + 3, \sin(2t)\right)$ в точці M, що відповідає значенню параметра $t = 0$.
10. Знайти кривину кривої $y = \sin x$.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХОНЬ

2.1 Основні теоретичні відомості з теорії поверхонь тривимірного евклідового простору

Нехай E_3 - тривимірний евклідів простір й V - деяка область числової площини R^2. *Вектором-функцією двох аргументів* $\bar{r}(u,v)$, заданою на V, називається відображення, при якому кожній парі $(u,v)\in V$ відповідає вектор $\bar{r}(u,v)$ простору E_3.

Розкладання вектора $\bar{r}(u,v)$ по векторах ортонормованого базису $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ простору E_3 має вигляд

$$\bar{r}(u,v)=x(u,v)\bar{i}+y(u,v)\bar{j}+z(u,v)\bar{k}.$$

Скалярні функції $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ називаються *координатами вектора-функції* $\bar{r}(u,v)$ в цьому базисі. Поняття границі, неперервності вектор-функцій двох аргументів вводяться аналогічно відповідним поняттям для вектор-функцій одного скалярного аргументу. Те ж саме стосується й операцій над векторними функціями. Невелика відмінність стосується диференціювання. Замість однієї похідної у вектора-функції двох аргументів є дві частині похідні, які будемо позначати $\bar{r}_u(u,v), \bar{r}_v(u,v)$ або $\frac{\partial\bar{r}}{\partial u},\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}$, або $\partial_u\bar{r},\partial_v\bar{r}$.

Нехай V - деяка область на площині R^2 з декартовими координатами u, v. *Параметризованою поверхнею* називається неперервне відображення з області V в простір E_3, при якому кожній парі $(u,v)\in V$ відповідає точка простору E_3. Змінні u, v називаються параметрами поверхні. Образ області V називається *образом* або *носієм поверхні*.

Зазначена у визначенні відповідність за умови фіксування в E_3 реперу $\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ визначає неперервну вектор-функцію $\bar{r}(u,v)$. Тому, рівняння $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ називається *векторним рівнянням* поверхні, а рівняння $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ - *параметричними рівняннями.*

Поверхня F, задана векторною функцією $\bar{r}(u,v)$, називається *поверхнею класу* C^k, якщо вектор-функція F має неперервні частинні похідні до k-го порядку включно. Якщо крім цього виконується умова $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq \bar{0}$, то поверхня називається регулярною. Точки нерегулярної поверхні, у яких $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] = \bar{0}$, називаються *особливими*.

Нехай крива $f : \bar{c}(t) = (u(t), v(t))$, що задана в області V, регулярна. Тоді її образ на регулярній поверхні $F : \bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in V$ також є регулярною кривою. Це так, тому що вектор-функція $\overline{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, що задає образ регулярної кривої l на поверхні F, регулярна як складна функція двох регулярних функцій $\bar{r}(u,v), \bar{c}(t)$.

Параметричні рівняння $u = u(t), v = v(t)$ називаються *внутрішніми рівняннями кривої на поверхні* $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$.

Криві на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, що мають внутрішні рівняння $u = t, v = v_0 = const$ й $v = t, u = u_0 = const$ називаються *координатними лініями*. Координатні лінії регулярної поверхні утворюють дві сім'ї регулярних кривих.

Площина, що проходить через точку M_0 поверхні F й містить всі дотичні прямі до всіх регулярних кривих поверхні, що проходять через цю точку, називається *дотичною площиною поверхні* в даній точці. Позначають $T_{M_0}F$. *Нормаллю* регулярної поверхні в даній її точці називається пряма, що проходить через цю точку й перпендикулярна дотичній площині поверхні в даній точці

Дотична площина визначається точкою $M_0(u_0, v_0)$ й направляючим бівектором $[\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)]$. Рівняння дотичної площини та нормалі мають відповідно вигляд

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + g(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{g}.$$

де a,b,g - координати вектора $[\bar{r}_u,\bar{r}_v](M_0)$.

Якщо поверхня задана неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$ і вектор $\overline{N}=(F_x,F_y,F_z)\neq\overline{0}$ у точці $M(x,y,z)$, то вектор $\overline{N}$ перпендикулярний до дотичної площини поверхні в точці M.

Рівняння дотичної площини й нормалі поверхні $F(x,y,z)=0$ в точці (x,y,z) мають відповідно вигляд

$$F'_x(\bar{x}-x)+F'_y(\bar{y}-y)+F'_z(\bar{z}-z)=0,$$

$$\frac{\bar{x}-x}{F'_x}=\frac{\bar{y}-y}{F'_y}=\frac{\bar{z}-z}{F'_z},$$

де (x,y,z) - довільна точка дотичної площини або нормалі.

Нехай F – регулярна поверхня, задана рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$. У будь-якій точці $M=\bar{r}(u,v)\in F$ існує локальний репер $\{M,\bar{r}_u,\bar{r}_v\}$, вектори базису якого визначають дотичну площину T_MF. Будемо розглядати дотичну площину як двовимірний векторний простір. Вектори цього простору мають вигляд $d\bar{r}=\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv$. Введемо в T_MF структуру евклідового простору за допомогою скалярного добутку векторів і знайдемо

$$(d\bar{r},d\bar{r})=(\bar{r}_u,\bar{r}_u)(du)^2+2(\bar{r}_u,\bar{r}_v)du dv+(\bar{r}_v,\bar{r}_v)(dv)^2,$$

або, позначивши

$$(\bar{r}_u,\bar{r}_u)=g_{11},\ (\bar{r}_u,\bar{r}_v)=g_{12},\ (\bar{r}_v,\bar{r}_v)=g_{22},$$

одержимо

$$d\bar{r}^2=g_{11}du^2+2g_{12}du dv+g_{22}dv^2 -$$

квадратичну форму від змінних du,dv. Вона визначена в дотичній площині поверхні й називається *першою квадратичною формою поверхні*.

Матриця $(g_{ij})=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ називається *матрицею першої* *квадратичної форми,* а $g = \det(g_{ij})$ - її *детермінантом*.

Для регулярної поверхні $\bar{r}_u \neq 0, \bar{r}_v \neq 0$, а також $\bar{r}_u{}^2 \bar{r}_v{}^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2 \geq 0$. Тому перша квадратична форма додатно-визначена.

Нехай $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – регулярна поверхня й регулярна крива g цієї поверхні задана внутрішніми рівняннями $u = u(t), v = v(t)$. Векторне рівняння $\bar{R}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ являє собою зовнішнє рівняння кривої g. Для довжини дуги кривої g маємо:

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\bar{R}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| d\bar{R} \right|,\ a \leq t \leq b.$$

Оскільки $\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{r}_u \dfrac{du}{dt} + \bar{r}_v \dfrac{dv}{dt}$, то $d\bar{R} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, і значить

$$s = \int_a^b \left| d\bar{R} \right| dt = \int_a^b \sqrt{d\bar{R}^2} = \int_a^b \sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}.$$

Таким чином, $ds = \left| d\bar{R} \right|$, але тоді $ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{12}dv^2$.

Перша квадратична форма поверхні є квадратом диференціала довжини дуги кривої, що лежить на поверхні. Це твердження розкриває *геометричний зміст першої квадратичної форми*.

Кутом між кривими називається кут f між дотичними прямими в точці перетину кривих. Для обчислення кута існує формула

$$\cos f = \frac{g_{11}dud\ u + g_{12}(dud\ v + dvd\ u) + g_{22}dvd\ v}{\sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}\sqrt{g_{11}d\ u^2 + 2g_{12}d\ ud\ v + g_{22}d\ v^2}}.$$

Тут du, dv - координати направляючого вектора дотичної прямої до однієї кривої відносно локального репера, оскільки $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$. Аналогічно du, dv - локальні координати направляючого вектора дотичної прямої до другої кривої. В цій формулі коефіцієнти g_{ij} потрібно обчислювати в точці перетину кривих.

Частинний випадок (кут між координатними лініями). Нехай

$$g\ :\ u = const,\ \tilde{g}\ :\ v = const.$$

Тоді $du = 0$, dv – будь- яке, $d\ v = 0$, $d\ u$ – будь-яке, і

$$\cos f = \frac{g_{12} dv d\ u}{\sqrt{g_{22} dv^2}\sqrt{g_{11} d\ u^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}.$$

Теорема (критерій ортогональності координатної сітки поверхні): координатна сітка поверхні ортогональна тоді й тільки тоді, коли другий коефіцієнт першої квадратичної форми поверхні дорівнює нулю, тобто $g_{12} = 0$.

Нехай F – регулярна поверхня, G – область на цій поверхні, обмежена скінченим числом кусково-гладких кривих. Розіб'ємо область G на маленькі області кусково-гладкими кривими. Нехай g – одна з таких областей. Візьмемо в області g точку P. Побудуємо в точці P дотичну площину й спроектуємо всю область g на цю дотичну площину. У дотичній площині одержуємо область $\bar{g}$. Під площею області G будемо розуміти число

$$S = \lim_{V(\bar{g}) \to 0} \sum_{g} S(\bar{g}),$$

де $S(\bar{g})$ – площа плоскої області $\bar{g}$, $V(\bar{g})$ – діаметр області $\bar{g}$.

Нехай поверхня $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ визначена на множині V, тобто $(u, v) \in V$. Розглянемо комірку

$$MM_1M_2M_3:\ M = \bar{r}(u, v),\ M_1 = \bar{r}(u + du, v),$$
$$M_2 = \bar{r}(u, v + dv),\ M_3 = \bar{r}(u + du, v + dv),$$

обмежену координатними лініями $g : u = const$ і $\tilde{g} : v = const$. Для довжин сторін MM_1 і MM_2 маємо:

$$dS^2 = g_{22} dv^2 = \bar{r}_v^2 dv^2,\ dS = |\bar{r}_v| dv,$$
$$dS^2 = g_{11} dv^2 = \bar{r}_u^2 du^2,\ dS = |\bar{r}_u| du.$$

Замінимо комірку паралелограмом зі сторонами dS й dS і позначимо через ΔS його площу. Тоді

$$\Delta S = \left|[\bar{r}_u du, \bar{r}_v dv]\right| = \left|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]\right| du dv = \sqrt{[\bar{r}_u, \bar{r}_u]^2}\, du dv = \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \sin^2 j}\, du dv =$$

$$= \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \left(1 - \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2}{r_u^2 r_v^2}\right)} du dv = \sqrt{\bar{r}_u^2 r_v^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2}\, du dv = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, du dv$$

Підсумувавши й перейшовши до границі, одержимо

$$S = \iint\limits_{V} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^{2}}\, dudv\,,$$

причому $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, тому що перша квадратична форма додатно-означена.

Другою квадратичною формою поверхні F в її точці P називається квадратична форма, визначена в дотичній площині $T_P F$ до поверхні. Позначають $II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$, для коефіцієнтів існують формули

$$h_{11} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\,,\ h_{12} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\,,\ h_{22} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\,.$$

Геометричний зміст другої квадратичної форми: половина другої квадратичної форми поверхні є головною частиною відхилення точки P поверхні від дотичної площини поверхні в точці P_0. Знак «+» для h вказує на те, що кінець вектора $\bar{n}_0$ й точка P лежать по одну сторону від дотичної площини (кут j – гострий), а знак «–» – що по різні (кут j – тупий).

Нехай крива g лежить на поверхні $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ класу C^2 і має рівняння $u = u(s), v = v(s)$, де s – натуральний параметр. Тоді $\overline{R}(s) = \bar{r}(u(s), v(s))$ – зовнішнє рівняння кривої g і $\overline{R}'(s) = \overline{m}_1$, $\overline{R}''(s) = k\overline{m}_2$ – вектор кривини кривої.

Нормальною кривиною $k_н$ *кривої* g на поверхні F називається ортогональна скалярна проекція вектора кривини цієї кривої на нормаль поверхні: $k_н = np_{\bar{n}}\overline{R}''(s) = np_{\bar{n}}k\overline{m}_2$.

Нормальна кривина кривої на поверхні обчислюється за формулою

$$k_н = \frac{II}{I}\,,$$

де II – друга квадратична форма поверхні, I – перша квадратична форма поверхні.

Нормальна кривина $k_н$ кривої $\overline{R}(s)=\overline{r}(u(s),v(s))$ пов'язана з її кривиною k формулою

$$k_н = k\cos\Theta,$$

де Θ – кут між векторами $\overline{n}$ і $\overline{m}_2$.

Нормальна кривина поверхні залежить лише від дотичного вектора кривої.

Нормальним перетином поверхні F у точці M називається плоска крива, що є перетином поверхні F з площиною, яка проходить через нормаль поверхні в точці M.

Головними кривинами поверхні в точці P називаються найбільше і найменше із нормальних кривин в цій точці. *Головними напрямками поверхні* в точці P називаються напрямки кривих поверхні, що мають в точці P головні кривини. Головні кривини позначаються k_1, k_2.

У кожній точці поверхні існують або два і лише два взаємно ортогональних головних напрямка, або будь-який напрямок є головним.

Точка поверхні називається *омбілічною*, якщо в ній головні кривини співпадають, або, що те ж саме, в цій точці будь-який напрямок є головним. Таким чином, в омбілічній точці нормальна кривина будь-якого нормального перетину є головною і всі вони рівні між собою.

Точка поверхні є омбілічною тоді і тільки тоді, коли в ній пропорційні коефіцієнти першої і другої квадратичних форм, тобто

$$\frac{h_{11}}{g_{11}}=\frac{h_{12}}{g_{12}}=\frac{h_{22}}{g_{22}}.$$

Теорема (Характеристична властивість сфери). Регулярна поверхня класу C^3 є сферою тоді і тільки тоді, коли будь-яка її точка омбілічна.

Теорема (формула Ейлера). Нехай j – кут, утворений напрямком вектора $\overline{x}$ у дотичній площині $T_M F$ з одним з головних напрямків, наприклад, з напрямком $\overline{e}_1$, і k_1, k_2 – головні кривини поверхні в точці M. Тоді $k_н(\bar{x}) = k_1 \cos^2 j + k_2 \sin^2 j$.

Повною (гаусовою) кривиною поверхні в її регулярній точці називається добуток головних кривин в цій точці: $K = k_1 k_2$. *Середньою кривиною* поверхні в її регулярній точці називається напівсумма головних кривин в цій точці: $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$.

Головні кривини k_1 і k_2 поверхні є коренями квадратного рівняння

$$\begin{vmatrix} h_{11} - kg_{11} & h_{12} - kg_{12} \\ h_{12} - kg_{12} & h_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Повна кривина K і середня кривина H обчислюються за формулами

$$K = \frac{h}{g} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}{}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2},$$

$$2H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{g}.$$

Координати du, dv головних напрямків поверхні знаходяться з рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Крива на поверхні називається *лінією кривини*, якщо в кожній її точці дотична пряма має головний напрямок. Для того, щоб координатна сітка поверхні була сіткою ліній кривини, необхідно і достатньо, щоб $g_{12} = h_{12} = 0$.

Напрямок на поверхні в даній її точці називається *асимптотичним*, якщо нормальна кривина в цьому напрямку в цій точці дорівнює нулю.

Оскільки нормальна кривина поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in U$ у напрямку $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ обчислюється за формулою $k_н = \dfrac{II}{I}$, то вимога рівності її нулю записується у вигляді рівняння

$$h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2 = 0.$$

Крива на поверхні називається *асимптотичною*, якщо в кожній її точці нормальна кривина дорівнює нулю.

Теорема 11.3 (критерій асимптотичної лінії). Крива на поверхні буде асимптотичною тоді і тільки тоді, коли вона або пряма, або в кожній її точці стична площина співпадає з дотичною площиною до поверхні в цій точці.

Доведення. Вважатимемо, що крива параметризована довжиною дуги. Тоді для обчислення її нормальної кривини можна користуватися формулою Меньє $k_н = k\cos\Theta$. Рівність нулю нормальної кривини рівносильна сукупності вимог: $k = 0$ або $\cos\Theta = 0$. Перша з них виконується тоді і тільки тоді, коли крива є прямою або її частиною, а з другої випливає ортогональність вектора $\overline{n}$ нормалі поверхні і вектора $\overline{m}_2$ головної нормалі кривої. Але оскільки вектори $\overline{n}$ і $\overline{m}_1$ також ортогональні, то звідси і випливає, що вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до дотичної площини кривої. В протилежну сторону, якщо стична і дотична площини співпадають, то $\cos\Theta = 0$. **Теорему доведено.**

Точка поверхні називається *гіперболічною* або *параболічною*, якщо в ній існують відповідно два дійсних різних або однакових асимптотичних напрямки. *Точка* поверхні називається *еліптичною*, якщо в ній не існує дійсних асимптотичних напрямків. Якщо в точці поверхні будь-який напрямок є асимптотичним, то вона називається *планарною*.

Пригадаємо також, що повна кривина поверхні обчислюється за формулою $K = \dfrac{h}{g}$, тому в гіперболічній точці $K < 0$, в параболічній – $K = 0$, в еліптичній – $K > 0$. Звідси випливає, що в гіперболічній точці головні кривини мають різні знаки і поверхня нагадує гіперболічний параболоїд, в параболічній точці одна з головних кривин дорівнює нулю, і, значить в її околі поверхня нагадує циліндр, в еліптичній точці головні кривини поверхні одного знаку і в околі такої точки поверхня схожа на еліптичний параболоїд.

Нехай задана регулярна поверхня $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ і M - деяка точка поверхні F. Вектори $\overline{r}_u(M), \overline{r}_v(M), \overline{n}(M)$, де $\overline{n}(M)$ – одиничний вектор нормалі, утворюють локальний базис. Репер з початком в точці M і базисом $\bar{r}_u(M), \bar{r}_v(M), \bar{n}(M)$ називається

гаусовим репером поверхні.

Дериваційні формули рухомого репера виражають похідні від векторів його базису через лінійні комбінації векторів базису репера. Дериваційні формули гаусового репера називаються дериваційними формули *Вейнгартена*.

Дериваційні формули Вейнгартена мають вигляд

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + h_{ij}\bar{n}, \qquad \bar{n}_i = -h_{ik} g^{kj} \bar{r}_j .$$

Тут $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijm} g^{mk}$, $\Gamma_{ijm} = (\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m)$, h_{ij} – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, g^{kj} - елементи матриці, оберненої до матриці (g_{ij}) першої квадратичної форми, величини Γ_{ij}^k називаються *символами Крістоффеля II роду,* величини Γ_{ijm} – *символами Крістоффеля I роду,* причому

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}), \; g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ij}).$$

Гаусова (повна) кривина поверхні може бути виражена тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх частинні похідні. Цей факт випливає з наступної формули

$$K = \frac{h}{g} = \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2\right),$$

тому що символи Крістоффеля виражаються через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх частинні похідні.

Теорема (Бонне). Нехай U – відкрита зв'язна область на R^2 і нехай на U задані дві квадратичні форми

$$g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

і

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 ,$$

для яких виконані умови:

1.Перша квадратична форма додатно-означена;

2.Всі функції $g_{ij} = g_{ij}(u,v), h_{ij} = h_{ij}(u,v)$ і їх частинні похідні в області U є функціями класу $C^k, k \geq 1$;

3.Функції g_{ij} і h_{ij} зв'язані рівняннями Гауса і Петерсона-Кодацци-Майнарді.

Тоді існує регулярна поверхня, для якої задані форми є відповідно першою і другою квадратичними формами. Крім того, ці форми визначають поверхню однозначно з точністю до положення в просторі.

Геодезичною кривиною k_g регулярної *кривої* на регулярній поверхні в даній точці називається скалярна проекція вектора кривини кривої в цій точці на дотичну площину поверхні в тій же точці.

Геодезична кривина k_g кривої $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$ на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ обчислюється за формулою

$$k_g = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{\left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix},$$

де по індексах $i, j = 1,2$ виконується підсумовування.

Лінія на поверхні називається *геодезичною*, якщо її геодезична кривина в кожній точці дорівнює нулю.

Відповідно до формули для обчислення k_g диференціальне рівняння геодезичних ліній поверхні може бути записане у вигляді

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Для того, щоб лінія на поверхні була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб вона була або прямою, або в кожній її точці співпадали головна нормаль і нормаль до поверхні.

Розглянемо деякі **властивості геодезичних ліній поверхні**.

1.При ізометричних відображеннях поверхні геодезичні лінії переходять в геодезичні.

2.Із всіх кривих поверхні, що проходять через дану точку і мають в цій точці спільну дотичну пряму, геодезична лінія має найменшу кривину.

Доведення. Для будь-якої кривої поверхні має місце формула $k^2 = k_g^2 + k_н^2$. Оскільки криві мають в даній точці спільну дотичну пряму, то вони мають в цій точці одну і ту ж нормальну кривину $k_н$, але для геодезичної лінії, що проходить через цю точку, геодезична кривина k_g дорівнює нулю, тому для геодезичної лінії кривина k буде найменшою, **що і потрібно було довести**.

Завдяки цій властивості геодезичні лінії поверхні є «найпрямішими» в порівнянні з іншими лініями цієї поверхні.

3.Через кожну точку регулярної поверхні в будь-якому напрямку можна провести геодезичну лінію і лише одну.

Доведення. Дійсно, диференціальне рівняння геодезичних ліній можна переписати у вигляді

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$

Маємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку від невідомих функцій $u = u(t), v = v(t)$ з коефіцієнтами, що є неперервними функціями від змінних u, v. Оскільки на поверхні задані точка і напрямок, то початкові умови мають вигляд:

$$u = u_0, v = v_0 \text{ і } \frac{du}{dt}(u_0, v_0) = a, \frac{dv}{dt}(u_0, v_0) = 0.$$

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що така система має єдиний розв’язок, **що і потрібно було довести.**

З доведеної властивості виходить, що на площині геодезичними є прямі і лише вони, на сфері геодезичними є великі кола і лише вони.

4. Достатньо мала дуга геодезичної лінії, що сполучає дві точки поверхні, коротша за дуги всіх інших ліній, що сполучають ті ж точки і є достатньо близькими до даної геодезичної (екстремальна властивість геодезичних).

Координатна сітка на поверхні називається напівгеодезичною, якщо одна із сімей складається з геодезичних ліній, а друга – з їх ортогональних траєкторій. Ортогональні траєкторії – це криві, які перетинають геодезичні під прямими кутами.

Нехай M – точка регулярної кривої g, яка лежить на поверхні F, тоді в деякому околі точки M існує напівгеодезична параметризація поверхні F, в якій крива g є ортогональною траєкторією до сім'ї геодезичних.

Така параметризація називається напівгеодезичною, побудованою на лінії γ.

Теорема . На регулярній поверхні існує така напівгеодезична параметризація, що перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$I=(du)^2+G(u,v)(dv)^2 .$$

Доведення. Оскільки u-лінії та v-лінії перпендикулярні, то $g_{12}=0$. Нехай u-лінія (тобто лінія $u=t,\quad v=const$) – геодезична, тоді її геодезична кривина

$$k_g=\begin{vmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \\ A^1 & A^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A^1 & A^2 \end{vmatrix}=A^2=0 .$$

Тут $A^2=\dfrac{d^2v}{dt^2}+\Gamma_{11}^2\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+2\Gamma_{12}^2\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt}+\Gamma_{11}^2\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2=\Gamma_{11}^2 .$

Звідси випливає, що $\Gamma_{11}^2=0$. Далі нагадаємо, що

$$\Gamma_{11}^2=\Gamma_{11,1}g^{12}+\Gamma_{11,2}g^{22}=\Gamma_{11,2}g^{22}=0 .$$

Тоді $\Gamma_{11,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0$,

звідки $g_{11} = g_{11}(u)$. Таким чином, $I = g_{11}(u)(du)^2 + g_{22}(u,v)(dv)^2$.

Введемо нову напівгеодезичну параметризацію: $u^* = \int \sqrt{g_{11}(u)}du, v^* = v$. Тоді $du^* = \sqrt{g_{11}(u)}du$, $\left(du^*\right)^2 = g_{11}(u)(du)^2$, $dv^* = dv$. А отже, в цій параметризації $I = \left(du^*\right)^2 + G\left(u^*, v^*\right)\left(dv^*\right)^2$. **Теорему доведено.**

Означення. *Геодезичним трикутником* називається фігура на поверхні F, яка складається з трьох точок і трьох відрізків геодезичних ліній, які їх сполучають.

Теорема Гауса (eleganttissimus). Сума кутів геодезичного трикутника обчислюється за формулою: $a + b + g = p + \iint\limits_{\Delta} Kds$.

Наслідок. Якщо повна кривина поверхні буде додатною (від’ємною, рівною нулю), то сума кутів геодезичного трикутника буде більшою p (меншою p, рівною p) відповідно.

Наслідок. Якщо маємо поверхню постійної гаусової кривини K, то сума кутів обчислюється за формулою $a + b + g = p + K \cdot S(\Delta)$, де $S(\Delta)$-площа трикутника Δ.

Для сфери величина $K \cdot S(\Delta)$ називається *сферичним надлишком.*

На минулій лекції ми довели той факт, що в околі будь-якої регулярної точки поверхні можна побудувати напівгеодезичну систему координат, в якій перша квадратична форма має вигляд

$$I = (du)^2 + G(u,v)(dv)^2 .$$

Формула для повної кривини поверхні в цій точці:

$$K = -\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Останню формулу можна переписати у вигляді рівняння відносно G:

$$\left(\sqrt{G}\right)_{uu} + K\sqrt{G} = 0.$$

Розв'язавши його, ми зможемо відновити першу квадратичну форму поверхні за відомою кривиною (правда, поки тільки в спеціальній системі координат – напівгеодезичній). Цю лекцію ми присвятимо відновленню поверхонь постійної гаусової кривини. Це простий випадок, коли дане рівняння аналітично розв'язуване.

Нехай S – регулярна поверхня постійної гаусової кривини K і M – довільна точка цієї поверхні. На поверхні S у деякому околі точки M введемо напівгеодезичну систему координат з початком в точці M. В якості лінії $u = 0$ виберемо яку-небудь геодезичну, що проходить через точку M. Перша квадратична форма поверхні у вказаній системі координат має вигляд $I = du^2 + Gdv^2$, причому $G(0,v) = 1, G_u(0,v) = 0$.

Як було вказано вище, коефіцієнт G задовольняє рівнянню

$$\left(\sqrt{G}\right)_{uu} + K\sqrt{G} = 0$$

з початковими умовами

$$\sqrt{G(0,v)} = 1, \left(\sqrt{G(0,v)}\right)_u = 0.$$

Запишемо розв'язання задачі Коші для різних випадків і відповідні квадратичні форми:

У випадку $K > 0$: $G = \cos\left(u\sqrt{K}\right)$, $I = du^2 + \cos^2\left(u\sqrt{K}\right)dv^2$.

У випадку $K = 0$: $G = 1$, $I = du^2 + dv^2$.

У випадку $K > 0$: $G = ch\left(u\sqrt{-K}\right)$, $I = du^2 + ch^2\left(u\sqrt{-K}\right)dv^2$.

Наведемо приклади поверхонь постійної гаусової кривини.

Прикладом поверхні постійної додатної гаусової кривини є сфера. Її повна кривина $K = R^{-2}$, де R – радіус сфери.

Прикладом поверхні постійної нульової гаусової кривини є площина.

Перейдемо до побудови поверхні постійної від'ємної гаусової кривини.

Розглянемо криву, що має таку властивість: довжина L відрізка дотичної від точки дотику до деякої прямої l суть величина постійна (рівна a), тобто вона (довжина) не залежить від вибору точки кривої, в якій будується дотична. Ця крива називається *трактрисою*. При цьому згадана вище пряма буде асимптотою цієї трактриси.

Виберемо систему координат так, щоб пряма l співпадала з віссю абсцис, а найвіддаленіша від осі Ox точка M трактриси лежала у верхній напівплощині на осі Oy. Рівняння трактриси шукатимемо у вигляді $y = y(x)$. Рівняння дотичної прямої, побудованої в точці $M(x_0, y_0)$ трактриси, має вигляд: $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, де $y_0' = y'(x_0)$. Позначимо точку перетину цієї прямої з віссю абсцис через N. Тоді $N\left(x_0 - \frac{y_0}{y_0'}, 0\right)$. Із означення трактриси $MN^2 = a^2$. Переходячи до координат, одержуємо рівність $\frac{y_0^2}{y_0'^2} + y_0^2 = a^2$. Через довільність вибору точки на трактрисі одержимо, що функція $y(x)$ повинна задовольняти диференціальному рівнянню $\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = a^2$.

Оскільки це диференціальне рівняння не містить явно змінну

x, то простіше всього його розв'язати, ввівши параметр. Якщо покласти, що $y = a\sin u$, а $\dfrac{y}{y'} = a\cos u$, то рівняння перетворюється на тотожність. Другу з цих рівностей перепишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{a\cos u} = \frac{a\sin u}{a\cos u} = tgu\ .$$

Звідси

$$dx = ctgu\ dy = ctgu\ (a\sin u)'\ du = a\frac{\cos^2 u}{\sin u}du\ .$$

Інтегруючи, одержимо $x = a\left(\cos u + \ln\dfrac{1-\cos u}{\sin u}\right)$. Таким чином, параметричні рівняння трактриси:

$$x = a\left(\cos u + \ln\frac{1-\cos u}{\sin u}\right),\ y = a\sin u\ ,\ u \in (0,p\,)$$

Помітимо, що $\max\limits_{u\in(0,p\,)} y(u) = y\left(\dfrac{p}{2}\right) = a$, $x\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0$. Тобто та умова, що найвіддаленіша від осі Ox точка M трактриси лежить у верхній напівплощині на осі Oy виконується.

Псевдосфера – це поверхня, одержана обертанням трактриси навколо її асимптоти. Параметричні рівняння псевдосфери можна записати у вигляді

$$x = a\left(\cos u + \ln\frac{1-\cos u}{\sin u}\right),\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\sin u\cos v\ .$$

Далі, знайшовши коефіцієнти першої і другої квадратичних форм, ми можемо обчислити гаусову кривину. Опускаючи проміжні викладення, наведемо остаточний результат: $K = -a^{-2} = const$.

Таким чином, псевдосфера є прикладом поверхні постійної від'ємної гаусової кривини. Бельтрамі довів важливий результат, що псевдосфера в тривимірному просторі завжди має край. Відзначимо так само той факт, що на псевдосфері виконується геометрія Лобачевського.

2.2 Завдання для тестування з теорії поверхонь

1). Яка з точок $A(1,2,5)$ $B(2,-1,3)$ лежить на поверхні $\bar{r}(t) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$?

а	б	в	г
A	*B*	*A и B*	*жодна*

2) Яка з точок $A(1,2,5)$, $B\left(\sqrt{2},-1,3\right)$ поверхні $z = x^2 + y^2$ є особливою?

а	б	в	г
A	*B*	*A и B*	*жодна*

3) Які з наступних кривих є координатними лініями поверхні $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$?

а	б	в	г
кола	*параболи*	*гіперболи*	*прямі*

4) Вектор $\bar{a} = (-4,2,1)$ є напрямним вектором нормалі поверхні $z = x^2 - y^2$ в точці

а	б	в	г
$A(1,1,0)$	$A(2,1,3)$	$A(-1,1,0)$	$A(0,0,0)$

5) Яка з наступних квадратичних форм може бути першою квадратичною формою поверхні?

а	б	в	г
$du^2 - 2dv^2$	$du^2 + 2dudv + dv^2$	$-du^2 + 2dudv + u^2dv^2$	$du^2 + 2dudv + (1+v^2)dv^2$

6) Омбілічних точок не існує на поверхні?

а	б	в	г
сфері	*параболоїді обертання*	*двопорожнинному гіперболоїді обертання*	*тривісному еліпсоїді*

Модульна контрольна робота №2 (зразок) *«Диференціальна геометрія і топологія»*

I. Теоретична частина (5 балів).

1. Дати означення параметризованої поверхні.
2. Записати рівняння дотичної площини в точці неявно заданої поверхні.
3. Дати означення гаусового сферичного відображення поверхні.
4. Сформулювати критерій ортогональності координатних ліній поверхні.
5. Записати рівняння, з якого знаходяться головні кривини поверхні.

II. Тестові частина (3 бали).

1. Головні кривини k_1 і k_2 у вершині еліптичного параболоїда обертання задовольняють умові

а	б	в	г
$k_1 k_2 < 0$	$k_1 + k_2$ *не ділиться на 2*	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$

2. Площина $x + y + z = 0$ і дотична площина до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точці $M(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

а	б	в	г
перетинаються	*паралельні*	*проходять через* $A(1,0,0)$	*проходять через початок координат*

3. Крива $u = v^2$ лежить на поверхні $r(u,v) = (u^2 - 1, v^2 + 1, 1 - 4uv)$ і проходить через

а	б	в	г
$A(0,2,-3)$	$A(1,0)$	$A(3,1,1)$	$A(0,-1)$

III. Практична частина (12 балів).

1. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $xy^2 + z^3 = 12$ в т. $M(1,2,2)$.

2. Знайти координати першої квадратичної форми поверхні $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ в точці $u = 0, v = \frac{p}{2}$.

3. Знайти координати другої квадратичної форми поверхні $x = ve^u - v, y = ve^{-u} + v, z = u^2 + v^2$ в точці $u = 0, v = 2$

4. Обчислити повну та середню кривини для поверхні із завдання 3 в вказаній точці.

2.3 Приклади розв'язування задач з теорії поверхонь

Приклад 1. Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до поверхні $\bar{r}(u,v)=\left(uv,u^2-v^2,2u^3v\right)$ в точці $M(u=1,v=2)$.

Розв'язання. Поверхня задана за допомогою векторної функції від аргументів u,v. Знайдемо координати точки M, підставивши значення параметрів у рівняння поверхні: $M(2,-3,4)$. Обчислимо частині похідні $\bar{r}_u=\left(v,2u,6u^2v\right)$, $\bar{r}_v=\left(u,-2v,2u^3\right)$ і знайдемо їх у точці M: $\bar{r}_u(M)=(2,2,6),\bar{r}_v(M)=(1,-4,2)$. Вектор нормалі $\bar{n}(M)=[\bar{r}_u(M),\bar{r}_v(M)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 2 & 6\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=(28,2,-10)$.

Рівняння нормалі $\dfrac{x-2}{28}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{-10}$, а рівняння дотичної площини $28(x-2)+2(y+3)-10(z-4)=0$.

Приклад 2. Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до поверхні $4x^2-y^2+z^3=8$ в точці $M(2,3,1)$.

Розв'язання. Поверхня задана неявно. Розглянемо функцію $F(x,y,z)=4x^2-y^2+z^3-8$. Знайдемо вектор $\nabla\overline{F}$, який є нормальним вектором поверхні $\nabla\overline{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(8x,-2y,3z^2\right)$. У точці M $\nabla\overline{F}=(16,-6,3)$.

Канонічні рівняння нормалі $\dfrac{x-2}{16}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-1}{3}$, а рівняння дотичної площини за точкою і нормальним вектором має вигляд
$16(x-2)-6(y-3)+3(z-1)=0$.

Приклад 3. Знайти першу квадратичну форму поверхні

$$\bar{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u+v).$$

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 1), \bar{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$. Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми

$g_{11} = (\bar{r}_u, \bar{r}_u) = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$,
$g_{12} = (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = -u\cos v \sin v + u\cos v \sin v + 1 = 1$,
$g_{22} = (\bar{r}_v, \bar{r}_v) = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2$.

Перша квадратична форма має вигляд

$$I = ds^2 = 2du^2 + 2dudv + (1 + u^2)dv^2.$$

Приклад 4. Знайти довжину дуги AB лінії $u = v$, що лежить на поверхні з першою квадратичною формою

$$ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2,$$

якщо $A(u = 0, v = 0), B(u = 2, v = 2)$.

Розв'язання. Нехай $v = t$. Тоді $u = t$, $du = dt, dv = dt$. Точка А відповідає значенню параметра $t = 0$, а точка В відповідає значенню параметра $t = 2$. Знайдемо довжину дуги *AB*, використовуючи формулу:

$$s = \int_0^2 \sqrt{ds^2} = \int_0^2 \sqrt{(1 + sh^2 t)dt^2} = \int_0^2 ch t dt = sh t\Big|_0^2 = sh 2.$$

Приклад 5. Знайти кут між кривими $l_1 : u = v$ й $l_2 : u = -v$, що лежать на поверхні з першою квадратичною формою

$$ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2.$$

Розв'язання. Точка перетину цих кривих $M(u = 0, v = 0)$. Для кривої l_1 будемо мати $du = dv$, а для кривої l_2: $du = -dv$.Скористаємося формулою для косинуса кута між лініями на поверхні, отримаємо

$$\cos f = \frac{dud\ u + sh^2 udvd\ v}{\sqrt{du^2 + sh^2 udv^2}\sqrt{d\ u^2 + sh^2 ud\ v^2}} =$$

$$= \frac{-dvd\ v + sh^2 0dvd\ v}{\sqrt{dv^2 + sh^2 0dv^2}\sqrt{(-d\ v)^2 + sh^2 0d\ v^2}} = \frac{-dvd\ v}{\sqrt{dv^2}\sqrt{d\ v^2}} = -1.$$

Звідси знаходимо, що $f = p$.

Приклад 6. Знайти площу фігури, що лежить на поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + sh^2 udv^2$ і обмежена лініями $u = 0, v = 0, u = 1, v = 2$.

Розв'язання.

Знайдемо підінтегральну функцію з формули площі області на поверхні

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{sh^2 u} = shu .$$

Тоді

$$S = \int_0^2\int_0^1 shududv = 2\int_0^1 shudu = 2chu\Big|_0^1 = 2ch1 - 2 .$$

Приклад 7. Знайти другу квадратичну форму поверхні

$$\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u + v).$$

Розв'язання. Із приклада 3 нам відомо, що перша квадратична форма цієї поверхні має вигляд

$$I = ds^2 = 2du^2 + 2dudv + \left(1 + u^2\right)dv^2 .$$

Тоді $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{2u^2 + 1}$. Знайдемо другі похідні

$$\bar{r}_{uu}=(0,0,0), \bar{r}_{uv}=(-\sin v, \cos v, 0), \bar{r}_{vv}=(-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Обчислимо мішані добутки похідних

$$(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uu})=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 1\\ -u\sin v & u\cos v & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uv})=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 1\\ -u\sin v & u\cos v & 1\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}=-1,$$

$$(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{vv})=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 1\\ -u\sin v & u\cos v & 1\\ -u\cos v & -u\sin v & 0\end{vmatrix}=u^2.$$

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми

$$h_{11}=\frac{(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}=0,\ h_{12}=\frac{(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}},$$

$$h_{22}=\frac{(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}=\frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}.$$

Таким чином друга квадратична форма має вигляд

$$II=h_{11}du^2+2h_{12}dudv+h_{22}dv^2=-\frac{2}{\sqrt{2u^2+1}}dudv+\frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}dv^2.$$

Приклад 8. На поверхні $\bar{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ знайти нормальну кривину кривої $u=v^2$ в точці $A(u=1, v=1)$, головні напрямки, головні кривини, повну і середню кривини в точці A.

Розв'язання. Скористаємося результатами прикладів 3 та 7:

$$I=2du^2+2dudv+(1+u^2)dv^2,$$

$$II=-\frac{2}{\sqrt{2u^2+1}}dudv+\frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}dv^2\cdot$$

Узявши диференціали від обох частин рівняння кривої, одержимо $du = 2vdv$. Підставимо знайдені вирази у формулу для нормальної кривини

$$k_н = \frac{II}{I} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{2u^2+1}}dudv + \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}dv^2}{2du^2 + 2dudv + (1+u^2)dv^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{\sqrt{2u^2+1}}2vdv^2 + \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}dv^2}{8v^2dv^2 + 4vdv^2 + (1+u^2)dv^2} = \frac{\frac{u^2-4v}{\sqrt{2u^2+1}}}{8v^2 + 4v + (1+u^2)}.$$

Ми одержали значення нормальної кривини в довільній точці заданої кривої. У одержаний вираз підставимо значення параметрів точки $A(u=1, v=1)$:

$$k_н = \frac{\frac{-3}{\sqrt{3}}}{14} = -\frac{\sqrt{3}}{14}.$$

В точці A знайдемо значення коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм:

$$g_{11} = 2,\ g_{12} = g_{21} = 1,\ g_{22} = 2,\ h_{11} = 0, h_{12} = h_{21} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, h_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для обчислення головних кривин скористаємося рівнянням

$$\begin{vmatrix} h_{11} - kg_{11} & h_{12} - kg_{12} \\ h_{12} - kg_{12} & h_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо $\begin{vmatrix} -2k & -\frac{1}{\sqrt{3}} - k \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} - k & \frac{1}{\sqrt{3}} - 2k \end{vmatrix} = 0$, або $3\sqrt{3}k^2 - 12k - \sqrt{3} = 0$. Звідси $k_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}, k_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$.

Для знаходження головних напрямків використовуємо рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Для нашої задачі воно має вигляд $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0$. Після розкриття визначника, отримаємо рівняння $3dv^2 + 2dudv - 2du^2 = 0$. Воно є квадратним відносно, наприклад, $\frac{dv}{du}$ і тому головні напрямки поверхні є його коренями: $\left(\frac{dv}{du}\right)_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$, $\left(\frac{dv}{du}\right)_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

Для знаходження повної і середньої кривин скористаємося формулами:

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^{\ \ 2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^{\ \ 2}},\ H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)}.$$

Одержимо відповідно $K = \frac{0 - 1/3}{4-1} = -\frac{1}{9}$, $H = \frac{2\big/\sqrt{3} + 2\big/\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Приклад 9. На поверхні $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$ знайти лінії кривини та асимптотичні лінії.

Розв'язання. Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм можна знайти: $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = u^2 + 4$, $h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = h_{21} = -2\big/\sqrt{u^2+4}$.

Підставимо ці вирази в рівняння $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$, яке є диференціальним рівнянням ліній кривини поверхні. Одержимо рівняння $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2+4 \\ 0 & -2\big/\sqrt{u^2+4} & 0 \end{vmatrix} = 0$. Звідси $(u^2+4)dv^2 - du^2 = 0$.

Головні напрямки в довільній точці поверхні мають вигляд

$\dfrac{dv}{du} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{u^2+4}}$, звідки $dv = \pm\dfrac{du}{\sqrt{u^2+4}}$. Отримали рівняння з розділеними змінними. Після інтегрування одержимо рівняння двох сімей ліній кривини у вигляді $v = C \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2+4}\right)$.

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд $h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2 = 0$, тому що за означенням в кожній точці асимптотичної лінії $II = 0$. У нашому випадку воно має вигляд $-4dudv\big/\sqrt{u^2+4} = 0$. Звідси $du = 0$ або $dv = 0$. Тобто асимптотичні лінії поверхні – це координатні лінії $u = const$ і $v = const$.

Приклад 10. Знайти диференціальні рівняння геодезичних ліній поверхні $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$.

Розв'язання. Рівняння геодезичних ліній

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Підготуємо все необхідне для їх обчислення. Для заданої поверхні $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = u^2 + 4$, або у вигляді матриці $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+4 \end{pmatrix}$. Знайдемо матрицю, обернену до неї. Її компоненти позначимо g^{ij}.

Обчислимо

$$g^{ij}=\frac{1}{g_{11}g_{12}-g_{12}^2}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}=\frac{1}{u^2+4}\begin{pmatrix} u^2+4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ звідки маємо $g^{11}=1, g^{12}=g^{21}=0, g^{22}=\dfrac{1}{u^2+4}$.

Далі обчислюємо символи Крістоффеля першого роду за формулою $\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(-g_{ij,k}+g_{jk,i}+g_{ki,j})$, де $g_{ij,k}=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$, $u^1=u, u^2=v$.

Обчислення показують, що всі $g_{ij,2}=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial v}=0$, а з $g_{ij,1}=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u}$ відмінна від нуля тільки одна похідна, а саме $g_{22,1}=2u$.

Символи Крістоффеля першого роду мають вигляд

$\Gamma_{111}=\frac{1}{2}(-g_{11,1}+g_{11,1}+g_{11,1})=0$, $\Gamma_{112}=\frac{1}{2}(-g_{11,2}+g_{12,1}+g_{21,1})=0$,

$\Gamma_{121}=\frac{1}{2}(-g_{12,1}+g_{21,1}+g_{11,2})=0$, $\Gamma_{122}=\frac{1}{2}(-g_{12,2}+g_{22,1}+g_{21,2})=u$,

$\Gamma_{211}=\frac{1}{2}(-g_{21,1}+g_{12,1}+g_{11,2})=0$, $\Gamma_{212}=\frac{1}{2}(-g_{21,2}+g_{12,2}+g_{22,1})=u$,

$\Gamma_{221}=\frac{1}{2}(-g_{22,1}+g_{21,2}+g_{12,2})=-u$, $\Gamma_{222}=\frac{1}{2}(-g_{22,2}+g_{22,2}+g_{22,2})=0$.

Тепер обчислимо символи Крістоффеля другого роду за формулою $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ijm}g^{mk}$:

$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11m}g^{m1}=\Gamma_{111}g^{11}+\Gamma_{112}g^{21}=0$, $\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12m}g^{m1}=\Gamma_{121}g^{11}+\Gamma_{122}g^{21}=0$,

$\Gamma_{21}^1=\Gamma_{21m}g^{m1}=\Gamma_{211}g^{11}+\Gamma_{212}g^{21}=0$,

$\Gamma_{22}^1=\Gamma_{22m}g^{m1}=\Gamma_{221}g^{11}+\Gamma_{222}g^{21}=-u$

$\Gamma_{11}^2=\Gamma_{11m}g^{m2}=\Gamma_{111}g^{12}+\Gamma_{112}g^{22}=0$,

$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{12m}g^{m2}=\Gamma_{121}g^{12}+\Gamma_{122}g^{22}=\dfrac{u}{u^2+4}$,

$$\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{21m}g^{m2}=\Gamma_{211}g^{12}+\Gamma_{212}g^{22}=\frac{u}{u^{2}+4},$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\Gamma_{22m}g^{m2}=\Gamma_{221}g^{12}+\Gamma_{222}g^{22}=0.$$

З урахуванням того, що

$$\Gamma_{ij}^{1}\frac{du^{i}}{dt}\frac{du^{j}}{dt}=\Gamma_{11}^{1}u'u'+\Gamma_{12}^{1}u'v'+\Gamma_{21}^{1}v'u'+\Gamma_{22}^{1}v'v'=-u(v')^{2},$$

$$\Gamma_{ij}^{2}\frac{du^{i}}{dt}\frac{du^{j}}{dt}=\Gamma_{11}^{2}u'u'+\Gamma_{12}^{2}u'v'+\Gamma_{21}^{2}v'u'+\Gamma_{22}^{2}v'v'=2\frac{uu'v'}{u^{2}+4},$$

рівняння геодезичних ліній набуде вигляду

$$\begin{vmatrix} u' & v' \\ u''-u(v')^{2} & v''+2\dfrac{uu'v'}{u^{2}+4} \end{vmatrix}=0.$$

Якщо за параметр виберемо змінну u, тобто рівняння геодезичної шукатимемо у вигляді $v=v(u)$, то $u'=1$, $u''=0$, і шукане рівняння запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} 1 & v' \\ -u(v')^{2} & v''+2\dfrac{uv'}{u^{2}+4} \end{vmatrix}=v''+2\frac{uv'}{u^{2}+4}+u(v')^{3}=0.$$

2.4 Задачі з теорії поверхонь для самостійної роботи

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної головними нормалями даної кривої $\overline{r} = \overline{r}(s)$, де s - натуральний параметр.
2. Записати рівняння однопорожнинного гіперболоїда у вигляді $\overline{r}(u,v) = \overline{r}(u) + v\overline{l}(u)$, де $\overline{r} = \overline{r}(u)$ - крива, що є перетином поверхні і площини *OXY*, $\overline{l} = \overline{l}(u)$ - напрямний вектор прямолінійної твірної гіперболоїда в точці кривої $\overline{r} = \overline{r}(u)$, що відповідає параметру u.
3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $xy^2 + z^2 = 8$ в точці $M(1,2,2)$. Визначити орт нормалі в цій точці.
4. Дана поверхня $xyz = 1$. Скласти рівняння дотичної площини, яка буде паралельною до площини $x + y + z = 0$.
5. Знати кут між лініями $u + v = 0$ та $u - v = 0$, що належать поверхні $\overline{r}(u,v) = (4(u+v), 3(u-v), 2uv)$.
6. Знайти нормальну кривину гіперболічного параболоїда $z = ax^2 - by^2$ в точці $P(0,0)$ у напрямку $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$.
7. Знайти гаусову та середню кривини гіперболічного параболоїда $z = axy$ в точці $(0,0,0)$
8. Знайти асимптотичні лінії катеноїда $\overline{r}(u,v) = (ch u \cos v, ch u \sin v, u)$.
9. Визначити тип точок конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
10. Поверхня, задана рівнянням $\overline{r}(u,v) = \overline{r}(u) + v\overline{l}(u)$ називається *розгортною*, якщо вона задовольняє умову $(\overline{r}'(u), \overline{l}'(u), \overline{l}(u)) = 0$. Довести, що якщо поверхня розгортна, то її повна кривина дорівнює 0.

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ З КУРСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Теорія кривих.

Завдання 1.

Знайти координати векторів $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3$ репера Френе в даній точці M.

1. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = \sin t$, $\quad t = \dfrac{p}{2}$
2. $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, z = \cos 2t$, $\quad t = \dfrac{p}{4}$
3. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \cos \dfrac{t}{2}$, $\quad t = 0$
4. $x = 2t - \sin t, y = 2t + \sin t, z = t + \cos t$, $\quad t = 0$
5. $x = 2t, y = \ln t, z = t^2$, $\quad t = e$

Завдання 2.

Скласти рівняння дотичної прямої, головної нормалі, бінормалі даної кривої із завдання 1 в точці M.

Завдання 3.

Скласти рівняння стичної, нормальної і спрямляючої площин кривої із завдання 1 в точці M.

Завдання 4.

Знайти координати векторів базису Френе даної кривої в даній на ній точці.

1. $x - 2y - z = 6, x - 2y^2 + z = 2$, $\quad M(4,0,-2)$
2. $y = 2x^2 - 3$, $z = 4e^x + 1$, $\quad x = 1$
3. $y = -\sin x + 2$, $z = \cos 2x$, $\quad x = p$

4. $x^2 + y^2 = 1, z = \ln(x + y)$, $M(0,1,0)$
5. $x^2 = 2y, 2xy = 9z$, $O(0,0,0)$

Завдання 5.

Знайти для кривої в завданні 1 кривину і скрут у точці *M*.

Завдання 6.

Знайти довжину дуги між точками $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$, знайти натуральну параметризацію, скласти натуральні рівняння кривої

1. $x(t) = t, y(t) = \dfrac{1}{t}, z(t) = \sqrt{2}\ln t$

2. $x(t) = \sin t, y(t) = \dfrac{1}{\sin t}, z(t) = \sqrt{2}\ln(\sin t)$

3. $x(t) = tgt, y(t) = \dfrac{1}{tgt}, z(t) = \sqrt{2}\ln(tgt)$

4. $x(t) = e^t, y(t) = \dfrac{1}{e^t}, z(t) = \sqrt{2}t$

5. $x(t) = sht, y(t) = \dfrac{1}{sht}, z(t) = \sqrt{2}\ln(sht)$

Завдання 7.

Скласти параметричні рівняння плоскої кривої за її натуральним рівнянням

1. $k = a$

2. $\dfrac{1}{k} = as$

3. $\dfrac{1}{k}=\dfrac{a^2+s^2}{a^2}$

4. $s=ka^2$

5. $kas=5$

Теорія поверхонь

Завдання 1.

Для даної поверхні в даній точці скласти рівняння дотичної площини і нормалі.

1. $x=R\cos v, y=R\sin v, z=u$, $u=\dfrac{p}{2}, v=0$
2. $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u^2$, $u=1, v=\dfrac{p}{2}$
3. $x=u\cos v, y=u\sin v, z=uv$, $u=1, v=p$
4. $x=u, y=v, z=2u^2-v^3$, $u=v=1$
5. $x=u+v, y=u-v, z=uv$, $u=2, v=1$

Завдання 2.

Для поверхні із завдання 1 в даній точці знайти коефіцієнти першої і другої квадратичних форм.

Завдання 3.

Для поверхні із завдання 1 знайти довжину лінії $u=2v$ між точками (u_1,v_1) , (u_2,v_2) , кут між лініями $u=2v$, $v=2u$ в точці їх перетину.

Завдання 4.

Для поверхні із завдання 1 знайти нормальну кривину кривої $u = 2v$ в даній точці.

Завдання 5.

Для поверхні із завдання 1 знайти головні кривини, головні напрямки, повну і середню кривини в даній точці.

Завдання 6.

Для поверхні із завдання 1 знайти асимптотичні лінії поверхні.

Завдання 7.

Для поверхні із завдання 1 знайти символи Крістоффеля 1-го роду.

Завдання 8.

Для поверхні із завдання 1 знайти символи Крістоффеля 2-го роду.

Завдання 9.

Для поверхні із завдання 1 знайти геодезичну кривину кривої $v = const$.

Завдання 10.

Дано поверхню. Скласти рівняння дотичної площини поверхні в даній точці *M*. Визначити орт нормалі в цій точці.

1. $xyz = 1$, $M(1,1,1)$

2. $\sin x \sin y - 2z = 0$, $M(0, \frac{p}{2}, 0)$

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 - y^2) + 3$, $M(1,1,1)$

4. $z - e^y \sin x = 0$, $\quad M(\frac{p}{2},0,1)$

5. $x^2 + y^2 - e^z = 0$, $\quad M(1,0,0)$

Завдання 11.

Для поверхні із завдання 10 знайти коефіцієнти першої і другої квадратичних форм.

Завдання 12.

Для поверхні із завдання 10 знайти кут між координатними лініями $x = x_0$, $y = y_0$ на поверхні.

Завдання 13.

Для поверхні із завдання 10 визначити тип точок на цій поверхні.

4. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Векторна функція одного скалярного аргументу. Означення та приклади. Границя та неперервність векторної функції.
2. Диференційованість векторної функції. Теорема про властивості диференційованих векторних функцій та наслідки з неї. Диференціювання складної векторної функції одного аргументу. Формула Тейлора.
3. Поняття кривої. Способи завдання. Регулярність кривої. Особливі точки.
4. Заміна параметра на кривій. Властивість допустимої заміни.
5. Неявне завдання кривої. Теорема про неявно задану криву.
6. Дотична та властивості першої квадратичної Фоми поверхні.
7. Дотична пряма та нормальна площина неявно заданої кривої.
8. Стична площина кривої. Теорема про стичну площину.
9. Рухомий репер кривої. Дериваційні формули. Теорема про матицю дериваційних формул ортонормованого реперу.
10. Репер Френе кривої. Обчислювання елементів реперу Френе.
11. Довжина дуги кривої. Теорема про параметризацію кривої за допомогою довжини дуги.
12. Натуральна параметризація кривої. Критерій натуральної параметризації.
13. Формулі Френе. Означення та теорема.
14. Означення кривини кривої. Теорема про кривину.
15. Означення скруту кривої. Теорема про скрут.
16. Обчислення кривини кривої.
17. Обчислення скруту кривої.
18. Теорема про криві нульової кривини.
19. Теорема про криві нульового скруту.
20. Означення векторної функції двох скалярних аргументів. Диференціювання векторної функції
21. Поняття параметризованої поверхні. Регулярність поверхні. Приклади.
22. Криволінійні координати лінії поверхні. Завдання кривої на поверхні.
23. Дотична площина та нормаль параметризованої поверхні, їх рівняння.

24. Дотична площина та нормаль для неявно заданої поверхні.
25. Означення та властивості першої квадратичної форми поверхні.
26. Довжина кривої на поверхні. Геометричний зміст першої квадратичної форми.
27. Кут між кривими на поверхні. Критерій ортогональності сітки поверхні.
28. Площа області на поверхні.
29. Ізометричні зображення на поверхні. Теорема про ізометрії. Приклади ізометричних поверхонь. Поняття про внутрішню геометрію поверхонь.
30. Гаусове сферичне відображення поверхні. Відображення Вейнгартена.
31. Теорема про само спряженість відображення Вейнгартена.
32. Друга квадратична форма поверхні. Обчислення її коефіцієнтів.
33. Теорема про геометричний зміст другої квадратичної форми поверхні.
34. Нормальний перетин поверхні. Нормальна кривина нормального перетину. нормальні перетини в околі еліптичної, гіперболічної, параболічної точок.
35. Нормальна кривина кривої на поверхні та її властивості. Теорема Меньє.
36. Обчислення нормальної кривини.
37. Головні напрямки та головні кривини поверхні. Теорема про існування головних напрямків.
38. Обчислення головних кривин та головних напрямків.
39. Основна терема теорії кривих (без доведення).
40. Асимптотичні напрямки. Існування асимптотичних напрямків.
41. Зв’язок нормальної та геодезичної кривин з кривиною кривої.
42. Асимптотичні лінії поверхні. Критерій асимптотичної лінії.
43. Повна та середня кривина поверхні, їх обчислення.
44. Лінії кривини поверхні. Теорема про існування ліній кривини.
45. Характеристична властивість сфери.
46. Критерій координатності ліній кривини.

47. Гаусовий руховий репер поверхні. Теорема по матрицю відображення Вейнгартена.
48. Теорема Ейлера та наслідки з неї.
49. Дериваційні формули Вейнгартена.
50. Класифікація точок поверхні. Характеристична властивість площини.
51. Основні рівняння теорії поверхонь.
52. Означення омбілічної точки поверхні. Критерій омбілічної точки.
53. Теорема Гауса. Основна теорема теорії поверхонь.
54. Геодезична кривина кривої на поверхні. Теорема про обчислення геодезичної кривини.
55. Напівгеодезична параметризація поверхні. Перша квадратична форма поверхні та повна кривина в напівгеодезичній параметризації.
56. Геодезичні лінії та їх властивості.
57. Критерій геодезичної лінії. Приклади.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1.Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых.-М.: Наука, 1987.

2.Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія.-Харків, 1995.

3.Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: 1985.

4.Кованцов Н.И. Дифференциальная геометрия.-К., 1973.

5.Кованцов Н.И. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сб. задач.- К., 1989.

6.Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.- М.: Наука, 1974.

7.Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. Изд-во МГУ, 1990.

Додаткова:

1.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

2.Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.- М.:, 1981.

3.Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.-М.: Изд-во МГУ, 1987.

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ З КУРСУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ»

Теорія кривих

Для кривої, заданої векторно-параметричним рівнянням $\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$:

$s=\int\limits_a^b|\bar{r}'(t)|dt=\int\limits_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$ - *довжина дуги;*

$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ - *рівняння дотичної прямої;*

$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$ - *рівняння нормальної площини.*

Для кривої, заданої неявно системою рівнянь $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$:

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{g}$ - *рівняння дотичної прямої;*

$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+g\,(z-z_0)=0$ - *рівняння нормальної площини*, де

$a\,,b\,,g$ - координати вектора $\left.\left[\overline{\nabla F},\overline{\nabla \Phi}\right]\right|_{M_0}$.

Координати векторів $\bar{m}_1,\bar{m}_2.\bar{m}_3$ репера Френе кривої $\bar{r}=\bar{r}(t)$ знаходяться за формулами:

$$\bar{m}_1=\frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|},\ \bar{m}_3=\frac{[\bar{r}'(t),\bar{r}''(t)]}{|[\bar{r}'(t),\bar{r}''(t)]|},\ \bar{m}_2=[\bar{m}_3,\bar{m}_1];$$

$k=\frac{\left|\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3}$ - *кривина кривої;*

$\aleph=\frac{\left(\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}'''\right)}{\left[\bar{r}',\bar{r}''\right]^2}$ - *скрут кривої.*

Для кривої $\bar{r}=\bar{r}(s)$:

$\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{m}_1$, $\frac{d\bar{m}_1}{ds}=k\bar{m}_2$, $\frac{d\bar{m}_2}{ds}=-k\bar{m}_1+\aleph\,\bar{m}_3$, $\frac{d\bar{m}_3}{ds}=-\aleph\,\bar{m}_2$ – *формули Серре-Френе;*

$\begin{cases} k=k(s) \\ \aleph=\aleph(s) \end{cases}$ - *натуральні рівняння кривої.*

Теорія поверхонь

Для поверхні $F:\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ позначимо a,b,g - координати вектора $\left[\bar{r}_u,\bar{r}_v\right](M_0)$:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+g(z-z_0)=0$ - *рівняння дотичної площини;*

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{g}$ - *рівняння нормалі.*

Для поверхні $F(x,y,z)=0$:

$F_x'(\bar{x}-x)+F_y'(\bar{y}-y)+F_z'(\bar{z}-z)=0$ - *рівняння дотичної площин;*

$\frac{\bar{x}-x}{F_x'}=\frac{\bar{y}-y}{F_y'}=\frac{\bar{z}-z}{F_z'}$ - *нормалі;*

$d\bar{r}^2=g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2$ - *перша квадратична форма* *поверхні*

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_u) = g_{11},\ (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = g_{12},\ (\bar{r}_v, \bar{r}_v) = g_{22}.$$

Нехай $F : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – регулярна поверхня й регулярна крива g цієї поверхні задана внутрішніми рівняннями $u = u(t), v = v(t)$:

$s = \int_a^b \sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}$ - *довжина дуги кривої*;

$\cos f = \dfrac{g_{11}dud\ u + g_{12}(dud\ v + dvd\ u) + g_{22}dvd\ v}{\sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}\sqrt{g_{11}d\ u^2 + 2g_{12}d\ ud\ v + g_{22}d\ v^2}}$ - *кут між кривими на поверхні*;

$S = \iint_V \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}\,dudv$ - *площа області на поверхні;.*

$II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$ - *друга квадратична форма*

$$h_{11} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}},\ h_{12} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}},\ h_{22} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}};$$

$k_н = \dfrac{II}{I}$ - *нормальна кривина кривої g на поверхні.,*

Нормальна кривина $k_н$ кривої $\bar{R}(s) = \bar{r}(u(s), v(s))$ пов'язана з її кривиною k формулою

$$k_н = k\cos\Theta,$$

де Θ – кут між векторами $\bar{n}$ і $\bar{m}_2$.

$K = k_1 k_2$ - *повна (гаусова) кривина поверхні;*

$H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ - *середня кривина поверхні.*

Головні кривини k_1 і k_2 поверхні є коренями квадратного рівняння

$$\begin{vmatrix} h_{11}-kg_{11} & h_{12}-kg_{12} \\ h_{12}-kg_{12} & h_{22}-kg_{22} \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$K = \frac{h}{g} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}{}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}$$ - *повна кривина;*

$$2H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{g}$$ - *середня кривина.*

Координати du, dv *головних напрямків* поверхні знаходяться з рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$h_{11}(du)^2 + 2h_{12}du dv + h_{22}(dv)^2 = 0$$ - *рівняння асимптотичних ліній.*

Дериваційні формули Вейнгартена мають вигляд

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\bar{r}_k + h_{ij}\bar{n}\,, \qquad \bar{n}_i = -h_{ik}g^{kj}\bar{r}_j\,.$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ijm}g^{mk}, \quad \Gamma_{ijm} = (\bar{r}_{ij}, \bar{r}_m)$$

Величини Γ_{ij}^{k} називаються *символами Крістоффеля II роду*, величини Γ_{ijm} – *символами Крістоффеля I роду*, причому

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j})\,,\ g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ij})\,.$$

Гаусова (повна) кривина поверхні може бути виражена тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх частинні похідні

$$K = \frac{h}{g} = \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11,2}^{2} - \Gamma_{12,1}^{2} + \Gamma_{11}^{l}\Gamma_{l2}^{2} - \Gamma_{12}^{l}\Gamma_{l1}^{2}\right)$$

Геодезична кривина

$$k_g = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{\left(g_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix}$$ -,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix} = 0$$ - *рівняння геодезичних ліній поверхні*

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$(e^x)' = e^x$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;

$(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$;

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x$;

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + p}\right| + C$$

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Величко Ігор Георгійович
Гургєнідзе Марина Олександрівна
Стєганцева Поліна Георгіївна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

Навчально-методичний посібник для індивідуальної та самостійної роботи для студентів II курсу математичного факультету

Рецензент *А.К. Приварников*
Відповідальний за випуск *М.О.Гургєнідзе*
Коректор *П.Г. Стєганцева*