МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Т. А. Ліхоузова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення»,
126 «Інформаційні системи та технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *Букасов М.М.*, к.т.н., доц., доцент кафедри АУТС ФІОТ
Гавриленко О.В., к.ф.-м.н., доц., доцент кафедри АСОІУ ФІОТ

Відповідальний редактор *Ткач М.М.*, канд. техн. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 9.04.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Ліхоузова Тетяна Анатоліївна, канд. техн. наук, доц.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ПРАКТИКУМ

Дискретна математика. Практикум [Електронний ресурс]: навч. посібник для студ. спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 126 «Інформаційні системи та технології»/ Т. А. Ліхоузова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,7 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 62 с.

Посібник призначений для опанування математичного апарату, що необхідний майбутнім програмістам для вивчення дисциплін «Структури даних» та «Теорія алгоритмів». Обсяг та перелік тем запропонованого практичного матеріалу повністю покриває потреби 121 та 126 спеціальностей. Для кожної теми наведено перелік питань для самоконтролю, задачі для роботи в аудиторії різного рівня складності та вказано питання, що будуть включені в модульну контрольну роботу. Порівняно з іншими задачниками, більш детально розглянуто теми «Булева алгебра» та «Графи».

Зміст

ТЕМА 1. Множини

Питання для самоконтролю

1. Назвіть відомі вам способи задання множин. В якому випадку не можна застосувати той або інший спосіб?
2. В яких випадках множина задана некоректно?
3. Чи можуть два елементи однієї множини бути однаковими?
4. Яку множину називають упорядкованою?
5. Які множини вважаються рівними?
6. Визначте поняття підмножини і включення множин.
7. Чим відрізняється строге включення від нестрогого? Наведіть приклад.
8. Яка множина називається універсальною?
9. Яка множина називається порожньою?
10. Як позначається множина всіх підмножин деякої множини? Скільки елементів вона містить?
11. В чому відмінність між діаграмами Венна і кругами Ейлера?
12. Дайте визначення операціям на множинах.
13. При виконанні якої операції використовується універсальна множина?
14. Чи можуть деякі з операцій бути виражені одна через іншу? Яким чином?
15. Розташуйте операції алгебри множин відповідно до їх пріоритетів.
16. Назвіть тотожності алгебри множин, запишіть відповідні формули.
17. Яким чином можна графічно зобразити та довести закони і тотожності алгебри множин? Наведіть приклад такого доведення.
18. Яким чином виконуються еквівалентні перетворення формул алгебри множин? Наведіть приклади.

Завдання для роботи в аудиторії

Множина та її елементи.

1. Визначте, які з наведених тверджень правильні:
   a) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
   b) $1 \notin \{1\}$;
   c) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
   d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$.

2. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ щоб отримати правильне твердження:
   a) $1 * N$;
   b) $0 * N$;
   c) $-5 * Z$;
   d) $-1/2 * Z$;
   e) $3.14 * R$;
   f) $\pi * R$.

3. Визначте, які з наведених тверджень справедливі:
   a) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$;
   b) $x \in \{x\}$;
   c) $\{x\} \in \{x\}$;
   d) $\{x\} \subseteq \{x\}$;
   e) $\{x\} \in \{\{x\}\}$;
   f) $x \in \{1, 2, x, a\}$;
   g) $3 \in \{1, \{2, 3\}\}\}$;
   h) $x \in \{2x, sin\, x\}$;
   i) $2 \in \{\{1\},\{2\}\}$.
4. Чи правильно, що $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?
5. Чи справедлива рівність $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}=\{1, 2, 3\}$?

Способи задання множини

6. Задайте переліком елементів множину:
   a) правильних дробів зі знаменником 7;
   b) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
   c) множину цифр числа 5555;
   d) множину букв у слові «математика».
7. Наведіть множину розв'язків нерівності $(x - 2)/(8 - x) \geq 0$.
8. Задайте переліком елементів множину:
   a) $\{x \mid x \in N, 3 < x < 12\}$;
   b) $\{x \mid x$ – десяткова цифра$\}$.
9. Опишіть множину $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ за допомогою характеристичної властивості її елементів.
10. Визначте, елементом яких з наведених множин є 2:
    a) $\{x \mid x \in N, x > 1\}$;
    b) $\{x \mid x = y^2, y \in Z\}$;
    c) $\{2, \{2\}\}$.
11. Задайте множини найбільш зручним способом:
    a) множину натуральних чисел, не більших за 7;
    b) множину букв вашого імені;
    c) множину, єдиним елементом якої є назва вашого міста;
    d) множину простих чисел між 10 і 20;
    e) множину додатних чисел, що кратні 12;
    f) множину натуральних чисел, не більших за 100;
    g) множину парних додатних чисел.
12. Задайте множини іншим способом:
    a) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$;
    b) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$;
    c) $\{10, 12, 14, 16\}$.

Потужність множини

13. Скільки елементів містять такі множини:
    a) $A = \{x\}$;
    b) $B = \{\{x\}\}$;
    c) $C = \{x, \{x\}\}$;
    d) $D = \{\{x\}, x, \{\{x, \{x\}\}\}\}$.
14. Знайти $|A|$, $|B|$, чи $|A|=|B|$, якщо A – множина двозначних чисел, B – тризначні числа, що починаються з цифри 2.

Підмножини

15. Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?
16. Нехай X - множина літер у слові «координата». Множина літер якого слова є підмножиною множини X:
    a) кора;
    b) дірка;
    c) картина;
    d) крокодил;
    e) нитки;
    f) тин;
    g) криниця;
    h) сокирка;
    i) дорога;
    j) дар;
    k) кардинал;
    l) координатор.
17. Нехай X - множина цифр у числі 1958. Чи є множина цифр числа y підмножиною X, якщо:
    a) $y = 98$;
    b) $y = 9510$;
    c) $y = 519$;
    d) $y = 5858$;
    e) $y = 1958888$;
    f) $y = 91258$.
18. Дана множина $D = \{7, 13, 25, 34, 101, 112\}$. Які з наведених множин є підмножинами множини D?
    a) $\{1, 7, 13\}$;
    b) $\{0, 1, 12\}$;
    c) $\{25, 112, 34\}$;
    d) $\{a, b, c, n\}$;
    e) $\{7, 13, 25, 34, 101, 112\}$.
    f) $\varnothing$.

19. Розмістіть множини в такій послідовності, щоб кожна попередня була підмножиною наступної:
   a) A – множина всіх прямокутників;
      B – множина всіх чотирикутників;
      C – множина всіх квадратів;
      D – множина всіх паралелограмів.
   b) A – множина всіх ссавців;
      B – множина всіх вовків;
      C – множина всіх хребетних;
      D – множина всіх хижих ссавців.

20. Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:
   a) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$;
   b) $B = \{x \mid x = 50n, n \in N\}$;
   c) $C = \{x \mid x = 10n, n \in N\}$;
   d) $D = \{x \mid x = 5n, n \in N\}$.

21. Які з наведених тверджень правильні?
   a) якщо $\text{A} \subset \text{B}$ і $\text{B} \subset \text{C}$, то $\text{A} \subset \text{C}$;
   b) якщо $\text{A} \subseteq \text{B}$ і $\text{B} \subseteq \text{A}$, то $\text{A} = \text{B}$;
   c) якщо $\text{A} \subseteq \text{B}$ і $\text{B} \subseteq \text{C}$, то $\text{A} \subseteq \text{C}$.

22. Визначте, чи виконується $A \subseteq B$, якщо $A = \{1, \{2, \{3\}\}\}$, $B = \{1, \{2, 3\}\}$.
23. Визначте, чи виконується $A \in C$, якщо $A \in B$, $B \in C$.

Рівність множин

24. Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
   a) множина трикутників, сума кутів в яких дорівнює 270 градусів;
   b) множина функцій, графіком яких є коло;
   c) множина гірських вершин заввишки 8800м;
   d) множина гірських вершин на Україні заввишки 8800м.

25. Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
   a) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
   b) $B = \{x \mid x \in Z, 0.5x - 2 = 0\}$;
   c) $C = \{x \mid x \in Z, |x| < 1\}$;
   d) $D = \{x \mid 5x^4 + 3x^2 + 2 = 0\}$.

26. Чи рівні множини A і B:
   a) $A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 1\}$;
   b) $A = \{1\}$ $B = \{\{1\}\}$;
   c) $A = \{(0;1)\}$ $B = \{(1;0)\}$;
   d) $A = \{x \mid x \leq 3, x \in Z\}$ $B = \{x \mid x < 4, x \in Z\}$;
   e) $A = \{x \mid x \in N, x \text{ кратне } 2 \text{ і } 3\}$ $B = \{x \mid x \in N, x \text{ кратне } 6\}$.

27. Визначте, які з наведених множин дорівнюють одна одній:

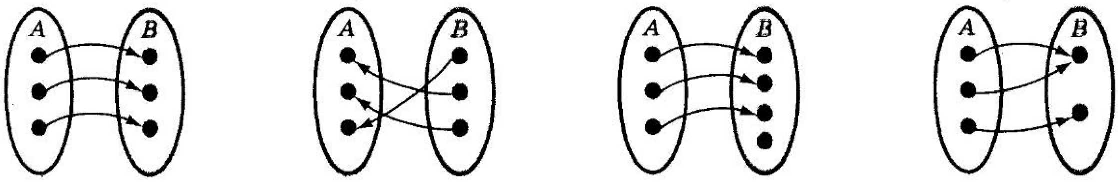
a) $A = \{x \mid$ існує y такий, що $x = 2y, y \in N\}$;
b) $B = \{1, 2, 3\}$;
c) $C = \{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\}$;
d) $D = \{2x \mid x \in Z\}$.

28. Визначте, які з наведених множин дорівнюють одна одній:
a) $A = \{x \mid x \in N, x = 6n - 3, n \in N\}$;
b) $B = \{x \mid x \in N, x = 3n, n \in N\}$;
c) $C = \{x \mid x \in N, x$ кратне 3 і не кратне $2\}$;
d) $D = \{x \mid x \in N, x = 6n + 3, n \in N\}$.

29. Доведіть, що:
a) $\{x \mid x = 3k - 1, k \in Z\} = \{x \mid x = 3n + 2, n \in Z\}$;
b) $\{x \mid x = 4k - 1, k \in Z\} = \{x \mid x = 4n + 3, n \in Z\}$.

Еквівалентність множин

30. Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B:



a) b) c) d)

31. Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?
32. Між першими n натуральними числами і правильними дробами зі знаменником 7 встановлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n.
33. Чи вірно $|A|=|B|$, якщо A – множина парних чисел, B – числа, які можна представити у вигляді суми двох непарних чисел.
34. В якому відношенні знаходяться множини, якщо:
A – парні натуральні числа
B – дроби виду $1/n, n \in N$
C – числа виду $2^n, n \in N$
D – дроби виду $1/2^n, n \in N$

Геометрична інтерпретація множин

35. Зобразіть такі множини у вигляді діаграм Венна та Ейлера:
a) $A= \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, a, e\}$;
c) $A= \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 5, 6\}$;
d) N – натуральні числа, Z – цілі числа, R – дійсні числа;
e) X – птахи, Y – звірі, Z – ссавці, F – кролики, G – живі організми, які живуть в морях і океанах.

36. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера множини A, B, C, і запишіть відношення між множинами:
$A = \{1, 3\}$,
B – непарні додатні числа,
C – множина розв'язків рівняння x^2-4x+3=0.

Операції з множинами

37. Для множин $A = \{1,2,3,4, \}$, $B = \{0,3,6\}$ знайдіть: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.
38. Для множин A і B знайдіть: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $\overline{A}$; $\overline{B}$:
$U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e, g\}$

39. Знайдіть множини A і B, якщо
$A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}$, $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

40. Нехай A – деяка множина. Знайдіть значення виразів:

a) $A \cup \varnothing$;	c) $A \setminus \varnothing$;	e) $A \cap \varnothing$;	g) $\varnothing \setminus A$;
b) $A \cup A$;	d) $A \cup U$;	f) $A \cap A$;	h) $A \cap U$.

41. Які висновки можна зробити про множини A і B, якщо правильна одна з таких рівностей:
a) $A \cup B = A$;
b) $A \cap B = A$;
c) $A \setminus B = A$;
d) $A \setminus B = B \setminus A$.

42. Нехай U – множина студентів. Виділимо її підмножини:
A – множина студентів, що вивчають англійську мову;
B – множина студентів, що вчаться на «відмінно»;
C – множина студентів, що мають спортивний розряд;
D – множина студентів, що входять у студраду.
Виразіть формулами наступні множини студентів:
a) множина відмінників, що мають спортивний розряд;
b) множина студентів, що не є відмінниками і не входять у студраду;
c) множина студентів, що вивчають англійську, але не входять у студраду;
d) множина спортсменів або студентів, що входять у студраду;
e) множина студентів, що входять у студраду, та або відмінники, або вивчають англійську мову;
f) множина студентів, що вивчають англійську мову, але не є ні відмінниками, ні спортсменами;
g) множина студентів, що мають спортивний розряд, які або не відмінники, або не входять у студраду;
h) множина відмінників або студентів, що мають спортивний розряд і входять у студраду;
i) множина студентів, що вивчають англійську мову, є відмінниками, входять у студраду, але не спортсмени.

Доведення тотожностей

43. Нехай A, B і C – множини. За допомогою діаграм Венна покажіть, що:
   a) $(A \cap B) \subseteq A$;
   b) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$;
   c) $A \subseteq (A \cup B)$;
   d) $(A \setminus B) \subseteq A$;
   e) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.

44. Доведіть закони де Моргана за допомогою діаграм Венна та методом двостороннього включення, використовуючи або $\in$, або $\subseteq$.

45. Доведіть, використовуючи основні тотожності алгебри множин:
   a) $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$;
   b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;
   c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$;
   d) $(A \setminus \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;
   e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
   f) $(A \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
   g) $(\overline{B} \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
   h) $(\overline{A} \setminus B) \cup (A \setminus \overline{B}) = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
   i) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
   j) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
   k) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;
   l) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

46. Спростіть вирази:
   a) $\overline{\overline{A} \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{B \cup C})$;
   b) $(A \cap \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \overline{C}$;
   c) $A \cap ((B \cap \overline{C} \cup \overline{C \cup B}) \cap C) \cap \overline{A}$;
   d) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$;
   e) $\big((A \cup B) \cap (A \cup U)\big) \cup \big((A \cup B) \cap (B \cup \varnothing)\big)$;
   f) $\big((A \cup B) \cap (B \cup U)\big) \cup (A \cup \varnothing)$;
   g) $(A \setminus (B \cap C)) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$;
   h) $((A \cap \overline{C} \cup \overline{C \cup B}) \cap C) \cap \overline{A}$;
   i) $\overline{(A \cap \overline{B} \cup C)} \cap (A \cup B) \cap C$;
   j) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \cap (A \cup B)$;
   k) $\overline{((A \setminus B) \cap (\overline{A} \cup B)}$;
   l) $((A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)) \setminus (\overline{B} \cup C)$;
   m) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Булеан множини

47. Скільки підмножин містить:
    a) множина днів тижня;
    b) множина місяців року.

48. Побудуйте булеан множини:
    a) $A = \{$день, ніч$\}$;
    b) $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
    c) $C = \{1, \{2, 3\}, 4\}$.

49. Складіть алгоритм, який як вхідні дані одержує дві множини і визначає, чи рівні ці множини, чи є одна з них підмножиною другої.
50. Складіть алгоритм, який як вхідні дані одержує множину і конструює список всіх можливих підмножин даної множини.

Покриття та розбиття

51. Перевірити, чи є система множин $A_1 \ldots A_n$ розбиттям множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
    a) $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,7\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{5,6\}$
    b) $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{3,4,5\}$, $A_3 = \{6,7\}$
    c) $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$, $A_3 = \{7\}$
    d) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,7\}$, $A_3 = \{3,4,5\}$, $A_4 = \{6\}$
    e) запропонуйте свій варіант розбиття.

52. Перевірити, чи є система множин $A_1 \ldots A_n$ покриттям множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
    a) $A_1 = \{1,2,3,4\}$, $A_2 = \{1,5,6\}$, $A_3 = \{2,4,7\}$, $A_4 = \{1,7\}$
    b) $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$, $A_3 = \{6,7\}$
    c) $A_1 = \{3,4,7\}$, $A_2 = \{1,5,6,7\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{2,6\}$
    d) $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{3,4,5\}$, $A_3 = \{1,7\}$, $A_4 = \{2,3,5\}$
    e) запропонуйте свій варіант покриття.

Завдання, що винесені на контрольну роботу

1. Задати множину іншим способом.
2. Обчислити значення виразу в алгебрі множин.
3. Зобразити множини графічно.
4. Довести тотожність.
5. Спростити вираз.
6. Сконструювати множину на основі заданої вказаним способом.

ТЕМА 2. Відношення

Питання для самоконтролю

1. Що називається відношенням? Що таке бінарне, унарне відношення?
2. Назвіть способи задання відношень.
3. Поясніть поняття «граф відношення», «вершина», «дуга».
4. Що називається оберненим відношенням, і як воно позначається?
5. Що називається композицією відношень?
6. Дайте визначення перерізу відношення R і фактор-множини за відношенням R.
7. Назвіть теоретико-множинні операції, які застосовні до відношень. Поясніть, яким чином ці операції застосовуються до відношень.
8. Дайте визначення властивостям:
   – рефлексивності;
   – антирефлексивності;
   – транзитивності;
   – антитранзитивності;
   – симетричності;
   – асиметричності;
   – антисиметричності;

   Для кожної з наведених властивостей поясніть, чим граф і матриця відношень, що мають цю властивість, відрізняються від графа і матриці відношень, що не мають цієї властивості.
9. Чи може відношення мати не одну, а кілька властивостей? Наведіть приклади. Які з відомих вам властивостей можуть одночасно характеризувати відношення, а які є взаємовиключними, тобто не можуть одночасно характеризувати одне відношення?
10. Дайте визначення відношення еквівалентності.
11. Яким чином відбувається розбиття множини на класи еквівалентності? Які елементи називаються еквівалентними?
12. Які властивості характерні для класів еквівалентності?
13. Дайте визначення відношення часткового порядку. Як воно позначається? Наведіть приклад. Що таке діаграма Хассе?
14. Яка множина називається лінійно упорядкованою? Що таке порівнянні і непорівнянні елементи?
15. Чим відрізняється відношення строгого порядку від відношення часткового порядку? Дайте визначення відношення квазипорядку.
16. Дайте визначення відношення толерантності. Наведіть приклад.
17. Яке відношення називається функціональним?
18. Що таке область визначення і область значень відношення?
19. Дайте визначення сюр’єктивного, ін’єктивного і бієктивного відображень. Чим характеризується граф кожного з цих відображень?
20. Який вид відображення можна назвати «багато до одного», який – «один до одного»?

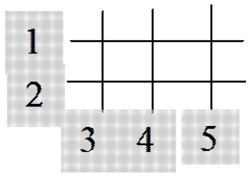
Завдання для роботи в аудиторії

Декартів добуток множин

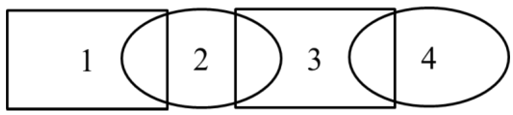
1. Знайти декартів добуток множин $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$: $A\times B$, $B\times A$.
2. На декартовому добутку з попереднього завдання задане відношення $R=\{<x,y>|x+2=y\}$. Запишіть список елементів цього відношення. Які ще відношення можна задати на цьому добутку?

Способи задання відношень

3. Записати відношення $R=\{<x,y>|x,y\in A, x||y\}$ у вигляді списку. $A=\{1,2,3,4,5\}$



4. Записати відношення $R=\{<x,y>|x,y\in A, x\cap y=\varnothing\}$ у вигляді списку. $A=\{1,2,3,4\}$



5. На декартовому добутку $X\times Y$ задане бінарне відношення $R_i\subseteq X\times Y$. Записати відношення у вигляді списку та матриці.
   $X=\{0,1,2,3\}$, $Y=\{1,3,4\}$
   a) $R_1=\{<x,y>|x+y$ - парне$\}$;
   b) $R_2=\{<x,y>|x+y<5\}$;
   c) $R_3=\{<x,y>|x+y=4\}$;
   d) $R_4=\{<x,y>|x>y\}$;
   e) $R_5=\{<x,y>|x+2=y\}$.
6. Побудуйте матрицю і граф для таких відношень, визначених на декартовому добутку $A\times A$, $A=\{1,2,3\}$:
   a) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$;
   b) $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$;
   c) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$;
   d) $\{(1, 3), (3, 1)\}$.
7. Побудуйте граф і список елементів для таких відношень, визначених на декартовому добутку $A\times A$, $A=\{a, b, c\}$ матрицями:

	a	*b*	*c*
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

a)

	a	*b*	*c*
a	0	1	0
b	0	1	0
c	0	1	0

b)

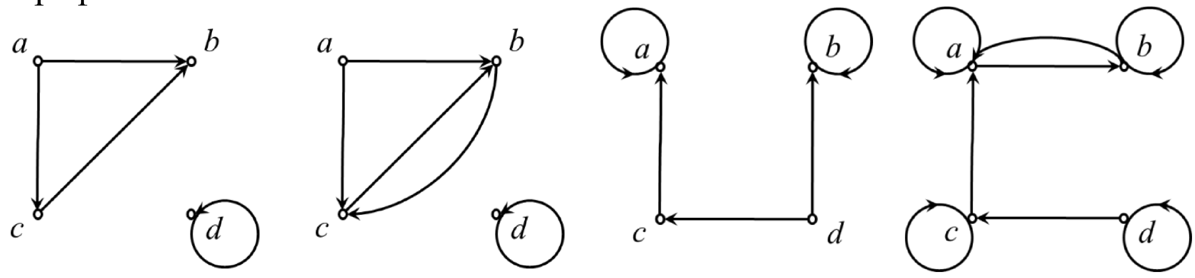
	a	*b*	*c*
a	1	1	1
b	1	0	1
c	1	1	1

c)

	a	*b*	*c*
a	1	1	0
b	1	1	0
c	1	0	1

d)

8. Побудуйте матрицю і список елементів для таких відношень, що задані графічно:



a) b) c) d)

9. Запишіть список елементів для 3-арного відношення R, що задане на множині натуральних чисел таким чином: $(a, b, c) \in R$, якщо $0<a<b<c<5$.
10. Запишіть список елементів для 4-арного відношення R, що задане на множині натуральних чисел таким чином: $(a, b, c, d) \in R$, якщо $abcd = 6$.
11. Визначте алгоритм складання матриці відношення за заданим списком елементів і навпаки.

Операції з відношеннями

12. Нехай A – множина студентів університету, B – множина книг у бібліотеці. Нехай задано відношення R_1, $R_2 \subseteq A\times B$, такі, що $(a, b) \in R_1$, якщо студент a згідно з навчальною програмою повинен під час навчання прочитати книгу b, і $(a, b) \in R_2$, якщо студент a під час навчання вже прочитав книгу b. Дайте словесний опис відношень, що одержуються в результаті виконання операцій:
    a) $R_1 \cup R_2$;
    b) $R_1 \cap R_2$;
    c) $R_1 \setminus R_2$;
    d) $R_2 \setminus R_1$.
13. Нехай дано множини $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ і відношення $R_1, R_2 \subseteq A\times B$: $R_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$, $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$. Визначте:
    a) $R_1 \cup R_2$;
    b) $R_1 \cap R_2$;
    c) $R_1 \setminus R_2$;
    d) $R_2 \setminus R_1$;
    e) $\overline{R}_1$;
    f) R_2^{-1}.
14. Знайдіть відношення R^{-1}, якщо відношення R задане таким чином:
    a) $(a, b) \in R$, якщо $a, b \in N$, $a > b$;
    b) $(a, b) \in R$, якщо $a, b \in N$, a – дільник b;
    c) A – множина країн світу; $(a, b) \in R$, якщо $a, b \in A$ і країна a межує з b.

15. Нехай R_1 і R_2 – бінарні відношення на добутку $A\times A$, $A = \{a, b, c, d\}$, де $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}$, $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$:
   a) побудуйте відношення $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, R_1^2, R_1^3.
   b) побудуйте перерізи відношень R_1, R_2 за елементами a, d і відносно підмножини $\{a, b\}$;
   c) побудуйте фактор-множину за відношенням R_2

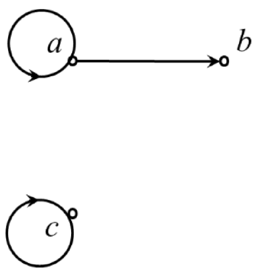
Властивості відношень

16. Визначте, які властивості мають такі відношення, що задані на деякій множині людей. Нехай $(a, b) \in R$, якщо:
   a) a вище на зріст, ніж b;
   b) a і b народилися в один день;
   c) a знайомий з b.

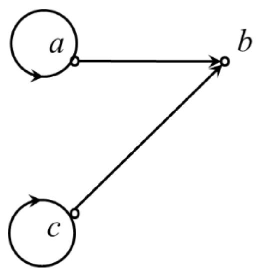
17. Визначте, які властивості має кожне з наведених відношень. Відношення задані на декартовому добутку $A\times A$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$:
   a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$;
   b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
   c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$;
   d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$;
   e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
   f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$.

18. Визначте, які властивості має кожне з відношень, що зображені такими графами:

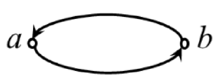
a)



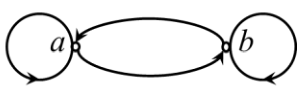
b)



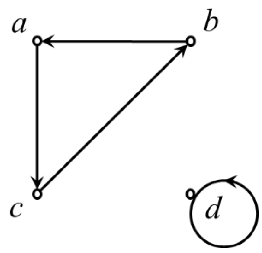
c)



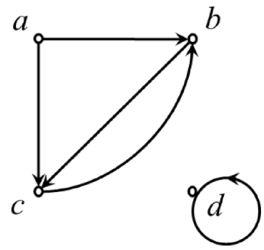
d)



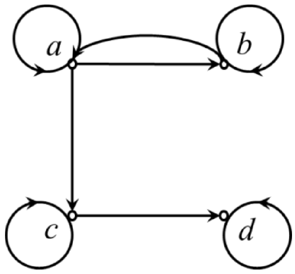
e)



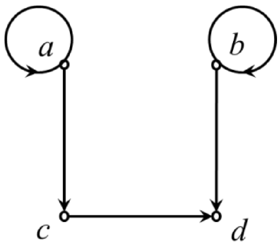
f)



g)



h)



i)

19. Наведіть приклад відношення, яке:
    a) є симетричним і антисиметричним;
    b) не є ані симетричним, ані антисиметричним;
    c) є транзитивним і антитранзитивним.

20. Нехай R_1 і R_2 – деякі відношення. Заповніть таблицю таким чином. У комірку таблиці помістіть « + », якщо з того, що R_1 і R_2 мають зазначену властивість, виходить, що результат операції теж має ці властивості, «-» – якщо при тому, що R_1 і R_2 мають вказану властивість, результат операції може не мати цієї властивості. Обґрунтуйте вибір кожного «+» і «-».

	$R_1 \cup R_2$	$R_1 \cap R_2$	$\overline{R_1}$	$R_1 \backslash R_2$	$R_1 \circ R_2$	R^n, $(n \in N)$	R^{-1}
Рефлексивність							
Антирефлексивність							
Симетричність							
Асиметричність							
Антисиметричність							
Транзитивність							
Антитранзитивність							

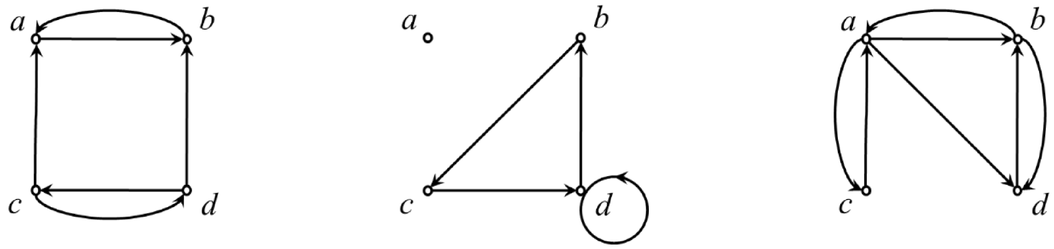
21. Нехай R – рефлексивне і транзитивне відношення. Чи правильно, що $R^n = R$ для всіх $n \in N$.
22. Знайдіть помилку в доведенні такого твердження (це твердження не правильне).
    Твердження: Якщо деяке відношення R симетричне і транзитивне, то воно є також і рефлексивним.
    Доведення: Візьмемо пару елементів (a, b), таку, що $(a, b) \in R$, тоді і $(b, a) \in R$ (відношення симетричне). Якщо $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, то за властивістю транзитивності $(a, a) \in R$, отже відношення рефлексивне.

23. Складіть алгоритм визначення властивостей відношення. Вхідними даними може бути матриця відношення або список елементів відношення.

Замикання відношень

24. Нехай R – відношення на декартовому добутку $A \times A$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$. Знайти:
    a) рефлексивне замикання відношення R;
    b) симетричне замикання відношення R.

25. Нехай на множині Z цілих чисел задано відношення $R = \{(a, b) \mid a \neq b\}$. Знайти його рефлексивне замикання.
26. Як граф, що зображає рефлексивне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?
27. Зобразити граф рефлексивного замикання для кожного з відношень, заданих графами:



a) b) c)

28. Як граф, що зображає симетричне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?
29. Знайти графи симетричного замикання відношень, заданих графами попередньої задачі.
30. Знайти найменше відношення, яке містить відношення $R = \{(a, b) \mid a>b\}$ на множині цілих чисел і водночас рефлексивне та симетричне.
31. Знайти граф найменшого відношення, яке водночас рефлексивне та симетричне для кожного з відношень, заданих графами задачі 27.
32. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання відношень, заданих на декартовому добутку $A\times A$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$:
   a) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$;
   b) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
   c) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
   d) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.
33. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання наведених нижче відношень, заданих на декартовому добутку $A\times A$, $A = \{a, b, c, d, e\}$:
   a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$;
   b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$;
   c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$;
   d) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.
34. Знайти найменше відношення, задане на декартовому добутку $A\times A$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке містить відношення $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ і має такі властивості:
   a) воно рефлексивне та транзитивне;
   b) симетричне та транзитивне;
   c) рефлексивне, симетричне та транзитивне.

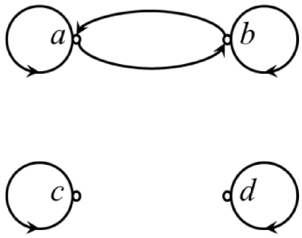
Відношення еквівалентності

35. Які з наведених відношень на множині людей є відношеннями толерантності, які – відношеннями еквівалентності?
   a) a і b однакового віку;
   b) a і b мають спільних батьків;
   c) a і b знайомі;
   d) a і b розмовляють однією мовою.

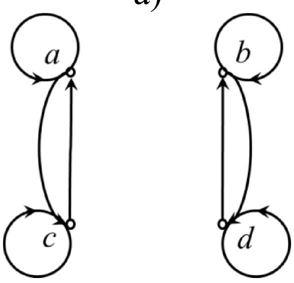
36. Які з наведених відношень, заданих графами, є відношеннями еквівалентності?

a)

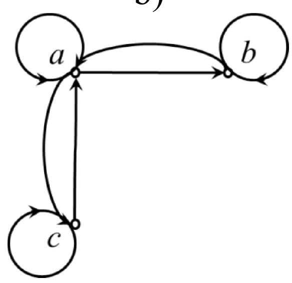
b)



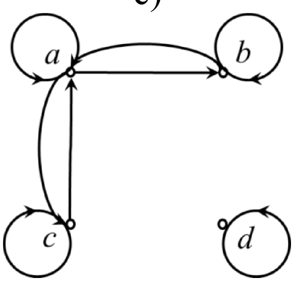
c)



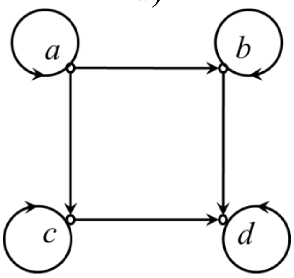
d)



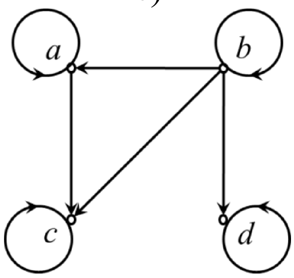
e)



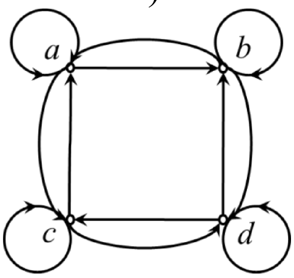
f)



g)



h)



i)

37. Які з наведених матриць задають відношення еквівалентності? Для знаходження відповіді дослідіть графи відношень.

	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

a)

	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

b)

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	1	1	0
c	1	1	1	0
d	0	0	0	1

c)

38. Які з наступних відношень на множині всіх функцій із Z у Z являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності (Z – множина цілих чисел):

a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$;
b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ або $f(l) = g(l)\}$;
c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1$ для всіх $x \in Z\}$;
d) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = C$ для якогось $C \in Z$ і для всіх $x \in Z\}$;
e) $\{(f, g) \mid f(0) = g(l)$ і $f(l)=g(0)\}$.

39. Які з наведених наборів підмножин множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ можуть бути розбиттями цієї множини на класи еквівалентності:
a) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$;
b) $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$;
c) $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5\}$;
d) $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$.

40. Задайте три відношення еквівалентності на множині студентів вашої академічної групи. Визначте класи еквівалентності для цих відношень еквівалентності.

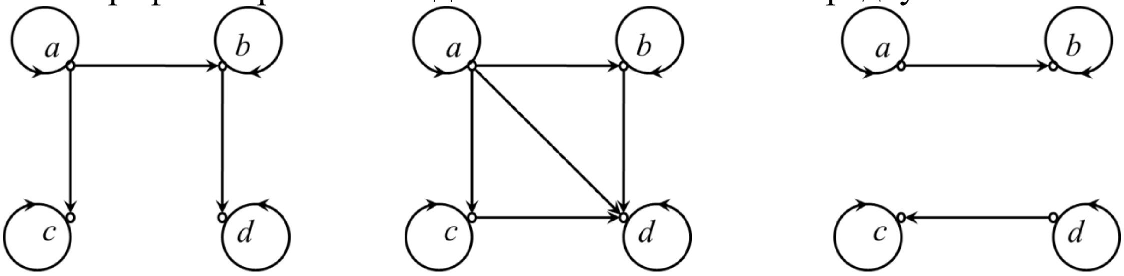
41. Розбити множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на класи еквівалентності за відношеннями:
a) $R_1=\{(x, y) \mid |x-y|$ кратне $3\}$;
b) $R_2=\{(x, y) \mid |x-y|$ кратне $4\}$;
c) $R_3=\{(x, y) \mid |x-y|$ кратне $2\}$

42. Нехай R_1 і R_2 – відношення еквівалентності. Визначте, чи є такі відношення відношеннями еквівалентності:
a) $R_1 \cup R_2$;
b) $R_1 \cap R_2$;
c) $\overline{R_1}$

Відношення порядку

43. На множині цілих чисел Z задано відношення R. У яких випадках множина (Z, R) частково впорядкована:
a) $a\ R\ b$ тоді й лише тоді, коли $a = b$;
b) $a\ R\ b$ тоді й лише тоді, коли $a \neq b$;
c) $a\ R\ b$ тоді й лише тоді, коли $a \geq b$;
d) $a\ R\ b$ тоді й лише тоді, коли a не дільник b?

44. Які з графів зображають відношення часткового порядку?



a) b) c)

45. Які з наведених матриць задають відношення часткового порядку? Для знаходження відповіді дослідіть графи відношень.

	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	1
d	1	1	0	1

a)

	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	0	1

b)

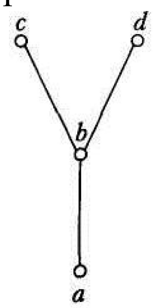
	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	1	0	1

c)

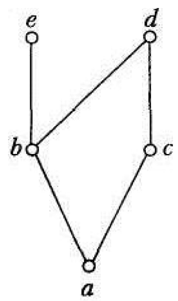
46. Нехай R_1 і R_2 – відношення часткового порядку. Визначте, чи є такі відношення відношеннями часткового порядку:
    a) $R_1 \cup R_2$; b) $R_1 \cap R_2$; c) $\overline{R_1}$

47. Нехай R – відношення часткового порядку. Доведіть, що R^{-1} – теж відношення часткового порядку.
48. Побудувати діаграму Хассе для відношення «більше чи дорівнює» на множині {0, 1, 2, 3, 4, 5}.
49. Побудувати діаграму Хассе для відношень $R=\{(a, b) \mid a$ дільник $b\}$ та $S=\{(a, b) \mid a$ кратне $b\}$ на множині A:
    a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
    b) $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;
    c) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$;
    d) $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$.

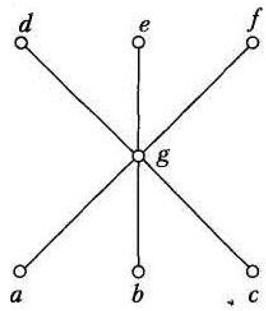
50. Записати всі впорядковані пари відношення часткового порядку з такою діаграмою Хассе:



a)



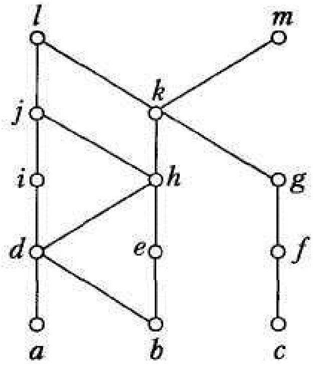
b)



c)

51. Для частково впорядкованої множини (A, R), де $A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$, $R=\{(a, b) \mid a$ дільник $b\}$, знайти всі характеристики підмножини B (верхній та нижній конуси, точну верхню та нижню грані, максимальний та мінімальний елементи):
    a) $B = \{5, 9, 15\}$;
    b) $B = \{15, 24\}$;
    c) $B = \{3, 5, 9\}$.

52. Для відношення часткового порядку, поданого діаграмою Хассе, виділити довільну підмножину з трьох елементів та знайти всі характеристики цієї підмножини.



53. Складіть алгоритм, що визначає за заданою матрицею відношення, чи є відношення частковим або строгим порядком, еквівалентністю або толерантністю.

Функціональні відношення

54. Які з наведених відношень $R \subset A^2$, що задані на множині $A = \{-20, -19, ..., 0, 1, ..., 19, 20\}$, є функціональними? Для функціональних відношень вкажіть відповідні функції. Які з функцій є відображеннями виду $f:A \to A$?
   a) $(a, b) \in R$, якщо $a = b^2$;
   b) $(a, b) \in R$, якщо $a^2 = b$;
   c) $(a, b) \in R$, якщо $a \le b$;
   d) $(a, b) \in R$, якщо $ab = 6$;
   e) $(a, b) \in R$, якщо $a = b^4$;
   f) $(a, b) \in R$, якщо $a = 1/b$.

55. Знайдіть область визначення $Dom\ R$ і область значень $Im\ R$
   $R \subseteq A \times B$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$
   $R = \{(1;1), (2;1), (3;5), (4;2)\}$

56. Знайдіть область визначення і область значень таких функцій:
   a) функція, яка кожному невід'ємному цілому числу x ставить у відповідність його останню цифру;
   b) функція, яка рядку бітів довжиною x ставить у відповідність кількість одиниць у цьому рядку;
   c) функція, яка рядку бітів довжиною x ставить у відповідність кількість бітів, що залишилися при розбитті цього рядку на байти;
   d) функція, яка для цілого додатного числа x знаходить найбільший квадрат, що не перевищує це число.

57. Нехай A і B – скінченні множини, що містять відповідно n і m елементів: $|A|=n$, $|B|=m$. Визначте співвідношення між n і m, якщо:
   a) існує ін'єктивне відображення з A в B;

b) існує сюр'єктивне відображення з A в B;
c) існує бієктивне відображення з A в B.

58. Нехай задано множини A, B, C і відношення $R \subseteq A \times B$ і $S \subseteq B \times C$. Покажіть на прикладах, що наведені висновки не правильні:
   a) якщо R – функціональне відношення, то $S \circ R$ – функціональне відношення;
   b) якщо R задає відображення $A \to B$, то $S \circ R$ – відображення $A \to C$;
   c) якщо S визначає сюр'єкцію $B \to C$, то $S \circ R$ – сюр'єкцію $A \to C$;
   d) якщо S визначає ін'єкцію $B \to C$, то $S \circ R$ – ін'єкцію $A \to C$.

59. Нехай задано множини A, B, C і відношення $R \subseteq A \times B$ і $S \subseteq B \times C$. Доведіть, що:
   a) якщо R і S – функціональні відношення, то $S \circ R$ – функціональне відношення;
   b) якщо R і S визначають відображення $A \to B$ і $B \to C$ відповідно, то $S \circ R$ визначає відображення $A \to C$;
   c) якщо R і S визначають сюр'єкції, то $S \circ R$ – також сюр'єкцію;
   d) якщо R і S визначають ін'єкції, то $S \circ R$ – також ін'єкцію;
   e) якщо R і S визначають бієкції, то $S \circ R$ – також бієкцію.

60. Доведіть, що якщо f – ін'єктивна функція, то існує функція f^{-1}.

Завдання, що винесені на контрольну роботу

1. Побудувати матрицю і граф відношення.
2. Побудувати відношення $R_1 \cup R_2$; $R_1 \cap R_2$; $R_1 \setminus R_2$; $R_1 \circ R_2$; R_1^2; R_1^{-1}.
3. Побудувати переріз відношення за елементом і за заданою підмножиною.
4. Побудувати фактор-множину за відношенням.
5. Визначити властивості відношення. Зробити висновок про тип відношення.
6. Для відношення еквівалентності розбити множину на класи еквівалентності.
7. Для відношення порядку побудувати діаграму Хассе, знайти характеристики заданої підмножини.
8. Знайти область визначення та область значень відображення. Зробити висновок про тип відображення.

ТЕМА 3. Булева алгебра

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення булевої функції. Назвіть способи її задання.
2. Яким чином здійснюється перехід від формули до таблиці істинності функції?
3. Дайте визначення двоїстої функції. Які функції називаються самодвоїстими?
4. Як визначається відношення порядку для пар наборів булевих констант?
5. Назвіть основні закони булевої алгебри.
6. Запишіть формули диз'юнктивного розкладання булевих функцій від n змінних за k змінними ($k < n$) за всіма n змінними, за однією змінною.
7. Запишіть формули кон'юнктивного розкладання булевих функцій від n змінних за k змінними ($k < n$) за всіма n змінними, за однією змінною.
8. Дайте визначення таких понять: елементарна кон'юнкція, елементарна диз'юнкція, конституента одиниці, конституента нуля. Яким чином ці поняття пов'язані з диз'юнктивним і кон'юнктивним розкладанням булевих функцій?
9. Які властивості мають конституенти одиниці та конституенти нуля?
10. Сформулюйте визначення понять нормальних та досконалих нормальних форм булевих функцій. Поясніть їх зв'язок з диз'юнктивним та кон'юнктивним розкладанням булевих функцій.
11. Опишіть алгоритми переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ і ДКНФ.
12. Дайте порівняльну характеристику алгоритмів переходу від довільної формули булевої функції до ДДНФ і ДКНФ.
13. В чому полягає задача мінімізації булевих функцій?
14. Дайте визначення скороченої, тупикової і мінімальної диз'юнктивних нормальних форм.
15. Що називають диз'юнктивним ядром булевої функції?
16. Запишіть формули операцій диз'юнктивного склеювання і поглинання.
17. Що зображує карта Карно (діаграма Вейча)?
18. Сформулюйте правило склеювання кліток і запису мінімальної ДНФ за методом карт Карно.
19. В чому відмінність застосування діаграм Вейча для мінімізації на множині КНФ від карт Карно?
20. Назвіть основні кроки алгоритму мінімізації Квайна.
21. Які модифікації запропонував внести Мак-Класкі у метод мінімізації Квайна?
22. Для чого призначений метод Петрика?
23. В чому полягає недолік методу мінімізації булевих функцій Квайна? Мак-Класкі?
24. В чому суть методу мінімізації булевих функцій Порецького – Блейка?

25. В чому суть методу мінімізації булевих функцій Нельсона?
26. Дайте порівняльну характеристику методів мінімізації Порецького – Блейка, Квайна і Мак-Класкі.
27. Запишіть структуру алгебри Жегалкіна.
28. Назвіть основні закони алгебри Жегалкіна.
29. Запишіть тотожності, що дозволяють виразити основні операції булевої алгебри в алгебрі Жегалкіна.
30. Сформулюйте правило побудови полінома Жегалкіна.
31. Які методи побудови поліному Жегалкіна ви знаєте?
32. Дайте визначення поняттю лінійного поліному Жегалкіна.
33. Які булеві функції називаються лінійними?
34. В чому полягає монотонність булевих функцій?
35. Якщо функція f зображена формулою булевої алгебри із запереченнями, то чи правильно, що f немонотонна? Обґрунтуйте відповідь.
36. Чи можна за видом ДНФ булевої функції стверджувати про її монотонність?
37. Як визначити, чи зберігає функція нуль та одиницю?
38. Що таке класи Поста?
39. В якому випадку система булевих функцій є функціонально повною?

Завдання для роботи в аудиторії

Задання булевих функцій

1. Скільки інтерпретацій має булева функція від трьох змінних $f(x, y, z)$? Назвіть їх.
2. Запишіть таблицю істинності булевої функції $f(x, y, z)$, що приймає значення 1 на 0, 2, 3, 6 інтерпретаціях.
3. Опустіть максимально можливе число дужок у формулі з урахуванням пріоритету виконання операцій:
   a) $(((x \sim y) \sim ((((x \wedge z) \wedge t) \vee (\bar{x})) \rightarrow y)) \vee y)$;
   b) $((x \rightarrow z) \rightarrow (((y \sim (\bar{z})) \wedge t)) \vee ((\bar{t} \wedge x) \sim y))$;
   c) $(y \wedge (\bar{z}) \vee (((\bar{x}) \rightarrow z)) \vee ((\bar{t} \wedge y)) \vee ((\bar{y}) \sim (t \vee x)))$.
4. Визначте інтерпретації, на яких виконуються співвідношення:
   a) $x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = 0$;
   b) $(x \rightarrow y) \wedge (z \rightarrow x) \vee \bar{z} = 1$;
   c) $(\bar{x} \downarrow y) \wedge (x \sim y) = 1$.
5. Побудуйте таблиці істинності функцій:
   a) $f(x, y) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;
   b) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$;
   c) $f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge \bar{z})$;
   d) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
   e) $f(x, y) = x \mid (x \downarrow y)$.

6. Перевірте за допомогою таблиць істинності, чи справедливі такі співвідношення:
   a) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
   b) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
   c) $x \wedge (y \sim z) = (x \wedge y) \sim (x \wedge z)$;
   d) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
   e) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;
   f) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$;
   g) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Операції булевої алгебри

7. Спростіть вирази:
   a) $(x \vee \bar{t}\, y)(\bar{x}\,(\bar{y} \vee t) \vee z) \vee \bar{z} \vee x \vee y\, \bar{t}$;
   b) $(x \vee z)(x \vee t)((z \vee z\, y)\, \bar{z} \vee \bar{x})$;
   c) $(\bar{y} \vee t)(\bar{x}\, z \vee x\, z \vee \bar{t}\, \bar{z} \vee x\, \bar{z})(y \vee t)$;
   d) $(x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y)(y \vee z)$;
   e) $x\, z \vee ((y \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{t})(t \vee y)(\bar{x} \vee t) \vee x\, \bar{z})$;
   f) $(\bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y) \vee t\, \bar{z} \vee (\bar{y}\, \bar{x} \vee z) \wedge (x \vee y)$;
   g) $x\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y} \vee y z \vee \bar{x}\, y \vee z \wedge \bar{y}$;
   h) $(x \vee z \vee y\, z)(\bar{z} \vee \bar{t})(z \wedge \bar{t})(z \vee \bar{t}\, \bar{z} \vee t)$;
   i) $(x \vee \bar{x})(\bar{y} \vee \bar{t})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \vee t) \vee (\bar{y} \vee z)(z \vee t)$;
   j) $(x \vee \bar{z})(\bar{x}\, t \vee y\, t \vee \bar{x}\, \bar{t} \vee y\, \bar{t})(x \vee z)$.

8. Доведіть справедливість тотожностей, використовуючи закони булевої алгебри:
   a) $(x \mid y) \mid (x \sim y)) \mid ((z \oplus t) \to (t \leftarrow z)) = ((y \to z) \to (x \leftarrow z)) \downarrow ((x \mid t) \mid (t \to y))$;
   b) $((x \wedge \bar{z}) \downarrow (y \leftarrow z)) \wedge ((x \mid t) \leftarrow (y \wedge t) = ((x \mid y) \mid (x \oplus y)) \to ((z \oplus t) \wedge (t \to z))$;
   c) $((x \downarrow y) \vee (x \oplus y)) \leftarrow ((z \leftarrow t) \downarrow (z \sim t)) = ((z \to x) \wedge (z \to y)) \to ((x \downarrow t) \vee (y \downarrow t))$;
   d) $((x \sim y) \leftarrow (x \downarrow y) \downarrow ((z \sim t) \downarrow (z \leftarrow t)) = ((z \leftarrow x) \downarrow (z \leftarrow y)) \mid ((x \downarrow t) \downarrow (y \downarrow t))$;
   e) $((x \wedge y) \vee (x \oplus y)) \leftarrow ((t \leftarrow z) \downarrow (t \sim z)) = ((x \to z) \wedge (y \to z)) \to ((x \mid t) \mid (y \mid t))$;
   f) $((t \to y) \to (\bar{z} \leftarrow y)) \downarrow ((z \vee x) \mid (t \to x)) = ((\bar{z} \mid t) \mid (z \oplus t)) \mid ((x \sim y) \to (\bar{x} \leftarrow y))$.

Розкладання булевих функцій за змінними

9. Знайти диз'юнктивне розкладання таких функцій за змінними x, z:
   a) $(yx \vee x\, \bar{z})(x \vee \bar{y}z(z \vee \bar{x}y))$;
   b) $(x \vee (z \vee yz))(z \vee \bar{x}\, \bar{z} \vee y)$;
   c) $(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \vee x) \vee (\bar{y} \vee z)$;
   d) $(x \vee \bar{z})(\bar{x}t \vee yt \vee \bar{x}\, \bar{t} \vee y\, \bar{t})(x \vee z)$;

10. Знайти кон'юнктивне розкладання таких функцій за змінними x, z:
   a) $(xz \vee y)(x\, \bar{y} \vee \bar{x}\, \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})$;
   b) $(y \vee z)(t \vee y\, \bar{z}) \vee \bar{t}\, \bar{x} \vee (z \vee y)(\bar{t} \vee \bar{z})$;
   c) $yt \vee (z \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{t} \vee \bar{z})(x \vee \bar{z}) \vee \bar{y}t$;

d) $(\bar{z} \vee t)(t \vee x) \vee (\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee \bar{t})(\bar{t} \vee z)$;

e) $x\bar{t} \vee (\bar{z}\bar{y}) \vee t)(z \vee y) \vee (\bar{t} \vee \bar{z})(z \vee y)$;

f) $((t \vee \bar{t}z)\bar{t} \vee \bar{y})(y \vee t)(y \vee x)$;

g) $(z \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{y} \vee x) \vee y\bar{t} \vee yt$.

Нормальні форми булевих функцій

11. Побудувати таблиці істинності для функцій, що задані ДКНФ:

a) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$;

b) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$;

c) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

d) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

12. Побудувати таблиці істинності для функцій, що задані ДДНФ:

a) $f(x, y, z) = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$;

b) $f(x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$;

c) $f(x, y, z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$;

d) $f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$.

13. Випишіть конституенти одиниці булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ з такого списку елементарних кон'юнкцій:

a) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

b) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$

c) $x_1x_2\bar{x}_3x_4$

d) x_1.

14. Випишіть конституенти нуля булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ з такого списку елементарних диз'юнкцій:

a) $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$

b) $x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$

c) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$

d) $\bar{x}_1$.

15. Знайдіть ДДНФ таких функцій:

a) $f(x, y, z) = x \wedge y \wedge z$;

b) $f(x, y, z) = x \vee yz$;

c) $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee y(x \vee z)$;

d) $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$;

e) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \rightarrow z$.

16. Отримайте ДКНФ таких функцій:

a) $f(x, y, z) = x \vee y \vee z$;

b) $f(x, y, z) = x \vee yz$;

c) $f(x, y, z) = x \vee \bar{y}z \vee \bar{z}$;

d) $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee y(x \vee z)$.

17. Знайти ДНФ функції, що задана формулою:

a) $(x(\bar{x} \to y)) \to y$;

b) $(yx \vee x\bar{z})(x \vee \bar{y}z(z \vee \bar{x}y))$;

c) $(x \vee (z \vee yz))(z \vee \bar{x}\bar{z} \vee y)$;

d) $(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \vee x) \vee (\bar{y} \vee z)$;

e) $(x \vee \bar{z})(\bar{x}t \vee yt \vee \bar{x}\bar{t} \vee y\bar{t})(x \vee z)$;

f) $(xy \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)(z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y})(t \vee z)$.

18. Знайти КНФ функції:

a) $\overline{(x \vee y)}(x \to y)$;

b) $(xz \vee y)(x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})$;

c) $(y \vee z)(t \vee y\bar{z}) \vee \bar{t}\bar{x} \vee (z \vee y)(\bar{t} \vee \bar{z})$;

d) $yt \vee (z \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{t} \vee \bar{z})(x \vee \bar{z}) \vee \bar{y}t$;

e) $(\bar{z} \vee t)(t \vee x) \vee (\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee \bar{t})(\bar{t} \vee z)$;

f) $((t \vee \bar{t}z)\bar{t} \vee \bar{y})(y \vee t)(y \vee x)$;

g) $\bar{z}\bar{y} \vee tz \vee \bar{y}z \vee t\bar{z} \vee y\bar{t}$.

19. Побудувати карти Карно для таких функцій:

a) $f(x, y, z, t) = xyzt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t}$;

b) $f(x, y, z, t) = x\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t}$;

c) $f(x, y, z, t) = \bar{x}yz\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyz\bar{t}$;

d) $f(x, y, z, t) = xy\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t$;

e) $f(x, y, z, t) = \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee xyzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$;

f) $f(x, y, z, t) = (x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})$;

g) $f(x, y, z, t) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)$;

h) $f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})$.

20. Знайти мінімальні ДНФ функцій, що задані такими картами Карно:

zt \ xy	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1			1
10	1			1

a)

zt \ xy	00	01	11	10
00		1		
01				
11		1	1	
10		1	1	

b)

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	
11		1		
10	1			1

c)

21. Знайти мінімальні КНФ для функцій, що задані діаграмами Вейча:

zt \ xy	00	01	11	10
00	0	0		
01	0	0		
11				
10	0	0		

zt \ xy	00	01	11	10
00	0		0	
01	0			0
11	0	0	0	0
10		0	0	

zt \ xy	00	01	11	10
00		0	0	
01		0	0	
11		0	0	
10		0	0	

____________________ a) ____________________ b) ____________________ c)

22. Знайти мінімальні ДНФ частково визначених функцій, що задані такими діаграмами Вейча:

zt \ xy	00	01	11	10
00	-	0	0	-
01	1	-	1	1
11	0	0	-	0
10	-	0	-	-

a)

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	-	1	1
01	-	1	-	-
11	0	-	0	0
10	1	0	0	1

b)

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	-	-
01	-	0	1	1
11	-	0	1	1
10	1	-	0	0

c)

23. Знайти мінімальні КНФ частково визначених функцій, заданих такими картами Карно:

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	-
01	0	0	1	1
11	-	-	1	-
10	1	1	1	-

a)

zt \ xy	00	01	11	10
00	-	0	1	1
01	1	1	-	-
11	0	-	0	0
10	1	1	0	-

b)

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	-	-
11	0	0	-	-
10	-	-	1	1

c)

24. Знайти скорочені ДНФ функцій методом Нельсона:

a) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$;

b) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$;

c) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

d) $f(x, y, z, t) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)$.

25. Знайти скорочені ДНФ функцій методом Квайна та методом Мак-Класкі. ДДНФ функцій задані номерами конституент одиниці:

a) $f(x, y, z, t) = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13\}$;

b) $f(x, y, z, t) = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$;

c) $f(x, y, z, t) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15\}$;

d) $f(x, y, z, t) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$;

e) $f(x, y, z, t) = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15\}$;

f) $f(x, y, z, t) = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$;

g) $f(x, y, z, t) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$.

26. Знайти скорочені ДНФ методом Порецького-Блейка для таких функцій:

a) $f(x, y, z, t) = \bar{x}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{y}\,t \vee x\,y\,z\,\bar{t}$;

b) $f(x, y, z, t) = y\,z\,t \vee \bar{x}\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t} \vee x\,y\,\bar{z}$;

c) $f(x, y, z, t) = x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$;

d) $f(x, y, z, t) = x\,y\,\bar{z} \vee \bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,z\,t \vee \bar{y}\,t$;

e) $f(x, y, z, t) = x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y$;

f) $f(x, y, z, t) = \bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,t \vee x\,y\,z\,t \vee x\,\bar{y}\,\bar{t}$;

Поліном Жегалкіна

27. Представити у вигляді поліному Жегалкіна такі логічні функції:
   a) $(xz \vee y)(x\bar y \vee \bar x \bar y \vee \bar z)(x \vee \bar y)$;
   b) $(y \vee z)(t \vee y\bar z) \vee t\bar x \vee (z \vee y)(\bar t \vee \bar z)$
   c) $yt \vee (z \vee \bar t)(x \vee z)(\bar t \vee \bar z)(x \vee \bar z) \vee \bar y t$;
   d) $(\bar z \vee t)(t \vee x) \vee (\bar z \vee \bar x)(\bar z \vee \bar t)(\bar t \vee z)$;
   e) $x\bar t \vee (\bar z \bar y \vee t)(z \vee y) \vee (\bar t \vee \bar z)(z \vee y)$;
   f) $((t \vee \bar t z)\bar t \vee \bar y)(y \vee t)(y \vee x)$;
   g) $(z \vee \bar x)(\bar x \vee \bar t)(x \vee z)(\bar y \vee x) \vee y\bar t \vee yt$;
   h) $(t \vee \bar x \bar t \vee x)(y \vee t \vee tz)\bar z \bar x t$;
   i) $\bar z \bar y \vee tz \vee \bar y z \vee t\bar z \vee y\bar t$.

28. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна для таких функцій:
   a) $(yx \vee x\bar z)(x \vee \bar y z(z \vee \bar x y))$;
   b) $(x \vee z \vee yz)(z \vee \bar x \bar z \vee y)$;
   c) $(x \vee \bar y)(\bar y \vee \bar z)(\bar z \vee x) \vee (\bar y \vee z)$.

29. Дослідити на лінійність такі булеві функції:
   a) $(yx \vee x\bar z)(x \vee \bar y z(z \vee \bar x y))$;
   b) $(x \vee z \vee yz)(z \vee \bar x \bar z \vee y)$;
   c) $(x \vee \bar y)(\bar y \vee \bar z)(\bar z \vee x) \vee (\bar y \vee z)$.
   d) $(xz \vee y)(x\bar y \vee \bar x \bar y \vee \bar z)(x \vee \bar y)$;
   e) $(y \vee z)(t \vee y\bar z) \vee t\bar x \vee (z \vee y)(\bar t \vee \bar z)$
   f) $yt \vee (z \vee \bar t)(x \vee z)(\bar t \vee \bar z)(x \vee \bar z) \vee \bar y t$;
   g) $((y \vee z) \to (y \oplus z)) \vee ((x \to t) \downarrow (x \sim t))$;
   h) $((z \to t) \mid (z \oplus t)) \mid ((x \sim y) \to (x \wedge y))$;
   i) $((z \mid t) \mid (\bar z \sim t)) \to ((x \oplus y) \wedge (y \to x))$.

Двоїста функція

30. Знайти двоїсті формули до таких функцій:
   a) $(x \wedge (y \vee z)) \vee \bar x \wedge \bar y$;
   b) $xy \vee yz \vee xz$;
   c) $x\bar y \vee x \vee y \vee zt$.

31. Визначте, чи є такі функції самодвоїстими:
   a) $f(x, y) = (\bar x \vee y) \wedge (\bar y \vee x)$;
   b) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
   c) $f(x, y, z) = (\bar x \wedge \bar y) \vee (x \wedge z) \vee (\bar y \wedge \bar z)$;
   d) $f(x, y, z) = (x \wedge \bar y) \vee (x \wedge \bar z) \vee (y \wedge \bar z)$;
   e) $f(x, y) = x \vee \overline{(x \wedge y)}$.

Монотонність булевих функцій

32. Довести монотонність таких функцій:
   a) $x \wedge (y \vee z)$;
   b) $x \vee y \vee z$;
   c) $x \vee (y \wedge z)$;
   d) $x \wedge y \wedge z$.

33. Дослідити такі функції на монотонність:
   a) $yx \oplus y$;
   b) $x \to (y \to x)$;
   c) $xy \oplus y \oplus x$;
   d) $x \to (x \to y)$;
   e) $x \sim y$;
   f) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
   g) $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

34. Довести, що функція, двоїста монотонній, сама є монотонною.

Повнота та замкненість

35. Перевірити, чи є система булевих функцій функціонально повною:
   a) $f_1 = x \wedge (y \vee z)$;
      $f_2 = x \to z$;
   b) $f_1 = x \sim y$;
      $f_2 = yx \oplus y$;
   c) $f_1 = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$;
      $f_2 = xy \oplus y \oplus x$;
      $f_3 = x \wedge y$;.

Завдання для домашньої контрольної роботи

1. Побудувати таблицю істинності для заданої функції.
2. Побудувати ДДНФ та ДКНФ.
3. Знайти МДНФ та МКНФ методом карт Карно.
4. Знайти СДНФ
   4.1. методом Нельсона
   4.2. методом Квайна
   4.3. методом Мак-Класкі
5. Знайти МДНФ за допомогою імплікантної таблиці та методу Петрика.
6. Записати диз'юнктивне розкладання функції (функція у вигляді МДНФ)
   6.1. за змінною z
   6.2. за змінними x, y
7. Записати кон'юнктивне розкладання функції (функція у вигляді МДНФ)
   7.1. за змінною z
   7.2. за змінними x, y

8. Записати задану функцію у вигляді полінома Жегалкіна.
9. Дослідити задану функцію на:
   9.1. збереження нуля та одиниці;
   9.2. монотонність;
   9.3. самодвоїстість;
   9.4. лінійність.

Варіанти завдань

№	$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах
1.	1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14;
2.	1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15;
3.	5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15;
4.	1, 8, 10, 11, 13, 14, 15;
5.	0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 15;
6.	0, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14,15;
7.	1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15;
8.	2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15;
9.	1, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14;
10.	2, 4, 6, 7, 10, 12, 14, 15;
11.	2, 4, 6, 9, 11, 13, 15;
12.	0, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14;
13.	0, 1, 2, 3, 8, 10, 11;
14.	1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 15;
15.	0, 1, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 15;
16.	2, 3, 10, 11, 14, 15;
17.	0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13;
18.	2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 15;
19.	1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14;
20.	0, 3, 7, 8, 9, 13, 12;
21.	0, 2, 4, 6, 7, 10, 12, 14;
22.	1, 3, 4, 5, 9, 11, 12;
23.	3, 4, 5, 6, 7, 11, 14, 15;
24.	4, 6, 8, 9,10, 12, 14;
25.	0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15;
26.	3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 15;
27.	3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14;
28.	4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15;
29.	4, 6, 8, 10, 12, 14, 15;
30.	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.

ТЕМА 4. Математична логіка

Питання для самоконтролю

1. Який вид речень моделює формальна логіка? Наведіть приклади речень, які не розглядаються у формальній логіці.
2. Дайте визначення поняттю «висловлення».
3. Що мають на увазі під істиннісним значенням висловлення?
4. Які висловлення називаються атомами?
5. Що у логіці висловлень називають логічними зв'язками, наведіть їх.
6. Дайте визначення правильно побудованої формули.
7. Наведіть приклади формул логіки висловлень, що містять будь-які логічні зв'язки, і відповідних до них речень природної мови.
8. Сформулюйте алгоритм запису складного речення природної мови у вигляді формули логіки висловлень.
9. Дайте визначення логічного наслідку одного (кількох) висловлень.
10. В чому полягає відмінність дедуктивних висновків від недедуктивних? Яким чином будується дедуктивний висновок?
11. Сформулюйте теорему дедукції та її наслідок.
12. Що являє обчислення висловлень?
13. Що є теоремами обчислення висловлень?
14. Дайте визначення незалежній системі аксіом.
15. Назвіть правила висновку, які найбільш часто застосовуються під час побудови обчислення висловлень.
16. В чому полягає метод доведення від супротивного? Дайте порівняльну характеристику двом схемам доведення від супротивного.
17. Дайте визначення поняттю предикат. Назвіть способи визначення предикатів.
18. Що називається порядком предиката?
19. Що розуміють під предметною областю? Дайте визначення понять предметна змінна і предметна константа. Наведіть приклади.
20. Що розуміють під квантором загальності?
21. Дайте визначення поняттю квантор існування.
22. Які змінні називаються зв'язаними, а які – вільними?
23. До яких наслідків призводить застосування квантора за однією із змінних n-місного предиката?
24. Дайте визначення випередженої нормальної форми.
25. Сформулюйте алгоритм перетворення виразів довільної форми у ВНФ.
26. Назвіть правила висновку, які можна використовувати для проведення дедуктивних умовиводів з висловленнями логіки предикатів.
27. До яких наслідків може призвести перенесення квантора на початок формули? Наведіть приклади коректного і некоректного перенесення кванторів на початок формули.
28. Поясніть суть заміни зв'язаної змінної.

29. Сформулюйте комутативні властивості кванторів.
30. Запишіть формули закону де Моргана для кванторів.
31. Сформулюйте призначення обчислення предикатів. Запишіть формули аксіом обчислення предикатів. Поясніть обмеження аксіом обчислення предикатів.
32. Назвіть правила висновку обчислення предикатів.
33. Сформулюйте правило перейменування вільних змінних.
34. В чому полягає сутність правила перейменування зв'язаних змінних?
35. Що розуміють під багатозначною логікою? Які існують різновиди багатозначних логік?

Завдання для роботи в аудиторії

Логіка висловлень, основні поняття

1. Що з наведених нижче речень висловлення, предикати та просто речення:
   a) $x > 0$;
   b) про нього щось говорять;
   c) $2 + 3 = 6$;
   d) x брат y;
   e) протилежні боки A і B паралелограма рівні;
   f) кожне явище x має свою причину y.

2. Записати такі положення за допомогою формул:
   a) вважаємо, що команда виграла турнір (A), якщо забито 10 голів (B), не було програшів (C) і не було порушень (D);
   b) потрібно отримати зарплату (A), для того, щоб діти отримали подарунки (C) або пішли на новорічне свято (B);
   c) якщо вологість така висока (A), то або пополудні (B), або ввечері (C) піде дощ;
   d) задача має бути сформульованою (B) і мати рішення (C), для того, щоб її можна було вирішити (A);
   e) якщо студент складе заліки (A), лабораторні роботи (B) і курсові (C), то його допустять до складання іспитів (D).

3. Нехай є вислови P = «йому потрібний лікар»; Q = «йому потрібний адвокат»; R = «з ним стався нещасний випадок»; S = «він хворий»; U = «він поранений». Записати такі положення за допомогою формул:
   a) якщо він хворий, йому потрібний лікар, і якщо з ним стався нещасний випадок, йому потрібний адвокат;
   b) якщо йому потрібний лікар і адвокат, то стався нещасний випадок;
   c) якщо йому потрібний лікар, то він хворий або поранений;
   d) потрібний лікар і адвокат лише за умови, що він хворий або поранений;
   e) якщо він не хворий або не поранений, то йому не потрібний лікар.

4. Чи є такі формули загальнозначущими, суперечливими або несуперечливими:
   a) $\neg(\neg A) \to A$;
   b) $(A \to B) \to (B \to A)$;
   c) $(A \wedge (B \to A)) \to A$;
   d) $(A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)$.
5. Вказати порядок виконання операцій у формулах:
   a) $\neg A \vee \neg B \wedge C$;
   b) $A \to B \to C \to D$.
6. Виключити якомога більше число дужок у формулі:
   a) $(\neg ((A) \vee (C))) \vee (B)$;
   b) $(((A) \to (B)) \to (C) \vee ((A) \to ((B) \to (C)))$;
   c) $((B) \sim (\neg (C))) \vee (((A) \to (A)) \to ((B) \vee (D)))$;
   d) $\neg((\neg((A) \vee (B))) \neg (C) \to ((\neg ((C) \to (D))) \vee E))$;
   e) $(\neg ((B) \sim (C))) \wedge ((\neg(E)) \vee (\neg (A)))$;
   f) $((\neg ((A) \to (B))) \vee (\neg ((C) \vee (D))) \wedge \neg (F))$.
7. Доведіть, що заперечення висловлення «A є достатня та необхідна умова для B» еквівалентне висловленню «$\neg A$ є достатня і необхідна умова для $\neg B$».
8. Побудуйте висловлення, еквівалентне $A \vee B$, використовуючи тільки операції заперечення і кон'юнкції.
9. Побудуйте складне висловлення, еквівалентне $A \wedge B$, використовуючи тільки операції диз'юнкції і заперечення.
10. Побудуйте два складних висловлення, еквівалентних $A \to B$, використовуючи тільки:
    a) операції диз'юнкції і заперечення;
    b) заперечення і кон'юнкції.
11. Використовуючи тотожності, спростіть формули логіки висловлень:
    a) $\neg(A \vee B \vee C)\ (A \wedge (B \vee \neg C)) \wedge \neg B$;
    b) $(A \vee B) \wedge \neg C \vee A \vee \neg C \vee B \vee A$.

Логічний висновок

12. Нехай A – «дверний замок зламаний», B – «вхідні двері відкриті». Випишіть відповідний логічний висновок за правилом Modus Ponens.
13. Перевірте правильність таких висновків:
    a) $\dfrac{A \to B, \neg A \to B}{B}$ b) $\dfrac{A \to B, C \to \neg B}{A \to \neg C}$

    c) $\dfrac{A \to B, \neg B \to \neg C}{C \to A}$ d) $\dfrac{A \to B, \neg A \to C}{B \to C}$

14. Які висновки будуть правомірними?
   a) Якщо студент не знає логіку висловлень, то не зможе розв'язати задану логічну задачу. Студент розв'язав задану логічну задачу. Отже, студент знає логіку висловлень.
   b) Якщо студент не знає логіку висловлень, то не зможе розв'язати задану логічну задачу. Студент не знає логіку висловлень. Отже, він не розв'яже задану задачу.
   c) Якщо студент не знає логіку висловлень, то не зможе розв'язати задану логічну задачу. Студент знає логіку висловлень. Отже, він розв'яже задану задачу.
   d) Якщо студент не знає логіку висловлень, то не зможе розв'язати задану логічну задачу. Студент не розв'яже задану логічну задачу. Отже, він не знає логіку висловлень.

15. Якщо конгрес відмовляється прийняти нові закони, то страйк не буде закінчено, якщо він не триває більше року і президент фірми не йде у відставку. Чи закінчиться страйк, якщо конгрес відмовляється діяти і страйк тільки почався? Побудуйте логічний висновок і одержіть відповідь.
16. Які правила виведення використано у наступних твердженнях?
   a) Якщо падатиме дощ, то басейн буде зачинено. Падає дощ. Отже, басейн зачинено.
   b) Якщо падатиме сніг, то університет буде зачинено. Університет не зачинено. Отже, сніг не падає.
   c) Якщо я піду плавати, то довго буду на сонці. Якщо я довго буду на сонці, то засмагну. Отже, якщо я піду плавати, то засмагну.
   d) Кенгуру живуть в Австралії, мають сильні нижні кінцівки, роблять довгі стрибки, і вони сумчасті. Отже, кенгуру – сумчасті.
   e) На вулиці спека більше 40 градусів або небезпечне забруднення повітря. Сьогодні менше 40 градусів; отже, забруднення повітря небезпечне.

Логіка предикатів, основні поняття

17. В наведених одномісних предикатах зробіть можливі підстановки змінної x так, щоб одержати істинні висловлення. Які з них припускають одну, а які – багато підстановок?
   a) x – найвища горна вершина у світі;
   b) x – представник діалектичної логіки;
   c) $x + 7 = 15$;
   d) x– логічна зв'язка;
   e) x – видатний античний логік.

18. Визначте, чи еквівалентні такі предикати:
   a) $x^2 = 1$ і $x = 1$;
   b) $x^2 = x$ і $x = 1$.

19. Змінні функції «$x > y$» приймають значення на множині $\{1,2,3\}$; B_1, B_2 – предикати, що задаються цією функцією відповідно при алфавітному і зворотному йому порядках. Встановіть:
   a) область визначення предикатів B_1 і B_2
   b) значення істинності B_1 (2, 3) і B_2 (2, 3).

20. Скільки різних предикатів визначає висловлення «$x + y = z$», якщо M_x, M_y і M_z – множини значень змінних x, y, z:
   a) $M_x = M_y = M_z = \{1, 2\}$;
   b) $M_x = \{1\}$, $M_y = \{1, 2\}$, $M_z = \{2, 3\}$?

Квантори

21. Запишіть такі речення, використовуючи знаки кванторів:
   a) існує число x таке, що $x + 1 = 5$;
   b) яким би не було число y, $y + 0 = y$;
   c) існує число x таке, що яким би не було число y, $x + y = 10$;
   d) будь-яке число або додатне, або від'ємне, або дорівнює нулю.

22. Нехай x і y– будь-які люди, $Q(x, y)$ означає «x батько y». Наведені висловлення сформулюйте природною мовою, визначивши їх значення істинності:
   a) $\forall x\ \exists y\ Q(x, y)$;
   b) $\forall y\ \exists x\ Q(x, y)$;
   c) $\forall x\ \forall y\ Q(x, y)$;
   d) $\exists x\ \forall y\ Q(x, y)$;
   e) $\exists y\ \forall x\ Q(x, y)$;
   f) $\exists x\ \exists y\ Q(x, y)$.

23. Нехай $N(x)$ – «x – натуральне число», $C(x)$ – «x – ціле число», $P(x)$ – «x – просте число», $E(x)$ – «x – парне число», $O(x)$– «x– непарне число», $D(x, y)$– «y ділиться на x». Сформулюйте природною мовою наведені висловлення, встановивши їх значення істинності:
   a) $P(x)$;
   b) $E(2) \wedge P(2)$;
   c) $\forall x\ (D(2, x) \to E(x))$;
   d) $\exists x\ (E(x) \wedge D(x, 6))$;
   e) $\forall x\ [P(x) \to \exists y\ (E(y) \wedge D(x, y))]$;
   f) $\forall x\ (N(x) \to C(x))$;
   g) $\exists x\ (N(x) \to C(x))$;
   h) $\forall x\ (C(x) \to N(x))$;
   i) $\forall x\ \forall y\ [O(x) \to (P(y) \to D(x, y))]$;
   j) $\forall x\ [C(x) \to (E(x) \vee \neg E(x))]$;
   k) $\exists x\ \forall y\ [(C(x) \wedge C(y)) \to D(x, y)]$;
   l) $\forall x\ \forall\ y\ [(E(x) \wedge O(x)) \to \neg D(x, y)]$.

24. Предикат $P(x, y)$ задано в предметній області $D = \{a, b\}$ матрицею:

x	a	a	b	b
y	a	b	a	b
$P(x, y)$	0	1	1	1

Яка з нижченаведених формул визначає цей предикат?

a) $\forall x\, P(x, a)$;

b) $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$;

c) $\forall y\, P(a, y)$;

d) $\forall y\, \forall x\, P(x, y)$;

e) $\forall y\, \forall x\, \neg P(x, y)$.

Логіка предикатів, закони

25. Вкажіть вільні та зв'язані входження кожної із змінних у таких формулах:

a) $\forall x\, P(x, y) \wedge \forall y\, Q(y)$;

b) $\forall x\, (P(x) \rightarrow P(y))$;

c) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y)) \vee \exists y\, R(x, y)$;

d) $\forall x\, [(P(x) \rightarrow Q(y)) \vee \exists y\, R(x, y)]$.

26. Опустіть знаки заперечення безпосередньо на предикати та квантори:

a) $\neg(\exists x\, (\neg\forall y\, (B(y) \vee \exists z\, C(z)) \wedge \neg A(x)))$;

b) $\neg(\forall y\, \neg(\exists x\, (A(y, z) \vee B(x)) \vee C(z)))$;

c) $\neg(\exists x)\, (\neg(\forall y\, ((A(x) \rightarrow B) \vee C(x, y))))$;

d) $\neg(\forall u\, \neg(\forall v\, (P(u) \rightarrow Q(v) \rightarrow A(z))))$.

27. Встановіть, чи еквівалентні задані предикати:

a) $\exists x\, (A(x) \wedge \neg B(y))$ і $\neg(\forall z\, (A(z) \rightarrow B(y)))$;

b) $\forall x\, ((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (A(x) \rightarrow \neg B(x)))$ і $\neg(\exists y\, A(y))$.

28. Винести за дужки квантори:

a) $\exists v\, C(v, y) \wedge (\exists x\, A(x) \vee B)$;

b) $\exists x\, \exists y\, A(x, y) \wedge \exists x\, \exists y\, B(x, y)$;

c) $\forall x\, \exists y\, A(x, y) \wedge \forall x\, \exists y\, B(x, y)$;

d) $\exists x\, A(x, y) \vee (\forall x\, B(x) \vee \forall y\, C(y))$;

e) $\exists x\, \forall y\, A(x, y) \wedge \exists x\, \exists z\, (B(x, z) \wedge \exists y\, A(x, y))$;

f) $\exists x\, \forall y\, A(x, y) \vee \exists x\, \exists z\, (B(x, z) \wedge \exists y\, A(x, y))$.

29. Довести загальнозначущість таких формул:

a) $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, P(y)$;

b) $\forall x\, P(x) \vee (\exists y\, \neg P(y))$;

30. Довести, що формула $\forall x\, P(x) \wedge \exists y\, \neg P(y)$ суперечлива.

31. Довести, що формула $P(a) \rightarrow \neg(\exists x\, P(x))$ несуперечлива.

Випереджені нормальні форми

32. Звести до ВНФ:
    a) $\forall y\ (F(y) \vee \neg(\exists x\ P(x, y)))$;
    b) $\neg(\exists x\ \forall y\ A(x, y) \wedge \exists y\ \forall z\ (C(z) \to B(x, y)))$;
    c) $\exists x\ \forall y\ B(x, y) \sim \exists x\ A(x)$;
    d) $\neg(\forall y\ \exists x\ (A(x) \to B(y)))$;
    e) $\forall x\ F(x) \to \neg(\forall x\ (F(y) \vee \forall y\ P(x, y)))$.

Доведення теорем у логіці предикатів

33. Визначте, чи є формула $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ логічним наслідком формул $\exists x\ P(x)$ і $\exists x\ Q(x)$.
34. Показати, що формула G не є логічним наслідком множини формул K:
    a) $G = \forall x\ \neg R(x)$,
    $K=\{\exists xR(x) \to \exists xQ(x),\ \neg Q(a)\}$;
    b) $G = \forall xR(x, x)$,
    $K=\{\forall x\forall y(R(x, y) \to R(y, x)),\ \forall x\forall y\forall z(R(x, y)\wedge R(y, z)\to R(x, z))\}$;
    c) $G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$,
    $K=\{\forall x[P(x)\to\exists y(Q(y)\wedge S(x,y))],\ \exists x[R(x)\wedge\forall y(Q(y)\to\neg S(x,y))],\ \exists xP(x)\}$.
35. Застосовуючи дедуктивні правила логіки предикатів, наведіть висновки з таких засновків:
    a) Якщо хтось з тих людей – автор цих пліток, то він глупий і безпринципний. Але ніхто з тих людей не глупий і не позбавлений принципів.
    b) Якщо всі ці люди не хоробрі або на них не можна покластися, то вони не належать до нашої компанії. Але вони належать до нашої компанії.
    c) Якщо хтось з підозрілих здійснив всі ці нерозкриті крадіжки, то він був ретельно підготовлений і мав співучасника. Якщо б всі крадіжки були підготовлені ретельно, то, якщо б був співучасник, вкрадено було б набагато більше. Але останнє не має місця.
    d) Якщо один з нас піде завтра на перше заняття, то він повинен буде підвестися рано, а якщо ми підемо сьогодні ввечері у кіно, то він ляже пізно спати. Якщо будь-який з нас ляже пізно спати, а підведеться рано, то буде-задовольнятися п’ятьма годинами сну. Але ми не можемо задовольнятися п’ятьма годинами сну.
    e) В бюджеті виникне дефіцит, якщо і тільки якщо не підвищать деякі мита. Державні витрати на всі соціальні нестатки скоротяться, якщо і тільки якщо у бюджеті буде дефіцит. Деякі мита підвищать.
    f) Якщо всі ціни одночасно підвищуються, то підвищується і заробітна плата. Всі ціни високі або застосовується регулювання цін. Якщо застосовується регулювання цін, то немає інфляції. Спостерігається інфляція.

36. Доведіть нелогічність таких міркувань:

a) Всі студенти нашої групи – члени клуба «Динамо». А деякі члени клуба «Динамо» займаються спортом. Отже, деякі студенти нашої групи займаються спортом.

b) Деякі студенти нашої групи – вболівальники «Динамо». А деякі вболівальники «Динамо» займаються спортом. Отже, деякі студенти нашої групи займаються спортом.

c) Кожний першокурсник знайомий кимось з студентів другого курсу. А деякі другокурсники – спортсмени. Отже, кожний першокурсник знайомий з кимось із спортсменів.

37. Довести, що в наведених нижче прикладах висновки можна вивести з наведених засновків.

a) Засновки: «Усі леви – жорстокі істоти», «Деякі леви не п'ють кави».
Висновок: «Деякі жорстокі істоти не п'ють кави».

b) Засновки: «Усі колібрі мають яскраве пір'я», «Жодний великий птах не їсть меду та не має яскравого пір'я».
Висновок: «Колібрі – маленькі птахи».

c) Засновки: «Кожний атлет сильний», «Кожний, хто сильний і розумний, досягне успіху», «Петро – атлет», «Петро – розумний».
Висновок: «Петро досягне успіху».

38. Для кожного з логічних виведень, наведених нижче, визначити коректність висновку та зробити потрібні пояснення.

a) Усі студенти цієї групи розуміють логіку. Дмитро – студент цієї групи. Отже, Дмитро розуміє логіку.

b) Кожний студент, який вивчає комп'ютерні науки та є студентом старшого курсу, прослухав курс дискретної математики. Наталка прослухала курс дискретної математики. Отже, Наталка – студентка старшого курсу та вивчає комп'ютерні науки.

c) Кожний папуга схожий на фрукт. Моя пташка не папуга. Отже, моя пташка не схожа на фрукт.

d) Роман любить дивитися бойовики. Роман любить фільм «Третій зайвий». Отже, фільм «Третій зайвий» – бойовик.

e) Кожний студент університету має жити в гуртожитку. Михайло не живе в гуртожитку. Отже, Михайло не студент університету.

f) Якщо геометрична фігура – квадрат, то її діагоналі взаємно перпендикулярні та в точці перетину діляться навпіл. Ця фігура не квадрат. Отже, її діагоналі не перпендикулярні та не діляться навпіл.

g) Якщо число має дільник 6, то воно має дільниками числа 2 та 3. Якщо число має дільниками числа 2 та 3, то воно має дільник 6. Отже, число має дільник 6 тоді й лише тоді, коли воно має дільниками числа 2 та 3.

Завдання, що винесені на контрольну роботу

1. Спростити і вказати тип формули (загальнозначуща, суперечлива або несуперечлива).
2. Записати висловлення/предикат, використовуючи знаки кванторів.
3. Звести до ВНФ та вказати вільні змінні.
4. Перевірити кількома способами правильність міркування.

   Дано засновки:

   Якщо довго гратиму, то пізно прокинусь вранці.
   Якщо пізно прокинусь вранці, то запізнюсь на пару.
   Грав не довго.

   Зроблено висновок:

   Не запізнюсь на пару.

ТЕМА 5. Теорія графів

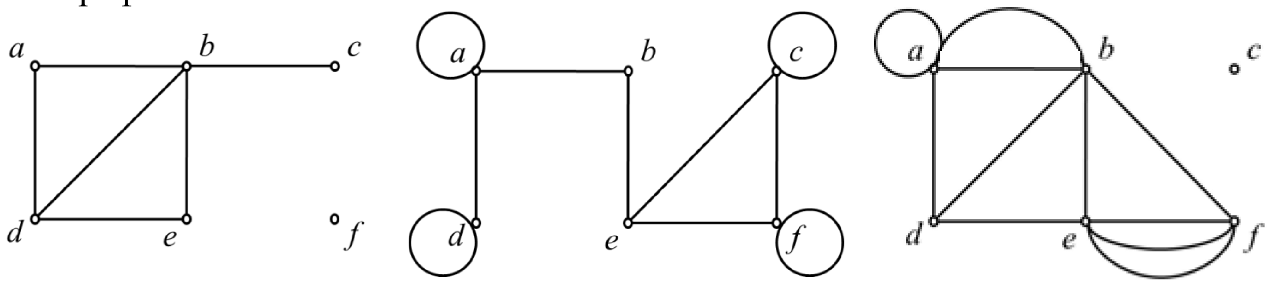
Питання для самоконтролю

1. Назвіть способи задання графів.
2. Чи можуть від'ємні числа бути елементами матриці суміжності *A* деякого графа?
3. Чому дорівнює сума елементів за стовпцем матриці інцидентності деякого графа?
4. Чи дорівнює сума за рядком сумі за стовпцем у матриці суміжності *A* неорієнтованого графа? Орієнтованого?
5. Яка кількість компонент зв'язності може бути у графа з *n* вершинами?
6. Що називають маршрутом у графі?
7. Що називають циклом у графі?
8. Який граф називають повним?
9. Який граф називають доповненням заданого?
10. Який граф називають двоїстим заданому?
11. Назвіть способи обходу графа та наведіть відповідні алгоритми.
12. Який цикл називають ейлеровим? гамільтоновим? Чи будь-який граф є ейлеровим?
13. Яка властивість є достатньою умовою того, щоб довільний граф містив гамільтонів цикл? необхідною умовою?
14. Що називають хроматичним числом графу?
15. Який граф називають деревом?
16. Чи може число ребер дерева дорівнювати числу його вершин?
17. Який граф називають бінарним впорядкованим деревом? Деревом пошуку?
18. Наведіть алгоритми побудови та пошуку для бінарного впорядкованого дерева.
19. Наведіть алгоритми додавання та видалення вузла для бінарного впорядкованого дерева. Який вузол називається термінальним?
20. Що таке бектрекінг і для чого він використовується?
21. Який алгоритм допоможе побудувати дерево прийняття рішень на базі заданого переліку прикладів?
22. Які алгоритми використовуються при побудові остову графа? Чим вони відрізняються?
23. Наведіть алгоритм пошуку мінімального остову графа.
24. Дайте порівняльну характеристику алгоритмів пошуку мінімальних шляхів у графі.
25. Що називають перерізом графу? Сформулюйте теорему про максимальну течію в графі.
26. Дайте порівняльну характеристику алгоритмів пошуку максимальної течії у графі.

Завдання для роботи в аудиторії

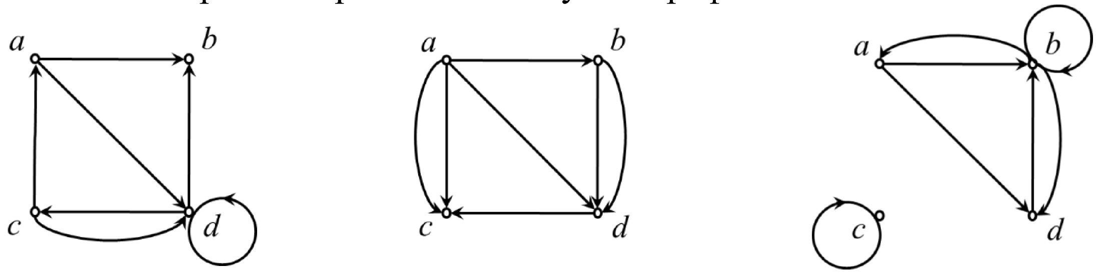
Основні поняття

1. Знайти кількість вершин, ребер і степені кожної вершини неорієнтованих графів:



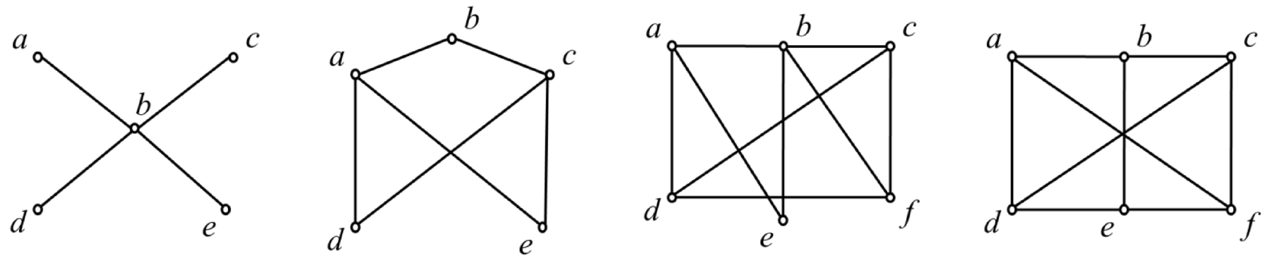
a) b) c)

2. Знайти суму степенів вершин кожного з графів попередньої задачі та переконатись, що вона вдвічі більша за кількість ребер графа.
3. Визначити кількість вершин та дуг і знайти напівстепені входу й виходу для кожної вершини орієнтованих мультиграфів:



a) b) c)

4. Для кожного з графів попередньої задачі знайти суму напівстепенів входу та суму напівстепенів виходу вершин. Переконатись, що кожна з них дорівнює кількості дуг графа.
5. Побудувати графи:
   a)K_6; b)$K_{1,4}$; c) C_7; d) W_7.
6. Які з наведених нижче графів дводольні?



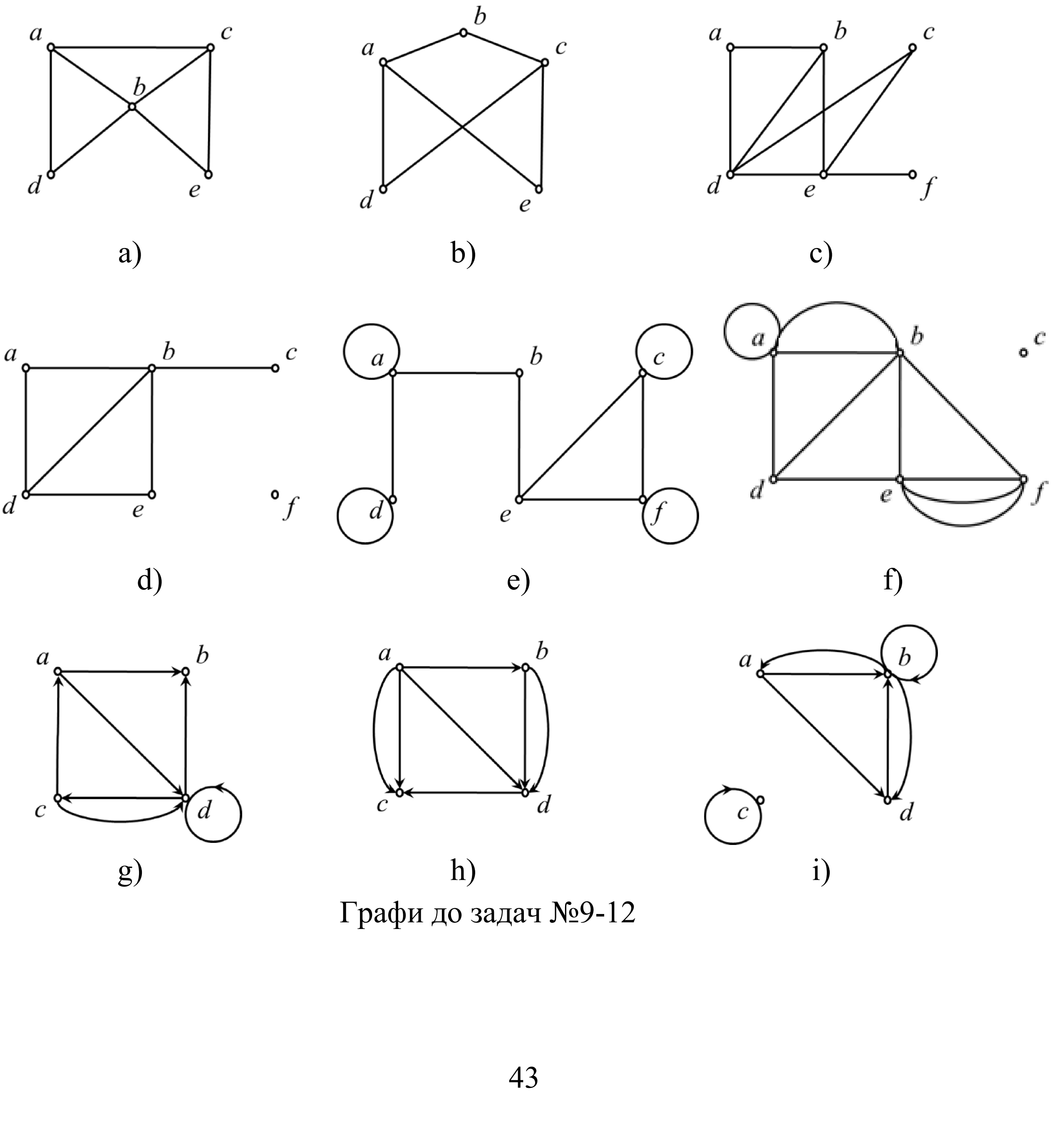
a) b) c) d)

7. Скільки ребер має граф, у якого вершини мають такі степені? Зобразити його.
   a) 4, 3, 3, 2, 2;
   b) 1, 1, 1, 1, 4.

8. Чи існує простий граф із вершинами таких степенів? Якщо так, то зобразити його:
   a) 3, 3, 3, 3, 2;
   b) 3, 4, 3, 4, 3;
   c) 1, 2, 3, 4, 5;
   d) 0, 1, 2, 2, 3;
   e) 0, 1, 0, 0, 3;
   f) 2, 1, 2, 4, 3;
   g) 1, 1, 1, 1, 1.

Способи задання графа

9. Задати графи списками ребер, записаних у лексикографічному порядку.
10. Задати графи за допомогою матриць інцидентності.
11. Задати графи за допомогою матриць суміжності.
12. Задати графи за допомогою списків суміжності.



Графи до задач №9-12

13. Зобразити неорієнтовані графи за матрицями суміжності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) b) c)

14. Зобразити орієнтовані графи за матрицями суміжності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

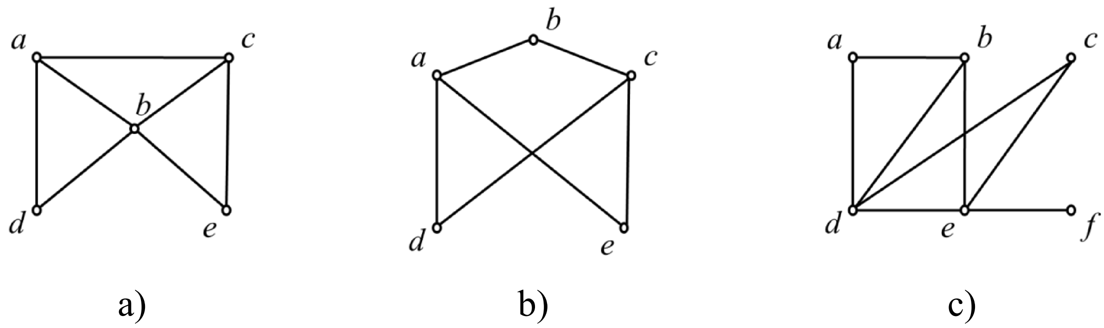
a) b)

15. Знайти матриці суміжності для графів:
a) K_n; b) C_n; c) W_n; d) $K_{m,n}$.

16. Чи є будь-яка квадратна симетрична (0,1)-матриця, що містить 0 на головній діагоналі, матрицею суміжності якогось простого графа?

Операції з графами

17. Простий граф G має n вершин і m ребер. Знайти кількість ребер графа $\overline{G}$.
18. Побудувати $\overline{G}$ для графів (неорієнтованого та орієнтованого).
19. Додати ребро (d,e) в граф.
20. Додати ізольовану вершину h в граф.
21. Додати вершину h в ребро (a,b) графу.
22. Видалити вершину d.
23. Видалити ребро (a,b).
24. Стягнути ребро (a,b).
25. Стягнути вершини d,e.

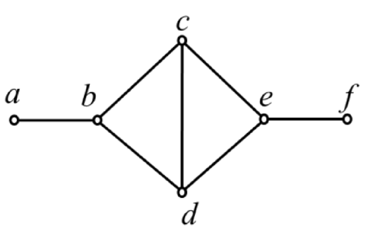


a) b) c)

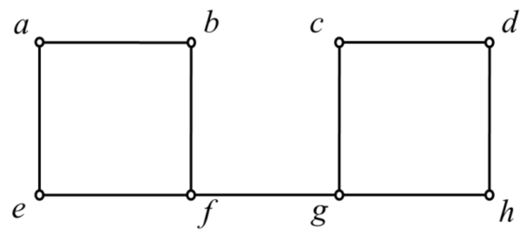
Графи до задач № 18-25

Обхід графа

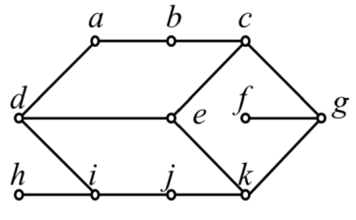
26. Обійти наведені нижче графи пошуком вглиб та вшир. Вважати, що вершини впорядковано за алфавітом, а початкова – вершина a. Розв'язати задачу з фарбуванням ребер при наданні вершині номеру для фіксації маршруту.



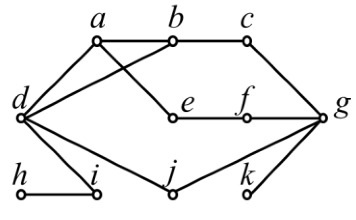
a)



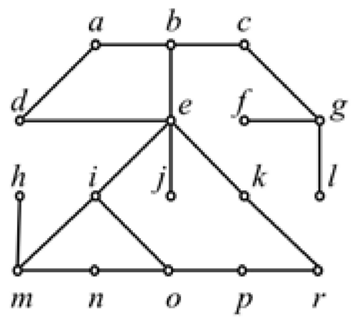
b)



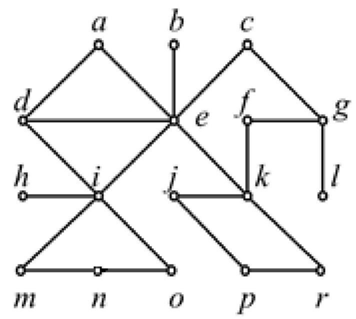
c)



d)



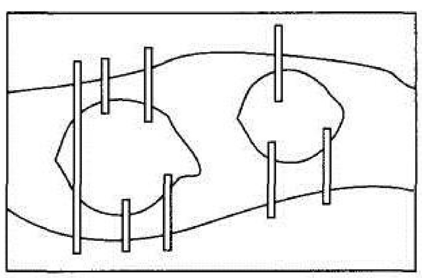
e)



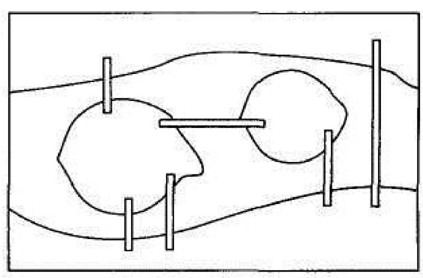
f)

Маршрути в графі

27. Чи можна утворити ейлерів цикл при такому розміщенні мостів через річку?

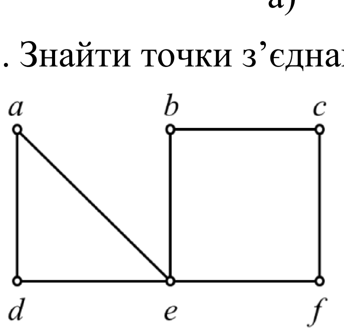


a)

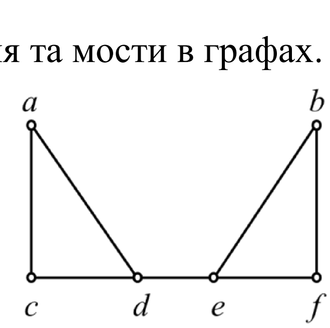


b)

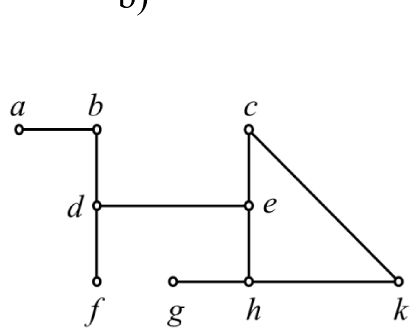
28. Знайти точки з’єднання та мости в графах.



a)

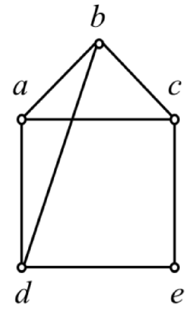


b)

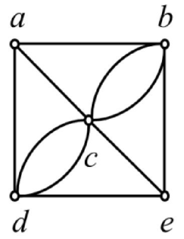


c)

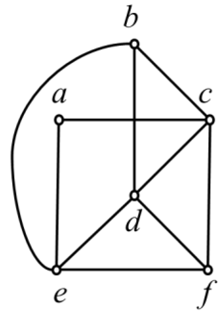
29. Визначити, які з наведених нижче графів мають ейлерів цикл. Зобразити його. Які з графів мають ейлерів шлях, але не мають ейлеревого циклу?



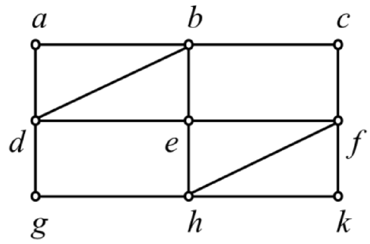
a)



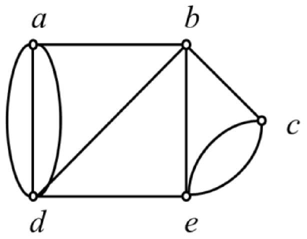
b)



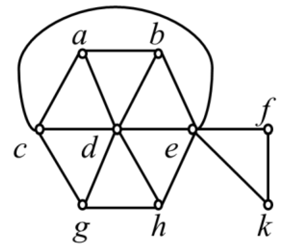
c)



d)

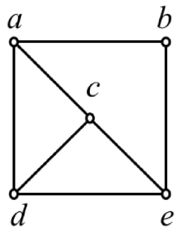


e)

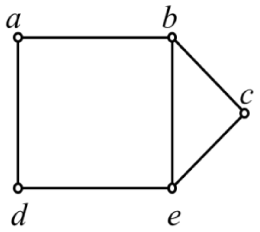


f)

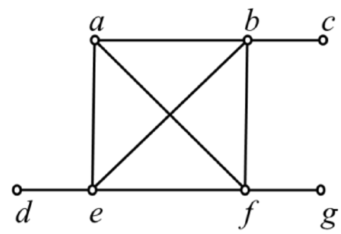
30. Які з наведених нижче графів мають гамільтонів цикл? Які з графів, що не мають гамільтонового циклу, мають гамільтонів шлях?



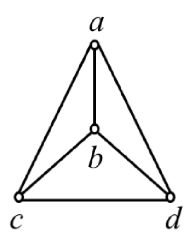
a)



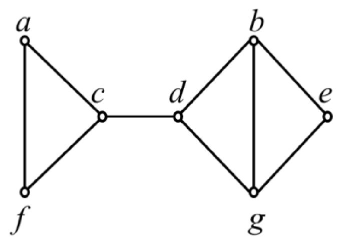
b)



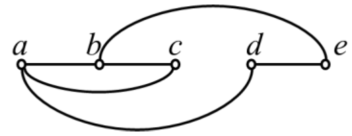
c)



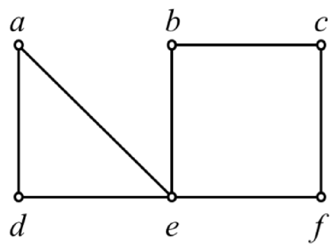
d)



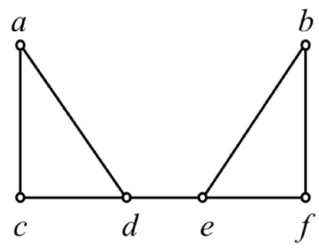
e)



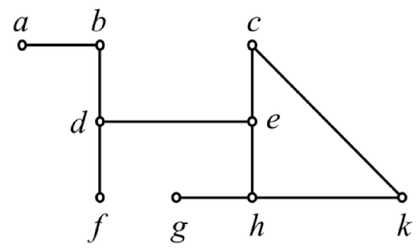
f)



g)



h)

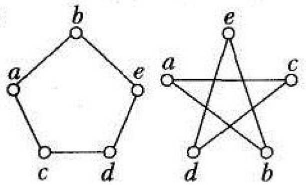


i)

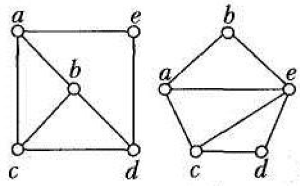
31. Навести приклад графа, який має ейлерів цикл, але не має гамільтонового циклу, а також графа, який має гамільтонів цикл, але не має ейлерового циклу. Як можна охарактеризувати графи, які мають водночас і ейлерів, і гамільтонів цикли?

Ізоморфні графи

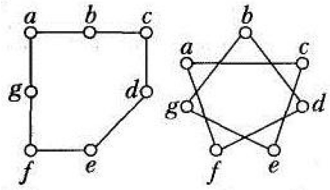
32. Визначити, які пари графів, наведених нижче, ізоморфні.



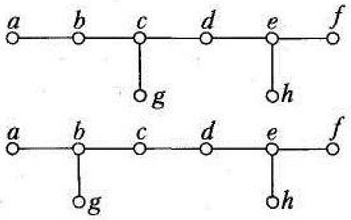
a)



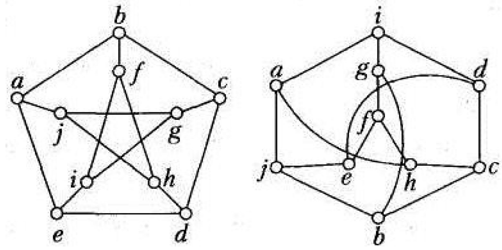
b)



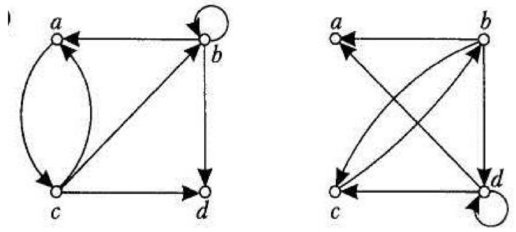
c)



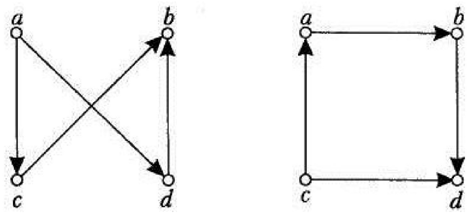
d)



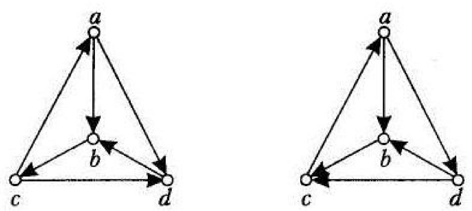
e)



f)



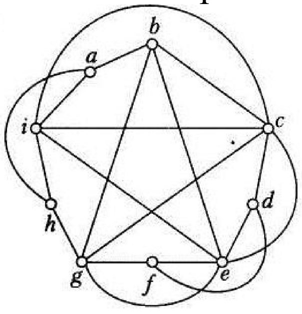
g)



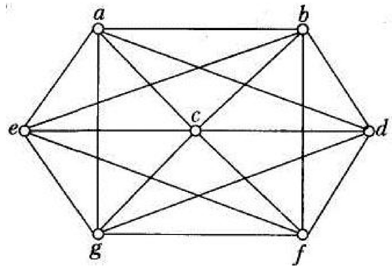
h)

Планарні графи

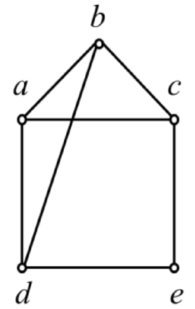
33. За допомогою теореми Куратовського довести, що графи не планарні.

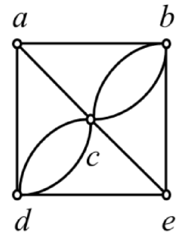


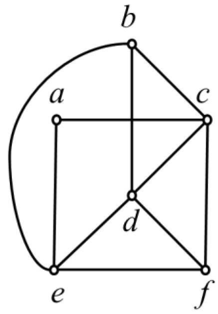
a)



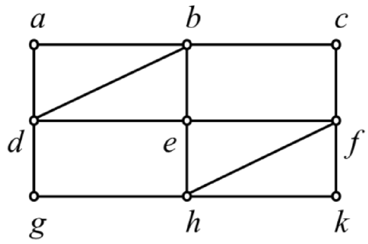
b)

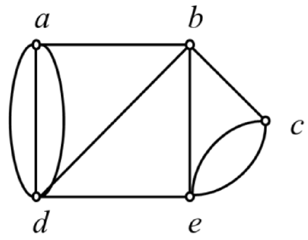


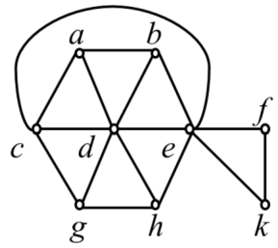




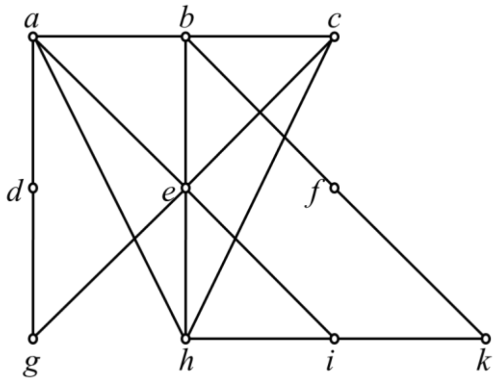
a) b) c)

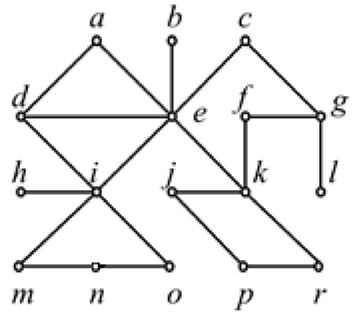






d) e) f)





g) h)

Графи до задач №34-37

34. Визначити, які з графів планарні.
35. Для планарних графів попередньої задачі побудувати двоїсті.
36. Зв’язний планарний граф має шість вершин степеня 4. Скільки граней має цей граф?

Розфарбування графів

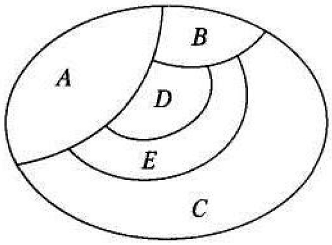
37. Оцінити хроматичне число $\chi(G)$ графів та розфарбувати їх.
38. Довести, що простий граф, який містить цикл із непарною кількістю вершин, не можна розфарбувати у два кольори.
39. На кафедрі працюють шість студентських наукових семінарів один раз на місяць в один і той самий час. Скільки різних днів щонайменше потрібно для проведення цих семінарів, якщо склад їх керівників такий:
    1) С1 = {Пасічник, Щербина, Чумаков};
    2) С2 = {Щербина, Ткач, Катренко};
    3) С3 = {Пасічник, Катренко, Чумаков};

4) C4 = {Ткач, Чумаков, Катренко};
5) C5 = {Пасічник, Щербина};
6) C6 = {Щербина, Катренко, Чумаков}.
Умову задачі зобразити у вигляді графа.

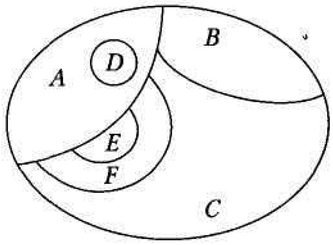
40. Скільки каналів щонайменше потрібно для шести телевізійних станцій, відстані між якими задано таблицею, якщо дві станції не можуть працювати на одному каналі, коли відстані між ними менша ніж 250 км?

Телевізійна станція	1	2	3	4	5	6
1	-	145	280	300	90	160
2	145	-	200	280	150	270
3	280	200	-	220	350	400
4	300	280	220	-	310	360
5	90	150	350	310	-	120
6	160	270	400	360	120	-

41. Побудувати графи, які відповідають наведеним нижче картам, і визначити найменшу кількість кольорів для їх розфарбовування.



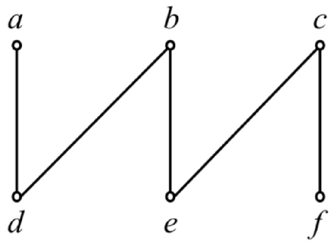
a)



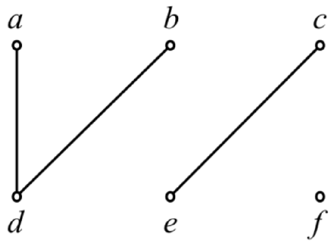
b)

Дерева

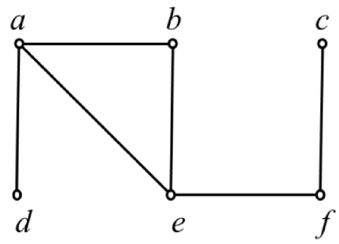
42. Які з наведених нижче графів являють собою дерева?



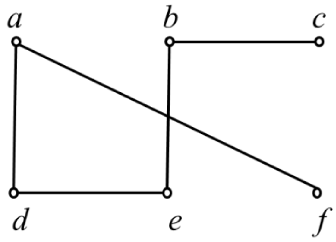
a)



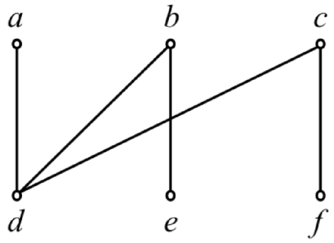
b)



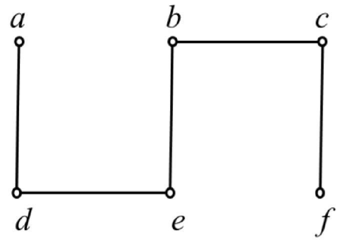
c)



d)



e)



f)

43. Дати відповіді на запитання щодо дерева, зображеного на рисунку.

a) Яка вершина являє собою корінь?

b) Які вершини внутрішні?

c) Які вершини являють собою листки?

d) Які вершини – сини вершини *j*?

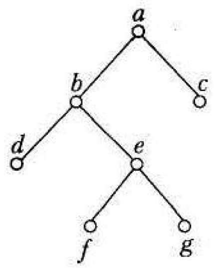
e) Яка вершина – батько вершини *n*?

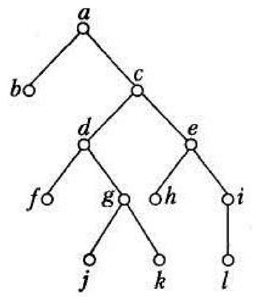
f) Які вершини – предки вершини *n*?

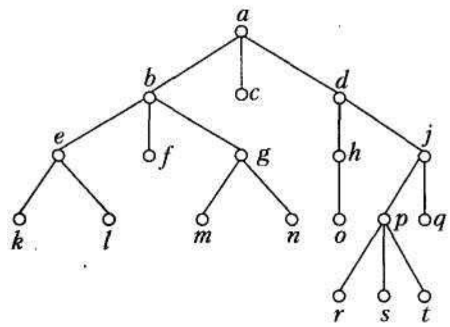
g) Які вершини – нащадки вершини *b*?

h) Визначити рівень кожної вершини та висоту дерева.

i) Записати послідовності вершин упорядкованих кореневих дерев в разі їх обходу вшир та вглиб.







a) b) c)

44. Побудувати завершене бінарне дерево висотою 4 та завершене 3-арне дерево висотою 3.

45. У шаховому турнірі беруть участь 1000 гравців. Скільки ігор потрібно зіграти для визначення переможця, якщо турнір проводять за олімпійською системою (той, хто програв, вибуває)?

46. Довести, що центр у некореневому дереві можна знайти як корінь кореневого дерева з мінімальною висотою.

47. Побудувати бінарне дерево пошуку для чисел {50, 30, 20, 25, 37, 10, 8, 7, 9, 15, 60, 70, 90, 80, 65, 75, 85}.

48. У бінарному дереві попередньої задачі видалити вершини {85, 8, 20}.

49. Побудувати бінарне дерево пошуку для слів {banana, peach, pear, apple, coconut, mango, papaya}.

50. Скільки потрібно порівнянь, щоб знайти чи додати кожне зі слів до дерева пошуку із попередньої задачі:

a) pear, b) banana; c) plum; d) orange.

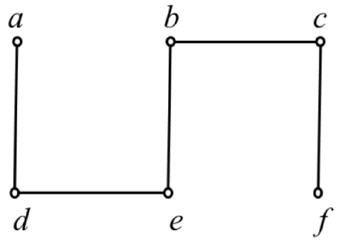
51. Використовуючи бектрекінг, знайти підмножину (якщо вона існує) множини {27, 24, 19, 14, 11, 8} із зазначеною сумою:

a) 20; b)41; c) 60.

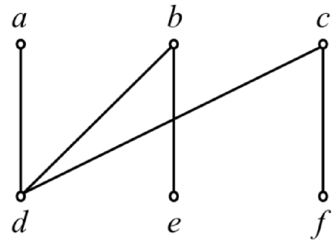
Дводольні графи

52. Побудувати довільне та максимальне паросполучення.

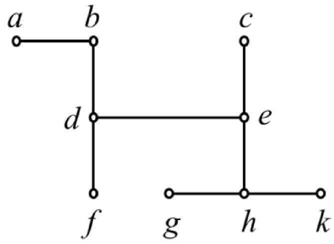
53. Побудувати найбільше паросполучення. Визначити, чи є воно досконалим.



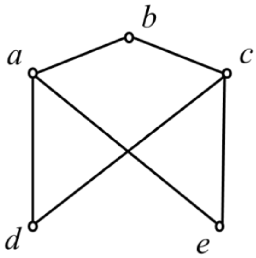
a)



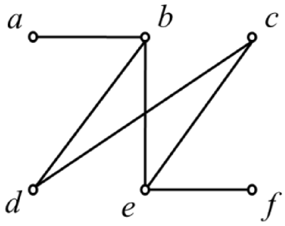
b)



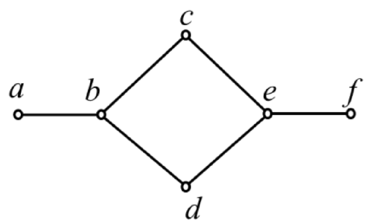
c)



c)



d)

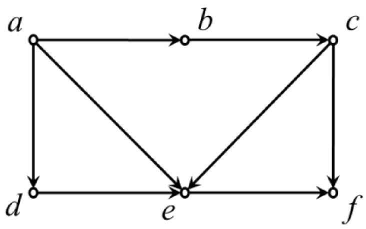


e)

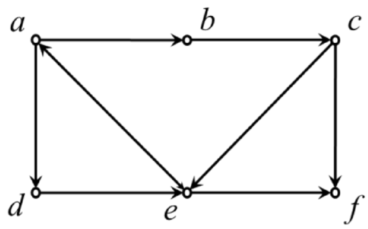
Графи до задач № 52-53

Топологічне сортування

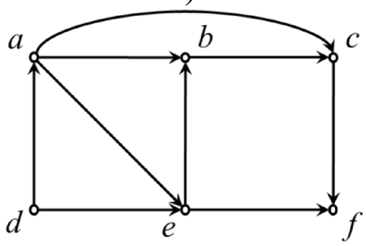
54. Для заданих графів виконати топологічне сортування вершин, використовуючи пошук вглиб (алгоритм Тар'яна).
55. Для заданих графів виконати топологічне сортування вершин, використовуючи алгоритм Демукрона.



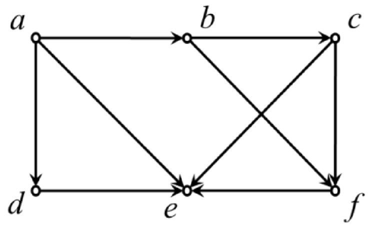
a)



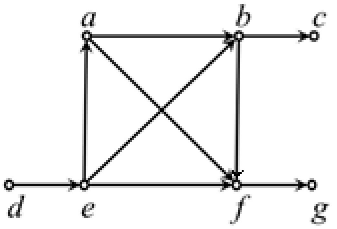
b)



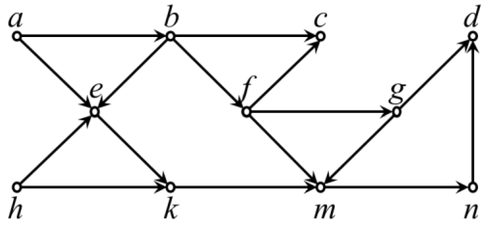
c)



d)



e)



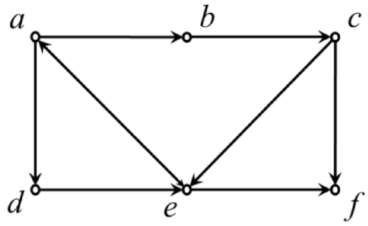
f)

Графи до задач № 54-55

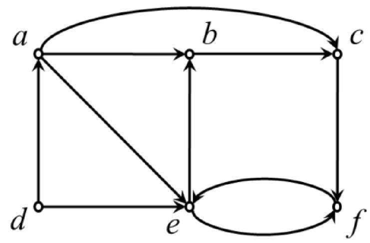
Компоненти зв'язності

56. Оцінити кількість ребер неорієнтованого графа, якщо відомо число компонент зв’язності та кількість вершин.
   a) $k = 1$, $n = 5$;
   b) $k = 2$, $n = 5$;
   c) $k = 3$, $n = 5$.

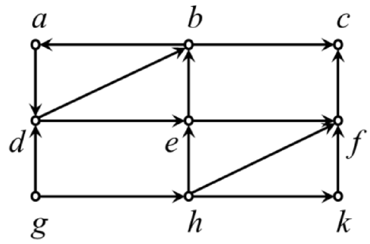
57. Для заданих орієнтованих графів знайти компоненти сильної зв’язності, використовуючи подвійний пошук вглиб (алгоритм Косарайю).
58. Побудувати фактор-граф.



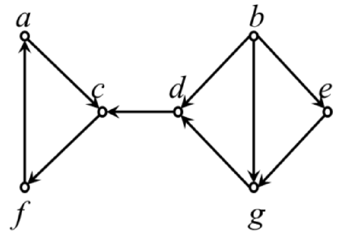
a)



b)



c)

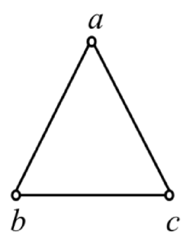


d)

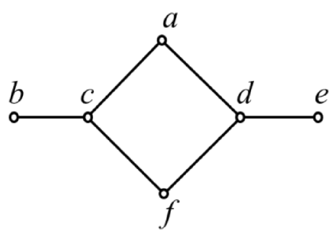
Графи до задач № 57-58

Каркас графа

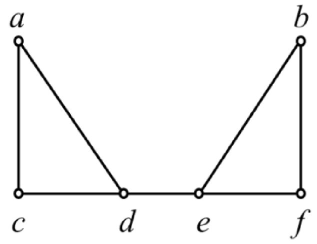
59. Для простих графів побудувати всі можливі каркаси.



a)

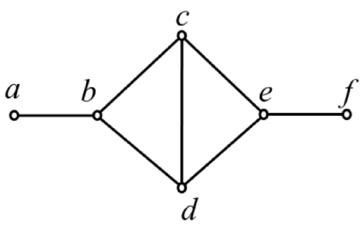


b)

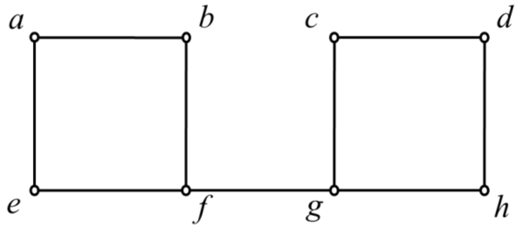


c)

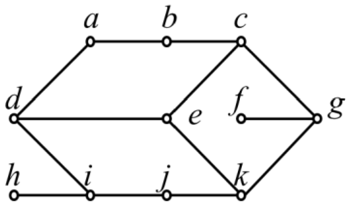
60. Використовуючи обхід графа пошуком вглиб та вшир, побудувати каркаси для графів, наведених нижче. Як початкову вибрати вершину *a*.



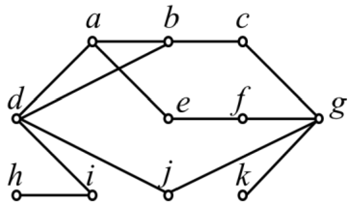
a)



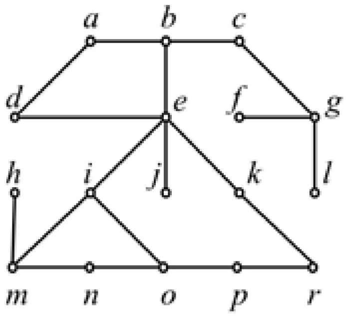
b)



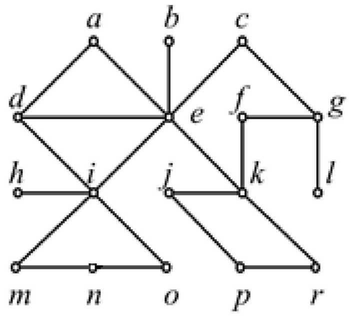
c)



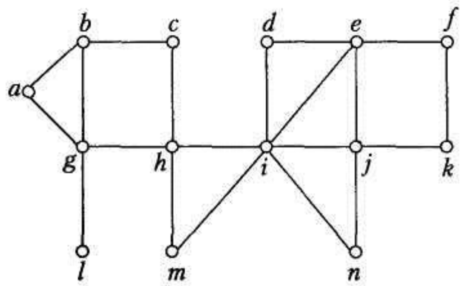
d)



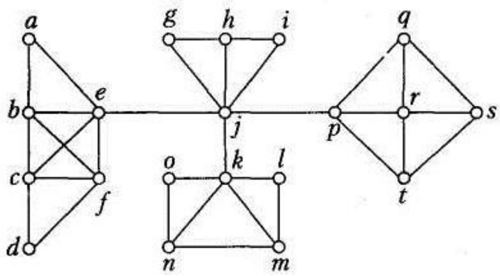
e)



f)

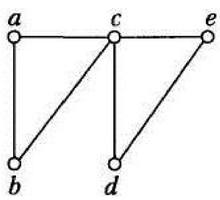


g)

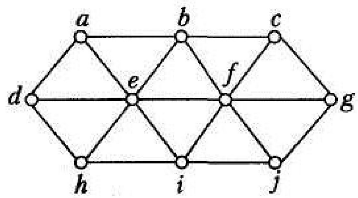


h)

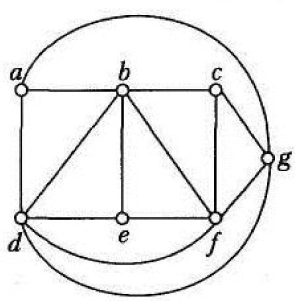
61. Зв’язний граф *G* має *n* вершин і *m* ребер. Скільки ребер потрібно вилучити з графа *G*, щоб одержати каркас?
62. Знайти каркас для кожного з наведених нижче графів способом вилучення ребер із простих циклів. Знайти цикломатичне число кожного графа.



a)



b)



c)

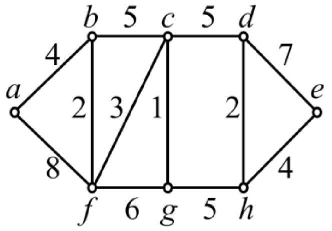
63. За алгоритмом Краскала для наведених нижче графів побудувати мінімальний та максимальний каркаси. Зробити теж саме, використовуючи алгоритм Прима.

Найкоротші шляхи у графі

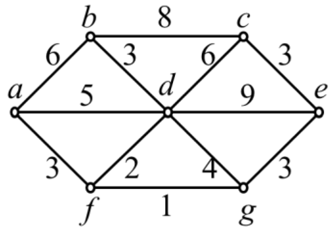
64. За допомогою алгоритму Дейкстри знайти найкоротший шлях від вершини *a* до решти вершин. Для графів з від'ємними вагами перевірити результат за алгоритмом Форда-Беллмана.
65. За допомогою алгоритму Флойда визначити довжини найкоротших шляхів між усіма парами вершин. У процесі розв'язування будувати матриці *W* та Θ. За матрицею Θ визначити найкоротші шляхи від вершини *a* до вершини *d* та від вершини *b* до вершини *d*.

Потоки в мережах

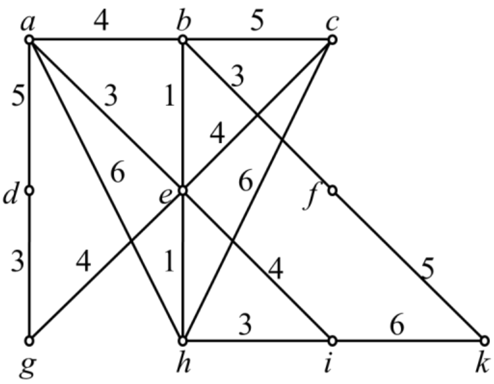
66. За допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона знайти максимальну течію між обраними парами вершин.



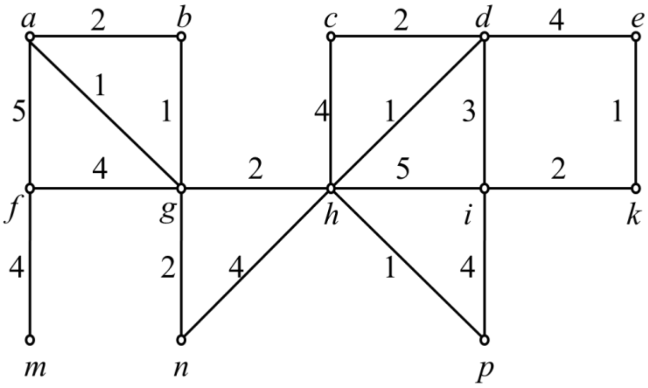
a)



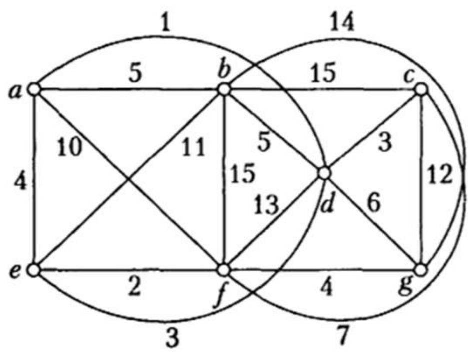
b)



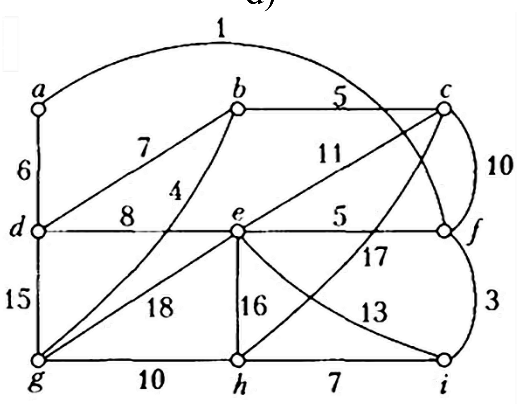
c)



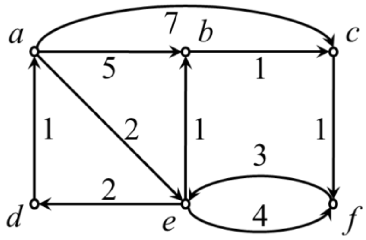
d)



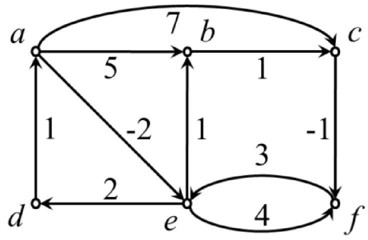
e)



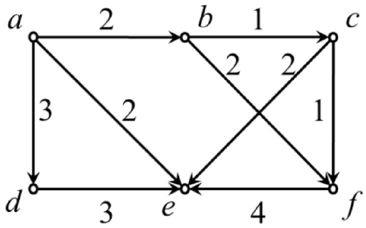
f)



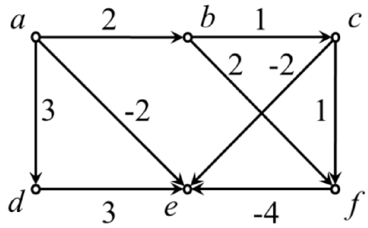
g)



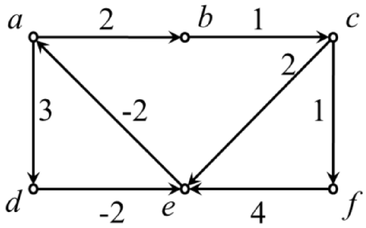
h)



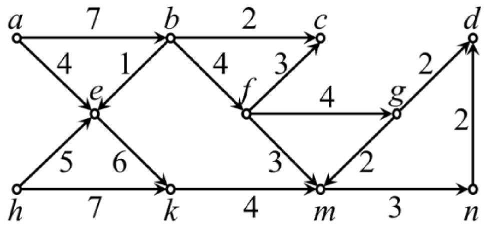
i)



j)



k)



m)

Графи до задач № 63-66

Методи мережевого планування

67. Студент має виконати курсову роботу. Необхідно побудувати мережу та розрахувати оптимальний графік виконання процесів.

	Процес	**Попередній процес**	**Тривалість процесу**
A	Перегляд тем курсових робіт	-	1
B	Перегляд доступних інформаційних матеріалів	-	1
C	Вибір теми	A	1
D	Збір інформації по темі роботи	B,C	6
E	Вибір мат. моделі, методів, алгоритмів	D	2
F	Написання першого розділу ПЗ	E	4
G	Розробка методів, алгоритмів	E	6

H	Написання другого розділу ПЗ	F,G	4
I	Розробка програми	G	10
J	Тестування та наладка програми	I	10
K	Написання третього розділу ПЗ	H,J	2
L	Виконання експериментів	J	4
M	Написання четвертого розділу та додатків ПЗ	K,L	2
N	Оформлення графічних матеріалів та ПЗ	K,L	6
O	Підготовка доповіді, рецензії та ін.	M,N	4

68. Практичне завдання з програмування виконується бригадою з трьох студентів. Необхідно побудувати мережу та розрахувати оптимальний графік виконання процесів. Тривалість процесів задайте на власний розсуд.

	Процес	**Попередній процес**	**Тривалість процесу**	**Виконує**
A	Специфікація інтерфейсів	-		c
B	Розробка інтерфейсного модуля M0	A		c
C	Тестування на правильність M0	B		c
D	Розробка модуля M1	A		a
E	Тестування на правильність M1	D		a
F	Розробка модуля M2	A		b
G	Тестування на правильність M2	F		b
H	Тестування на правильність проекта вцілому	C,E,G		c
I	Розробка тестів на ефективність	D,F		a,b
J	Тестування на ефективність M1	I,H		a
K	Тестування на ефективність M2	G,H		b
M	Оформлення звіту	H,J,K		c

Завдання, що винесені на контрольну роботу

1. Граф задано графічно. Задати його:
   1.1. списком ребер;
   1.2. матрицею інциденцій;
   1.3. матрицею суміжності;
   1.4. списком суміжності.
2. Визначити степені вершин графа, кількість компонент зв'язності.
3. Чи є заданий граф повним? планарним?
4. Знайти $\bar{G}$.
5. Побудувати двоїстий граф.
6. Оцінити хроматичне число графа. Розфарбувати вершини графа.
7. Проаналізувати, чи містить граф
   7.1. ейлерів цикл або шлях;
   7.2. гамільтонів цикл або шлях.
8. Знайти досконале паросполучення в дводольному графі.
9. Виконати топологічне сортування вершин графа.
10. Знайти компоненти сильної зв'язності графа.
11. Знайти мінімальний/максимальний каркас графа.
12. Знайти мінімальний шлях між заданими вершинами.
13. Знайти максимальну течію між заданими вершинами.

ТЕМА 6. Автомати, мови та граматики

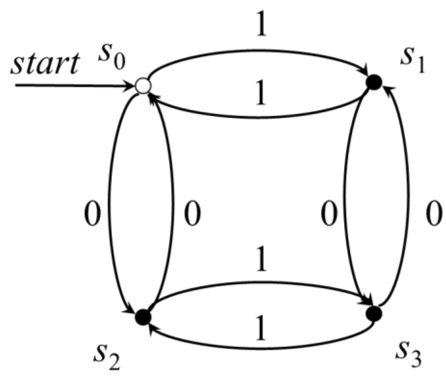
Питання для самоконтролю

1. Що таке абстрактний автомат?
2. В чому різниця між скінченним та нескінченним автоматом?
3. В чому різниця між детермінованим та недетермінованим автоматом?
4. В чому різниця між повністю визначеним та частковим автоматом?
5. В чому різниця між ініціальним та не ініціальним автоматом?
6. Яке призначення автономних генераторів? Їх головна особливість?
7. Яке призначення розпізнавачів? Їх головна особливість?
8. Яке призначення перетворювачів? Їх головна особливість?
9. Навіщо виконувати мінімізацію автоматів?
10. В яких випадках зручніше використовувати недетерміновані автомати?
11. В яких випадках зручніше використовувати часткові автомати?
12. Для чого використовують пошукові автомати?
13. Які мови називають регулярними? Критерій регулярності?
14. Ієрархія формальних граматик. Нормальна форма Хомського. Нормальна форма Грейбах.
15. Що використовується для розпізнавання контекстно вільних мов?

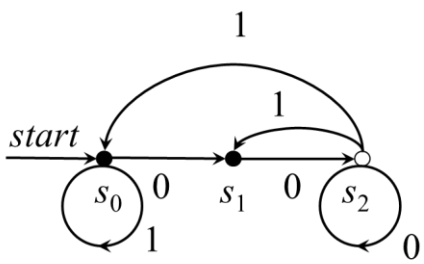
Завдання для роботи в аудиторії

Класифікація автоматів

1. У вигляді діаграми станів задано автомат, призначенням якого є розпізнавання слів з парною кількістю нулів та одиниць. Опишіть автомат формально (для функції переходів побудуйте таблиці) та класифікуйте його.



2. Автомат задано у вигляді діаграми станів. Визначте його призначення. Опишіть автомат формально та класифікуйте його.



3. Побудуйте діаграму станів детермінованого скінченного автомата, який розпізнає слова:
   a) що закінчуються на «00»;
   b) що містять «000»;
   c) що містять «0» і «11»;
   d) що містять «0» і «11» в довільному порядку.
4. Для ДСА з попереднього завдання запишіть функцію переходів.
5. Запишіть реакцію автомата з попереднього завдання на такі вхідні послідовності:
   a) 11010
   b) 10100
   c) 10011
   d) 00010
   e) 01100
6. Побудуйте діаграму станів ДСА, що реалізує диз'юнкцію в двійковій системі числення. Запишіть функції переходів та виходів.
7. Запишіть реакцію автомата з попереднього завдання на такі вхідні послідовності:
   a) $010 \vee 011$;
   b) $11010 \vee 10100$;
   c) $01110 \vee 10100$.
8. Спроектуйте автомат Мура, що буде керувати переходами в меню користувача. Перелік пунктів меню:
   1 – згенерувати відношення;
   2 – записати відношення у файл;
   3 – прочитати відношення з файлу;
   4 – визначити тип відношення і записати результат;
   5 – прочитати результат з файлу;
   6 – вихід.
9. Спроектуйте автомат Мілі для роботи з динамічною пам'яттю. Перелік пунктів меню взяти з попередньої задачі. Відношення зберігається в динамічній пам'яті.

Недетерміновані автомати

10. Побудуйте діаграму станів недетермінованого скінченного автомата, що розпізнає слова:
    a) «..1..00..»;
    b) «..00..1..»;
    c) «..1..00..» та «..00..1..».

11. Запишіть реакцію автомата з попереднього завдання на такі вхідні послідовності:
    a) 11010
    b) 10100
    c) 10011

12. Перетворіть НСА з попередньої задачі в ДСА.

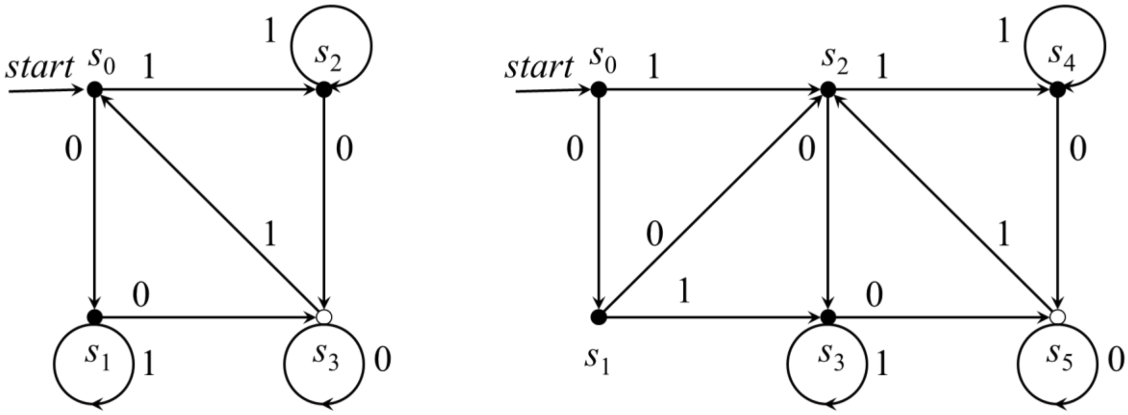
Часткові автомати

13. Побудуйте діаграму станів часткового скінченного автомата, що розпізнає слова «..100..» та «..001..».

14. Побудуйте діаграму станів ε-розпізнавача двійкових чисел.

Мінімізація автоматів

15. Мінімізуйте ДСА.



a) b)

Регулярні та нерегулярні граматики

16. Перевірити, чи є мова нерегулярною. Для регулярної мови побудувати розпізнавач.
    a) $\{0^n1^n\}$
    b) $\{0^n1^n00\}$
    c) $\{1^n00\}$
    d) $\{01^n\}$
    e) $\{01^n00\}$

Пошукові автомати

17. Побудувати пошуковий автомат для слова *p*. Записати послідовність його роботи при пошуку слова в тексті ω = «*baabbabab*».
    a) *p* = «*bb*»
    b) *p* = «*ab*»
    c) *p* = «*abba*»

Завдання, що винесені на контрольну роботу

1. Опишіть автомат формально (для функцій переходів та виходів побудуйте відповідні таблиці).
2. Що буде результатом роботи автомату, якщо на вхід подано вказану послідовність сигналів?
3. Класифікуйте автомат (скінченний/нескінченний, детермінований/не детермінований, повністю визначений/частковий, ініціальний/не ініціальний).
   Вкажіть тип автомату (автономний генератор, розпізнавач, перетворювач).
4. Перевірити, чи є мова нерегулярною.
5. Побудувати пошуковий автомат для слова *p*. Записати послідовність його роботи при пошуку слова в тексті ω.

Список використаних джерел

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. -744 с.
2. Биков М.М. Дискретний аналіз і теорія автоматів: навчальний посібник / М.М.Биков, В.Д.Черв'яков – Суми: Сумський державний університет, 2016. – 354с.
3. Бондаренко М.Ф. Комп'ютерна дискретна математика / М.Ф.Бондаренко, Н.В.Білоус, А.Т.Руткас – Х.: Компанія СМІТ, 2004 – 480 с.
4. Гавриленко С.Ю. Логіка дискретних автоматів: навч.-метод.посіб./ Гавриленко С.Ю., Клименко А.М., Носков В.І. – Харків: НТУ "ХПІ", 2014. – 129 с.
5. Гавриленко С.Ю. Теорія цифрових автоматів та формальних мов. Вступний курс: навч. посібник / Гавриленко С.Ю., Клименко А.М., Любченко Н.Ю. та ін. – Харків: НТУ "ХПІ", 2011. – 176 с.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс – М.: Известия, 2011. -512 с.
7. Кириллов В.И., Старченко А.А. Логика: учебник для юридических вузов / под ред. проф. В.И.Кириллова. – Изд. 6-е, перераб. и доп. - М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2008. – 240 с.
8. Нікольський Ю.В. Дискретна математика / Ю.В.Нікольський, В.В.Пасічник, Ю.М.Щербина – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
9. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009 – 384 с.
10. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С++. Алгоритмы на графах: пер. с англ. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2002 – 496 с.
11. Хопкрофт Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений: пер. с англ. / Дж.Хопкрофт, Р.Мотвани, Дж.Ульман – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002 – 528 с.
12. Шапорев С.Д. Дискретная математика: учебное пособие / Балт. гос. техн. ун-т «Военмех». СПб., 2004. – 131 с.
13. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра: Учебное пособие. – Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 118 с.
14. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. Ч.2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов: Учебное пособие. – Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 118 с.
15. Трохимчук Р.М. Теорія графів: навчальний посібник для студентів факультету кібернетики – К.: РВЦ "Київський університет", 1998. – 43 с.
16. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.