Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Є.В.Стєганцев, П.Г. Стєганцева

ІНВАРІАНТИ ПРОЕКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Навчальний посібник до індивідуальної та самостійної робіт для студентів ІІІ курсу математичного факультету

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2011

УДК 514.7
ББК 22.151

Стєганцев Є.В., Стєганцева П.Г. Інваріанти проективних перетворень: Навчальний посібник до індивідуальної та самостійної робіт для студентів III курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2011. – 85с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, тести, завдання до самостійної та індивідуальної робіт з курсу за вибором «Інваріанти проективних перетворень».

Призначений для студентів III курсу математичного факультету денного та заочного відділень (напрям підготовки «Математика»).

Рецензент *А.К. Приварников*
Відповідальний за випуск *Є.В.Стєганцев*

ЗМІСТ

ВСТУП

Проективна геометрія є базовою структурою, на якій можна побудувати такі важливі геометричні структури, як афінна та евклідова геометрії. Традиційно розділ «Проективна геометрія» був складовою частиною курсу «Аналітична геометрія». У зв'язку із загальним скороченням часу на вивчення дисциплін розділ «Проективна геометрія» на теперішній час викладається як окрема дисципліна за вибором студентів.

Від студентів, які вивчають проективну геометрію, вимагаються знання понять і методів аналітичної геометрії, лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел. Знання і навички, отримані при вивченні проективної геометрії, будуть в подальшому використані при вивченні інших фундаментальних і спеціальних курсів, серед яких «Основи математики», «Диференціальна геометрія та топологія», «Методи розв'язування задач на побудову».

Даний посібник допоможе студентам денного відділення в підготовці до практичних занять, до модульних контрольних робіт, при виконанні завдань для самостійної роботи. Він побудований так, що студенти заочного відділення зможуть самостійно працювати над матеріалом в міжсесійний період.

В даному посібнику використовується, в основному, аналітичний підхід, але звертається увага і на синтетичні методи. Детально вивчаються ті властивості фігур, які не змінюються при проективних перетвореннях. Це дозволяє включити цей окремий розділ геометрії в загальну класифікацію геометричних дисциплін.

Весь матеріал розбито на чотири розділи. По кожному з них наведені основні означення, теореми та формули. Обсяг теоретичного матеріалу посібника та приклади задач, розв'язання яких наведено з детальними поясненнями та необхідними посиланнями, дозволяє самостійно розв'язувати запропоновані задачі**.** До кожного з розглянутих розділів наведено тестові питання. В кінці посібника розміщено зразки індивідуального та типового завдань.

За результатами вивчення матеріалу даного курсу студенти повинні

ЗНАТИ: Означення проективних перетворень.
Теореми про завдання проективних перетворень.
Основні інваріанти проективних перетворень.
Поняття полюса та поляри.
Проективну класифікацію кривих другого порядку.

ВМІТИ: Обчислювати подвійне відношення чотирьох точок прямої та чотирьох прямих пучка.
Доводити, що задана властивість є інваріантною відносно заданого проективного перетворення.
Будувати образи та прообрази геометричних фігур при проективних перетвореннях.
Розв'язувати конструктивні задачі за допомогою класичних теорем проективної геометрії.

1. Проективна геометрія образів першого і другого порядків

1.1 Означення проективного простору. Проективні пряма і площина. Проективна система координат

Означення. Нехай V_{n+1} – $(n+1)$ – вимірний векторний простір над полем R дійсних чисел, V' – множина всіх ненульових векторів простору V_{n+1}. Непусту множину P називають n – *вимірним проективним простором,* якщо задано відображення $f : V' \to P$, яке задовольняє наступним умовам :

1. Відображення f сюр'єктивне;
2. Рівність $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ виконується тоді і лише тоді, коли вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ колінеарні.

Елементи множини P називаються точками проективного простору і позначаються $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$. Якщо $f(\bar{x}) = X$, то говорять, що вектор $\bar{x}$ породжує точку X. Про весь проективний простір говорять, що він породжується векторним простором V_{n+1} і позначають $P(V_{n+1})$.

З означення випливає, що проективний простір, породжений векторним простором над полем дійсних чисел, містить нескінчену множину точок.

Зауваження. Замість поля R можна розглядати довільне поле K, зокрема, і скінчене. Якщо ж розглядати поле R, то проективний простір називається *дійсним проективним простором* і позначається RP_n. Надалі, якщо про це окремо не буде сказано, будемо розглядати дійсні проективні простори.

Множину точок із RP_n, які породжуються підпросторами V_2 і V_3 простору V_{n+1}, називають відповідно *проективною прямою* і *проективною площиною*.

Прикладом проективної прямої є так звана *розширена пряма*. Так називають звичайну пряму афінної (евклідової) площини, доповнену *невласною (нескінченно віддаленою) точкою*.

Дійсно, розглянемо векторний простір V_2 всіх напрямлених відрізків з початком у точці O на афінній (евклідовій) площині та пряму d, $O \notin d$ цієї площини, доповнену невласною точкою M_∞, позначимо $d \cup M_\infty$ символом $\overline{d}$. Це об’єднання і є розширеною прямою. Розглянемо відображення $f : \left(V_2 \setminus \{\overline{0}\}\right) \to \overline{d}$ за таким правилом: прямій, яка проходить через точку O і має напрямні вектори $l\overline{x}$, поставимо у відповідність точку X її перетину з прямою $\overline{d}$. Очевидно, всі вимоги означення проективного простору для f виконуються. Отже, розширена пряма є одновимірним проективним простором (проективною прямою).

Аналогічно, можна побудувати приклад проективної площини – *розширену площину* $\overline{s}$, тобто звичайну афінну (евклідову) площину s, яка доповнена *невласною (нескінченно віддаленою)прямою* l_∞.

Згідно з введеним означенням між точками і прямими проективної площини встановлюється відношення взаємної приналежності (інцидентності). Вирази «точка належить прямій» та «пряма проходить через точку» можна замінити одним виразом «точка і пряма інцидентні». Мають місце такі твердження щодо відношення інцидентності:

П1. Дві довільні точки A і B інцидентні одній прямій (Через дві довільні точки проходить одна пряма).

П2. Дві довільні прямі інцидентні одній точці (Дві довільні прямі перетинаються).

Означення. Чотири точки на проективній площині, серед яких жодні три не належать одній прямій, називаються *точками загального положення*.

Означення. Нехай s – проективна площина. Впорядкована система точок A_1, A_2, A_3, E загального положення називається *проективним репером*. Позначається $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Точки A_1, A_2, A_3 називаються *вершинами репера*, а точка E – *одиничною точкою репера*.

Якщо вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{e}$ простору V_3, що породжують вершини репера і його одиничну точку, вибрано так, що $\bar{e} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$, то говорять, що *система* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{e}$ *векторів узгоджена відносно* цього репера. Зауважимо, що для даного репера завжди існують системи векторів, які є узгодженими відносно цього репера, причому, дві різні системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{e}$ і $\bar{a}_{1'}, \bar{a}_{2'}, \bar{a}_{3'}, \bar{e}'$, що узгоджені відносно одного репера, пов'язані рівностями: $\bar{a}_i = l\bar{a}_{i'}$, $\bar{e} = l\bar{e}'$.

Означення. Нехай на проективній площині s задано проективний репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ і X – довільна точка площини s. Нехай $\bar{x}$ – будь-який вектор, що породжує точку X, і $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{e}$ – будь-яка система векторів, узгоджена відносно репера R. Якщо $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3$, то числа x_1, x_2, x_3 називаються *проективними* (або *однорідними*) *координатами точки* X відносно репера R.

Зауваження. Оскільки $\bar{x} \neq \bar{0}$, то серед чисел x_1, x_2, x_3 обов'язково хоча б одне відмінне від нуля. Далі, оскільки система векторів, узгоджена відносно репера, вибирається з точністю до множника, то і проективні координати точки теж визначаються з точністю до множника. Тому прийняте таке позначення $X(x_1 : x_2 : x_3)$. Зокрема, для вершин репера і його одиничної точки маємо: $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $E(1:1:1)$.

Таким чином, завданням проективного репера між точками проективної площини і впорядкованими ненульовими трійками дійсних чисел встановлюється відповідність з такими властивостями:

1. Кожній впорядкованій ненульовій трійці відповідає єдина точка.
2. Дві різні трійки задають одну точку тоді і лише тоді, коли вони пропорційні.

Будемо говорити, що завданням репера на проективній площині задається *проективна система координат*.

Аналогічно вводиться проективна система координат на проективній прямій за допомогою проективного репера $R = (A_1, A_2, E)$ [1,с.11].

Теорема 1.1. Нехай на розширеній площині введено афінну систему координат Oxy і проективну систему координат (A_1, A_2, A_3, E), в якій точками A_1, A_2, A_3 є відповідно невласна точка осі Ox, невласна точка осі Oy і початок O афінної системи координат Oxy. Одинична точка E проективної системи координат співпадає з одиничною точкою E афінної системи координат. Нехай x_1, x_2, x_3 - проективні координати, а x, y - афінні координати власної точки M. Тоді мають місце співвідношення: $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Теорема 1.2. Нехай на розширеній прямій введено афінну систему координат і проективну систему координат (A_1, A_2, E), в якій точками A_1, A_2 є відповідно невласна точка прямої і початок O афінної системи координат. Одинична точка E проективної системи координат співпадає з одиничною точкою E афінної системи координат. Нехай x_1, x_2 - проективні координати, а x - афінна координата власної точки M прямої. Тоді має місце співвідношення: $x = \frac{x_1}{x_2}$.

Координати x_1, x_2, x_3 довільної точки X відносно старого репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ пов'язані з координатами x'_1, x'_2, x'_3 цієї ж точки відносно нового репера $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} r\,x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ r\,x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ r\,x_3 &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де стовпцями матриці

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

є координати вершин нового репера відносно старого, причому суми елементів в рядках є відповідними координатами одиничної точки нового репера (така *матриця* називається *узгодженою*).

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Нехай F_2^2 - двовимірний векторний простір над полем F_2 відрахувань по модулю 2. Довести, що проективна пряма $P(F_2^2)$ має точно три точки.

Розв'язання. Дійсно, поле F_2 містить два елементи: $\overline{0}$ і $\overline{1}$. Двовимірний векторний простір над цим полем має всього три різних (з точністю до колінеарності) ненульових вектора: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}+\overline{b}$. Отже, проективний простір, який породжується цим векторним простором, має рівно три точки: $A = f(\overline{a}), B = f(\overline{b}), C = f(\overline{a}+\overline{b})$.

Задача 2. Довести що проективна площина $P(V_3)$ має принаймні сім точок.

Розв'язання. Дійсно, якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис тривимірного векторного простору V_3, який породжує проективну площину $P(V_3)$, то його векторні одновимірні підпростори $\langle\overline{a}\rangle, \langle\overline{b}\rangle, \langle\overline{c}\rangle, \langle\overline{d} = \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\rangle$, $\langle\overline{m}\rangle = \langle\overline{a}, \overline{b}\rangle \cap \langle\overline{c}, \overline{d}\rangle$, $\langle\overline{n}\rangle = \langle c, \overline{b}\rangle \cap \langle\overline{a}, \overline{d}\rangle$, $\langle\overline{k}\rangle = \langle c, \overline{a}\rangle \cap \langle\overline{b}, \overline{d}\rangle$ всі різні і породжують сім точок.

Задача 3. Довести, що на проективній площині $P(V_3)$ існують чотири точки загального положення.

Розв'язання. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ базису і вектор $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ векторного простору V_3 мають наступну властивість: ніякі три з цих векторів не компланарні. Отже, ці вектори породжують точки на проективній площині $P(V_3)$, ніякі три з яких не належать одній прямій, тобто точки загального положення.

Задача 4. На розширеній прямій $\overline{d}$ задано проективний репер $R = (A_1, A_2, E)$. Побудувати точки $M(-1,1), N(-2,1), L(-2,2)$ по їх координатам у цьому репері.

Розв'язання. Виберемо поза прямою $\overline{d}$ довільну точку O і з'єднаємо її з точками A_1, A_2, E. Побудуємо на цих прямих вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{e}$ з початком O такі, що $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 = \overline{e}$ (рис.1). Згідно означення маємо систему векторів, узгоджену відносно заданого проективного репера $R = (A_1, A_2, E)$. Далі побудуємо вектор $\overline{m}$ такий, що $\overline{m} = -\overline{a}_1 + \overline{a}_2$. Пряма, яка проходить через точку O і містить вектор $\overline{m}$, перетинає пряму $\overline{d}$ в шуканій точці M. Аналогічно будуються і інші точки.

Задача 5. На розширеній прямій $\overline{d}$ задано проективний репер $R = (A_1, A_2, E_\infty)$. Побудувати точки $M(-1,1)$ і $N(1,-2)$ по їх координатам в репері R.

Розв'язання. Як і в задачі 4 побудуємо систему $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{e}$ векторів, узгоджену відносно заданого репера. Оскільки одинична точка репера невласна, вектор $\overline{e}$, який її породжує, треба будувати паралельно прямій $\overline{d}$. Всі інші побудови аналогічні тим, що виконувались в задачі 4 (рис. 2).

Задача 6. На розширеній прямій $\overline{d}$ задано проективний репер $R = (A_1, A_2, E)$, A_1, A_2 - власні точки прямої $\overline{d}$, E - середина відрізку $[A_1 A_2]$. Знайти координати невласної точки X_∞ прямої $\overline{d}$ в репері R.

Розв'язання. Нехай O - початок векторів двовимірного векторного простору, який породжує розширену пряму $\overline{d}$. Система векторів $\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{OA_1}$, $\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{OA_2}, \overline{OE}$ є узгодженою відносно репера $R = (A_1, A_2, E)$, тому що $\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OA_1} + \frac{1}{2}\overline{OA_2}$. Невласна точка X_∞ прямої $\overline{d}$ породжується, наприклад, вектором $\frac{1}{2}\overline{A_1 A_2}$, тому її координати визначаються рівністю $\frac{1}{2}\overline{A_1 A_2} = \overline{b} - \overline{a}$. Таким чином, маємо $X_\infty(-1:1)$.

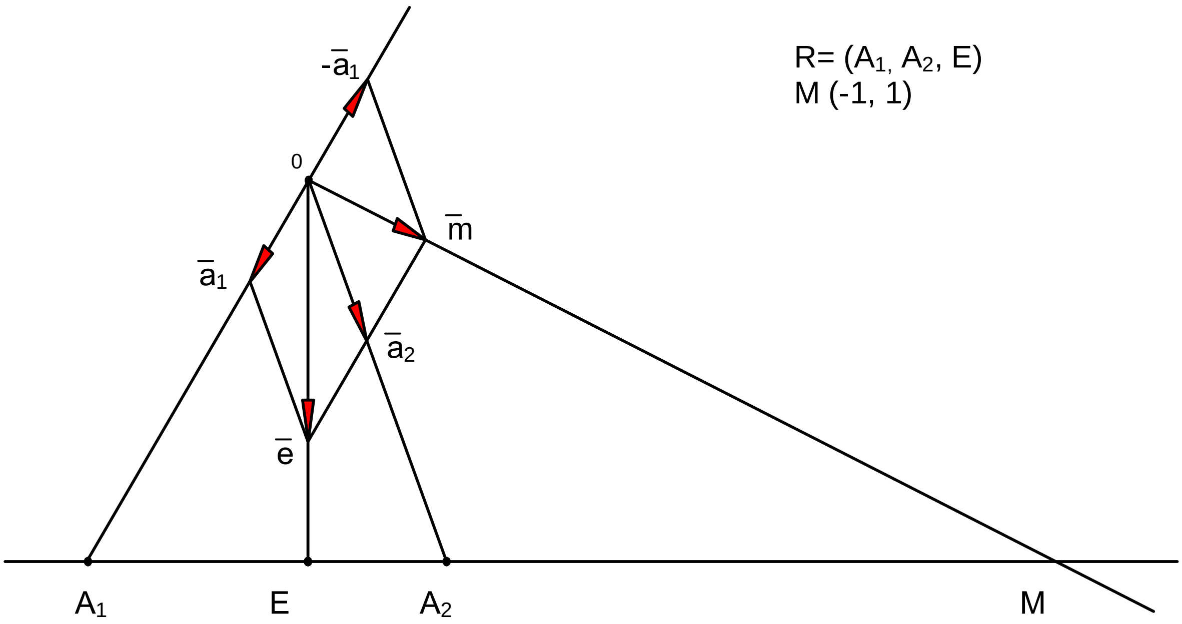


Рис.1

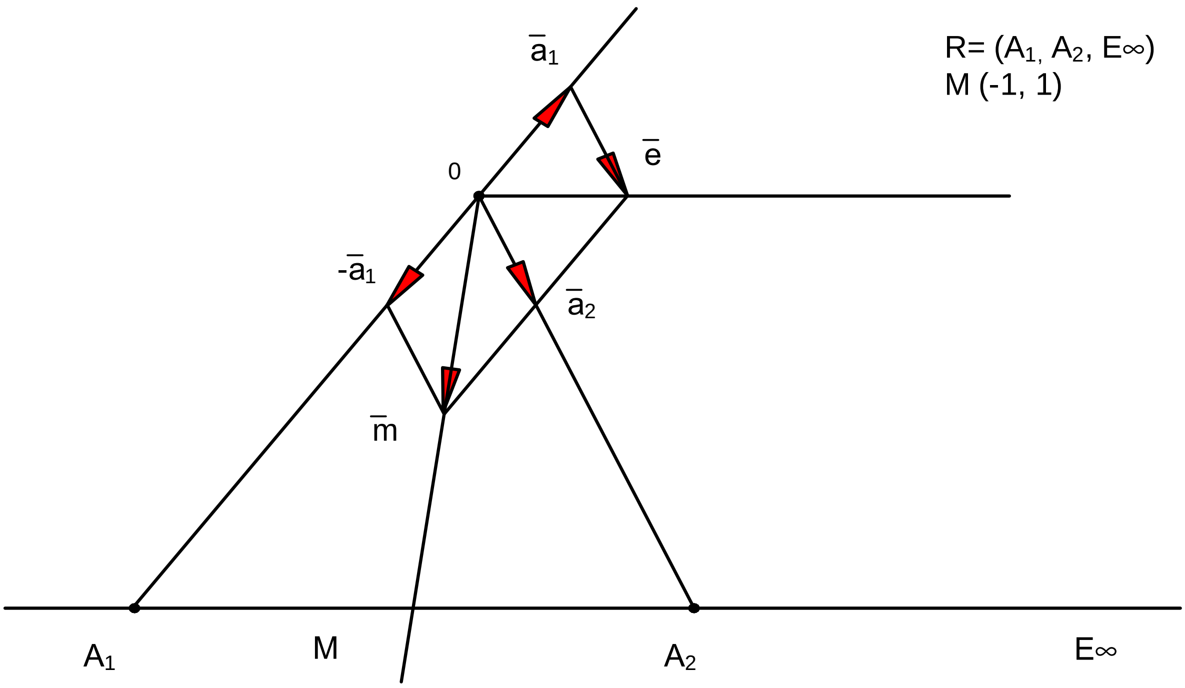


Рис. 2

Задача 7. Вершини координатного трикутника і одинична точка проективного репера R' мають на розширеній площині наступні афінні координати: $A_1'(0,3), A_2'(4,0), A_3'(4,3), E'(3,2)$. Знайти:

1) проективні координати точки M в репері R', якщо її афінні координати $M(1,1)$;

2) афінні координати точки N, якщо в репері R' її проективні координати $N(4,3,-6)$;

3) проективні координати невласної точки осі абсцис в репері R'.

Розв'язання. За допомогою теореми 1.1 знайдемо проективні координати всіх заданих точок відносно проективного репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$, в якому вершини A_1, A_2 є невласними точками осей Ox і Oy відповідно, вершина A_3 є початком O афінної системи координат Oxy, а одиничні точки проективної і афінної систем координат співпадають. Отже $A_1'(0:3:1), A_2'(4:0:1), A_3'(4:3:1), E'(3:2:1)$. За умовою задачі ці точки утворюють репер, який ми позначимо символом $R'=(A_1', A_2', A_3', E')$. Знайдемо формули переходу від першого репера до другого. Матриця переходу має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, але суми елементів в рядках цієї матриці не дорівнюють відповідним координатам одиничної точки E', тому вона не є узгодженою. Для узгодження матриці переходу розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 3 = 4y + 4z, \\ 2 = 3x + 3z, \\ 1 = x + y + z. \end{cases}$ Маємо $x = \frac{3}{12}, y = \frac{4}{12}, z = \frac{5}{12}$, значить узгоджена матриця має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & \frac{16}{12} & \frac{20}{12} \\ \frac{9}{12} & 0 & \frac{15}{12} \\ \frac{3}{12} & \frac{4}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$, а формули переходу: $\begin{matrix} r\,x_1 = 16x_2' + 20x_3', \\ r\,x_2 = 9x_1' + 15x_3', \\ r\,x_3 = 3x_1' + 4x_2' + 5x_3' \end{matrix}$, де x_1, x_2, x_3 - координати будь-якої точки відносно репера $R=(A_1,A_2,A_3,E)$, а x_1',x_2',x_3' - координати цієї ж точки відносно репера $R'=(A_1',A_2',A_3',E')$.

Тепер ми можемо відповісти на всі питання задачі:

1) За умовою $M(1,1)$, в репері $R=(A_1,A_2,A_3,E)$ маємо $M(1:1:1)$, а для знаходження координат цієї точки відносно репера $R'=(A_1',A_2',A_3',E')$ треба розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 1=16x_2'+20x_3', \\ 1=9x_1'+15x_3', \\ 1=3x_1'+4x_2'+5x_3'. \end{cases}$ Отримаємо $M(3,2,-1)$.

2) За умовою $N(4,3,-6)$, тобто відомі проективні координати відносно репера $R'=(A_1',A_2',A_3',E')$. В репері $R=(A_1,A_2,A_3,E)$ ця точка має координати $(12,9,1)$, які отримуємо з формул переходу. За допомогою теореми 1.1 знаходимо афінні координати: $N(12,9)$.

3) Невласна точка осі абсцис – це вершина A_1 репера $R=(A_1,A_2,A_3,E)$, а значить $A_1(1:0:0)$. Її проективні координати відносно репера $R'=(A_1',A_2',A_3',E')$ отримаємо з формул переходу: $A_1(-5:0:3)$.

Завдання для самостійної роботи

1.Довести твердження П1 і П2, користуючись моделями проективної площини.

2. Ознайомитися з моделлю проективної площини у вигляді зв'язки прямих афінного простору A_3.

3. Нехай F_2^3 - тривимірний векторний простір над полем F_2 відрахувань по модулю два. Довести, що проективна площина $P(F_2^3)$ має точно 7 точок. Скільки прямих має проективна площина $P(F_2^3)$?

4. Довести, що в n - вимірному проективному просторі існують $n+2$ точок загального положення.

5. Дано F_3^3 - тривимірний векторний простір над полем F_3 відрахувань по модулю три. Скільки точок має довільна пряма проективної площини $P(F_3^3)$?

6. Дано F_p^{n+1} - $(n+1)$ - вимірний векторний простір над полем F_p відрахувань по модулю p, де p - просте число. Довести, що n - вимірний проективний простір $P(F_p^{n+1})$ складається із $\dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}$ точок. Скільки точок має довільна пряма n - вимірного проективного простору $P(F_p^{n+1})$?

7. На розширеній прямій $\overline{d}$ дані точки A_1, A_2. Побудувати одиничну точку E проективного репера $R=(A_1, A_2, E)$, якщо відомо, що невласна точка M_∞ прямої $\overline{d}$ має координати $(-1,2)$ в репері R.

8 На розширеній прямій $\overline{d}$ заданий проективний репер $R=(A_1, X_\infty, E)$. Побудувати точку $M(2,1)$ із заданими координатами в репері R.

9. На розширеній площині сторонами A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 базисного трикутника проективної системи координат служать відповідно пряма $y=2$, вісь Oy і вісь Ox, а одиничною точкою – точка $E=(1,1)$. Знайти в цій системі центр пучка прямих, паралельних осі Oy.

Відповідь. $(0:1:-1)$

10. На розширеній прямій $\overline{d}$ задано вершини A_1, E проективного репера $R=(A_1, A_2, E)$. Відомо, що невласна точка M_∞ прямої $\overline{d}$ має координати $(-1,2)$ в репері R. Побудувати вершину A_2 репера R.

11. На скільки областей три прямі, які не належать одному пучку, розбивають проективну площину? А евклідову?

1.2 Рівняння прямої. Принцип двоїстості на проективній площині. Подвійне відношення чотирьох точок прямої і чотирьох прямих пучка

Розглянемо три точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : c_3)$ проективної площини, які породжуються векторами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ відповідно. Очевидно, що точки A, B, C належать одній прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні. Таким чином, маємо критерій колінеарності трьох точок у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (1.3)$$

Відомо, що через довільні дві точки A і B проективної площини проходить пряма. За умовою колінеарності точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ належить прямій AB тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Це і є рівняння прямої, яка проходить через точки A і B. Його ще називають *детермінантним рівнянням прямої*.

Параметричні рівняння цієї ж *прямої* мають вигляд

$$x_1 = l a_1 + m b_1,\ x_2 = l a_2 + m b_2,\ x_3 = l a_3 + m b_3.$$

Ці ж рівняння іноді будемо записувати у вигляді $X = lA + mB$.

Детермінантне рівняння прямої можна подати у вигляді

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 ,$$

тобто рівняння довільної прямої є лінійним однорідним. Позначимо цю пряму символом d. Коефіцієнти u_1, u_2, u_3 називають *координатами прямої* і пишуть $d(u_1, u_2, u_3)$. Якщо координати трьох прямих задовольняють умову

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.4)$$

то вони належать одному пучку.

На проективній площині має місце так званий *принцип двоїстості*, який полягає у наступному:

Якщо вірне деяке твердження про інцидентність точок і прямих проективної площини, то буде вірним також твердження, яке можна отримати із даного взаємною заміною слів «точка» і «пряма».

Два твердження, які отримуються одне з одного за принципом двоїстості, називаються *взаємно двоїстими*. Приклад взаємно двоїстих тверджень дають твердження П1 і П2 з пункту 1.1.

Для афінної і евклідової площин принцип двоїстості не має місця.

Нехай точки $A(a_1:a_2:a_3), B(b_1:b_2:b_3), C(c_1:c_2:c_3), D(d_1:d_2:d_3)$ належать одній прямій і $A \neq B$. Тоді існують числа l, m, l', m' такі, що $c_i = la_i + mb_i$, $d_i = l'a_i + m'b_i$, $i = 1,2,3$. При $C \neq B, D \neq A$ і $D \neq B$ розглянемо число $\frac{m}{l} : \frac{m'}{l'} = \frac{l'm}{lm'}$. В силу однорідності координат точок замість a_i, b_i, c_i, d_i можна взяти ra_i, db_i, ac_i, bd_i, де r, d, a, b усі не дорівнюють нулю. Тоді $ac_i = \frac{al}{r}(ra_i) + \frac{am}{d}(db_i)$, $bd_i = \frac{bl'}{r}(ra_i) + \frac{bm'}{d}(db_i)$. Неважко переконатись, що при цьому число $\frac{m}{l} : \frac{m'}{l'}$ не зміниться, тобто це число не залежить від вибору трійок координат точок A, B, C, D, а залежить тільки від положення їх на прямій.

Означення. Якщо A, B, C, D - чотири точки однієї прямої $(A \neq D, C \neq B, D \neq B)$ і $C = lA + mB$, $D = l'A + m'B$, то число $\frac{m}{l} : \frac{m'}{l'}$ називається *подвійним (складним) відношенням чотирьох точок* A, B, C, D і позначається $(ABCD)$.

Отже, $(ABCD)=\frac{m}{l}:\frac{m'}{l'}$. Точки A і B називаються базисними, точки C і D тими, що ділять.

Властивості подвійного відношення:

1.Для будь-яких трьох різних точок A,B,C проективної прямої і довільного дійсного числа $a\neq 0$ існує єдина точка D цієї прямої така, що $(ABCD)=a$.

2. $(CDAB)=(BADC)=(ABCD)$.

3. $(BACD)=(ABDC)=\frac{1}{(ABCD)}$.

4. Подвійне відношення чотирьох точок прямої не залежить від вибору проективної системи координат.

Означення. Якщо a,b,c,d - чотири прямі одного пучка і $c=la+mb,\ d=l'a+m'b$, то число $\frac{m}{l}:\frac{m'}{l'}$ називається *подвійним відношенням чотирьох прямих* і позначається $(abcd)$.

Подвійне відношення чотирьох точок прямої, заданих своїми проективними координатами, обчислюється за однією з наступних формул:

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}},\ (ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ d_1 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ d_1 & d_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}},\ (ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}a_3 & a_2\\ c_3 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_3 & b_2\\ d_3 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & a_2\\ d_3 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_3 & b_2\\ c_3 & c_2\end{vmatrix}}. \quad (1.5)$$

Теорема 1.3. Подвійне відношення чотирьох точок A,B,C,D, в яких пряма m, що не належить даному пучку, перетинає відповідно чотири прямі a,b,c,d цього пучка, дорівнює подвійному відношенню цих прямих, тобто $(ABCD)=(abcd)$.

Означення. Четвірка точок проективної прямої називається *гармонічною*, якщо подвійне відношення цих точок дорівнює -1.

Якщо A,B,C,D - гармонічна четвірка точок, то говорять, що пара точок A,B гармонічно розділяється парою точок C,D, і навпаки.

Означення. *Повним чотиривершинником* називається фігура, яка утворена чотирма точками загального положення і шістьма прямими, яким попарно належать ці точки.

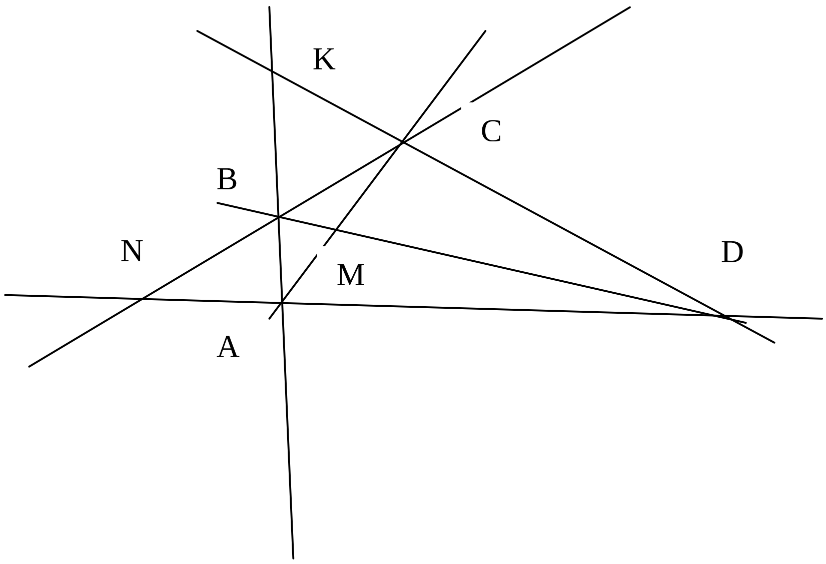


Рис. 3

На рисунку 3 зображено повний чотиривершинник $ABCD$ з трьома парами $AB\ і\ CD$, $AC\ і\ BD$, $AD\ і\ BC$ *протилежних сторін,* точки перетину яких називаються *діагональними точками* (на рисунку точки M, N, K діагональні). Прямі MN, MK, NK, які з'єднують діагональні точки попарно називаються *діагоналями* повного чотиривершинника (на рисунку діагоналі не зображені).

Теорема 1.4. На кожній діагоналі повного чотиривершинника є гармонічна четвірка точок, утворена двома діагональними точками і точками перетину цієї діагоналі зі сторонами, які проходять через третю діагональну точку.

Цю властивість називають гармонічною властивістю повного чотиривершника.

Наслідок 1.5. На кожній стороні повного чотиривершинника є гармонічна четвірка точок, утворена парою вершин, діагональною точкою і точкою перетину цієї сторони з діагоналлю, яка проходить через дві інші діагональні точки.

Використовуючи гармонічну властивість повного чотиривершинника, можна будувати на заданій прямій точку, яка є четвертою гармонічною до трьох заданих точок цієї прямої. За однією з властивостей подвійного відношення для трьох точок прямої, заданих в певному порядку, існує єдина гармонічна для них точка.

Якщо A,B,C - задані точки, то четверту гармонічну до них точку D отримаємо, якщо побудуємо послідовно прямі a,b,c,d,e,f (рис. 4).

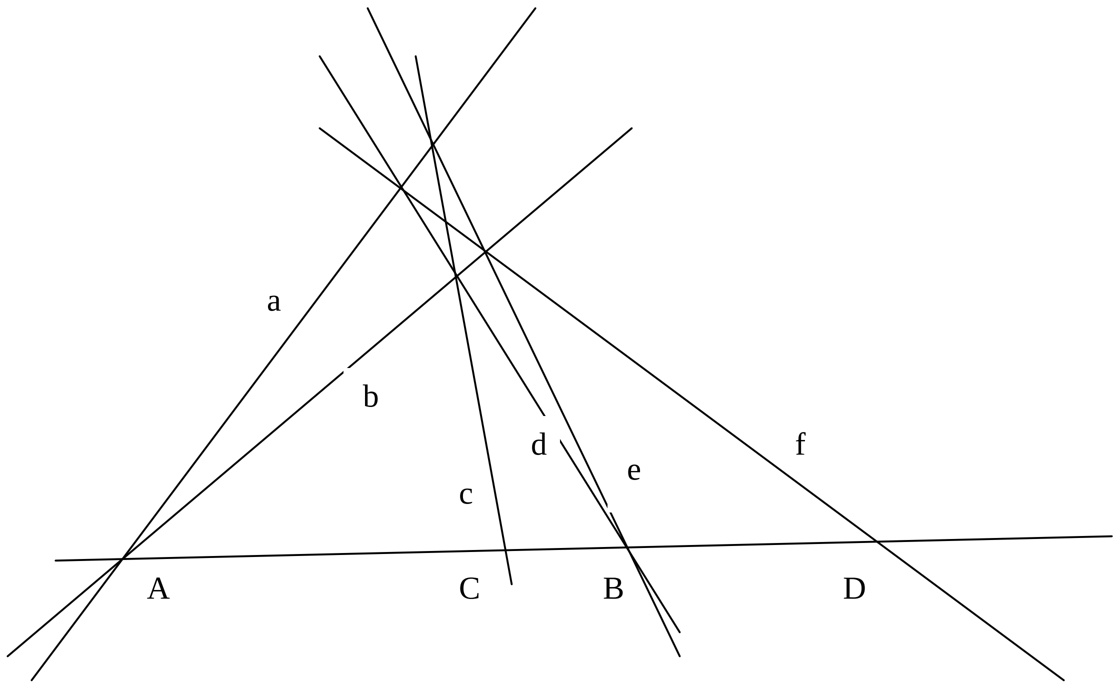


Рис. 4

Означення. Четвірка прямих a,b,c,d одного пучка називається гармонічною, якщо $(abcd)=-1$.

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Скласти рівняння пучка прямих, центром якого є вершина $A_1(1:0:0)$ базисного трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти точку перетину довільної прямої цього пучка з базисною прямою A_2A_3.

Розв'язання. Побудуємо рівняння довільної прямої пучка за двома точками: $A_1(1:0:0)$ і $P(a,b,c)$. Отримаємо $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ або $cx_2 - bx_3 = 0$. Координати точки M перетину цієї прямої з прямою A_2A_3 знайдемо із системи рівнянь $\begin{cases} cx_2 - bx_3 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$ Отже, $M(0,b,c)$.

Задача 2. Вершини базисного трикутника та одинична точка проективної системи координат на розширеній площині мають наступні афінні координати: $A_1' = (1,1), A_2' = (-1,1), A_3' = (0,0), E' = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Знайти в цій системі координат рівняння осей афінної системи координат і рівняння невласної прямої.

Розв'язання. За допомогою теореми 1.1 знайдемо проективні координати всіх заданих точок відносно проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, в якому вершини A_1, A_2 є невласними точками осей Ox і Oy відповідно, вершина A_3 є початком O афінної системи координат Oxy, а одиничні точки проективної і афінної систем координат співпадають. Отже $A_1'(1:1:1), A_2'(-1:1:1), A_3'(0:0:1), E'\left(0:\dfrac{1}{2}:1\right)$. За умовою задачі ці точки утворюють репер, який ми позначимо символом $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$. Знайдемо формули переходу від першого репера до другого. Матриця переходу має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, але суми елементів в рядках цієї матриці не дорівнюють відповідним координатам одиничної точки E', тому вона не є узгодженою. Для узгодження матриці переходу розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 0 = x - y, \\ 1 = x + y, \\ 2 = x + y + z. \end{cases}$ Маємо $x = y = \dfrac{1}{2}, z = 1$, значить узгоджена матриця має вигляд $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, а формули переходу:

$r\,x_1 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2',$

$r\,x_2 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2',$, де x_1, x_2, x_3 - координати будь-якої точки відносно репера

$r\,x_3 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + x_3'$

$R = (A_1, A_2, A_3, E)$, а x_1', x_2', x_3' - координати цієї ж точки відносно репера $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$. Для складання рівнянь шуканих прямих знайдемо координати двох точок на кожній з них. Вісь абсцис містить точку A_3', яка в репері $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ має координати $(0:0:1)$, і вершину A_1 репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, координати якої в репері $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ отримаємо з формул переходу: $A_1(1:-1:0)$. Отже, вісь абсцис в репері $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ має рівняння $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ або $x_1 + x_2 = 0$. Аналогічно, за координатами двох точок $A_3'(0:0:1)$ і $A_2(1:1:-1)$ відносно репера $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ знайдемо рівняння осі ординат у вигляді $x_1 - x_2 = 0$. Невласна пряма визначається точками A_1 і A_2, координати яких в репері $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ уже знайдено, тому її рівняння має вигляд $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ або $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Задача 3. На проективній площині задані три точки $A(1:2:3), B(-3:2:4), C(-2:4:7)$. Довести, що ці точки належать одній прямій, і знайти точку D, гармонічно спряжену з точкою C відносно пари точок A, B.

Розв'язання. Якщо точки A, B, C належать одній прямій, то їх проективні координати задовольняють умову (1.3). Дійсно, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$, значить точки колінеарні. Шукана точка $D(x_1, x_2, x_3)$ така, що $(ABCD) = -1$. Застосуємо першу з формул (1.5), отримаємо $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = -1$, звідки $8(-3x_2 - 2x_1) = 8(x_2 - 2x_1)$ або $x_2 = 0$. Аналогічно, за другою із формул (1.5) отримаємо $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}} = -1$, а після перетворень: $x_1 + 4x_3 = 0$. Отже, $D(-4x_3, 0, x_3)$ або $D(-4:0:1)$.

Задача 4. Довести, що середина C відрізка AB і невласна точка D_∞ розширеної прямої AB гармонічно розділяють кінці відрізку AB.

Розв'язання. Виберемо на розширеній прямій проективний репер $R = (A, B, D_\infty)$ і розглянемо систему векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}$, узгоджену відносно цього репера. Тоді вектор $\bar{c}$, який породжує точку C, пов'язаний з векторами $\bar{a}, \bar{b}$ рівністю $\bar{c} = -\bar{a} + \bar{b}$, яку отримаємо за властивістю паралелограма (рис. 2). Отже, координати точки C відносно цього репера такі: $C(-1:1)$. Знайдемо $(ABCD_\infty)$ за першою з формул (1.5): $(ABCD_\infty) = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = -1$, а оскільки подвійне відношення не залежить від вибору системи координат, то доведення завершене.

Задача 5. Довести, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину продовжень її бокових сторін і середини її основ лежать на одній прямій.

Розв'язання. Для повного чотиривершинника $MCHB$ (рис.5)на його діагоналі AD діагональні точки A, D гармонічно розділяються точками перетину сторін BC і MH з цією діагоналлю. Оскільки пряма BC перетинає AD в невласній точці, то точкою перетину прямої MH з прямою AD є середина відрізка AD (згідно із задачею 4). Таким чином, середина нижньої основи трапеції належить прямій MH. Аналогічно, розглянемо повний чотиривершинник $AMDH$ і доведемо, що середина верхньої основи трапеції також належить прямій MH.

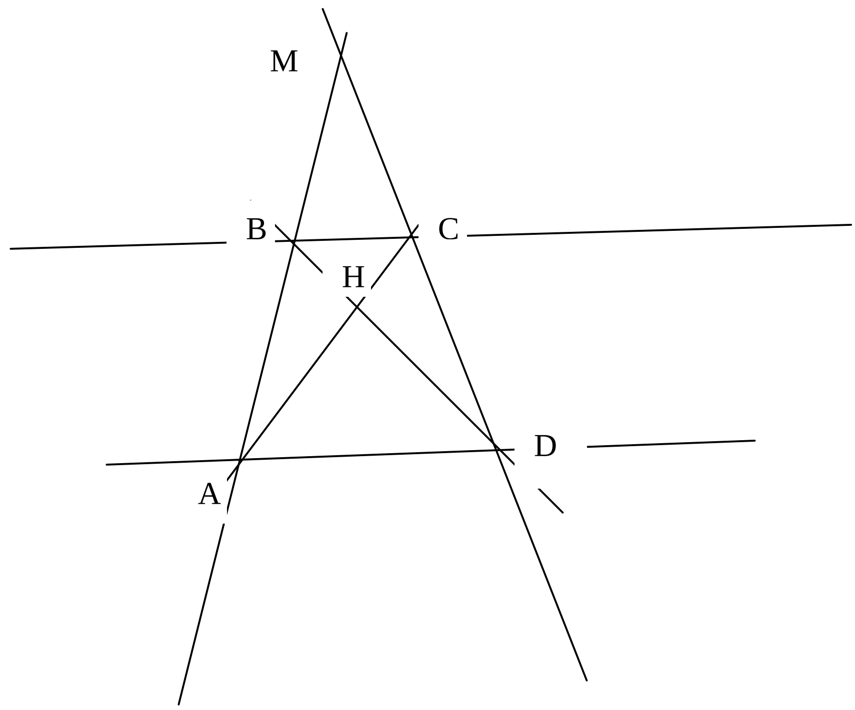


Рис.5

Завдання для самостійної роботи

1. На розширеній площині дано дві точки $A(4:3:1)$ і $B(3:2:1)$ своїми однорідними координатами.

- Написати рівняння прямої, що проходить через ці дві точки.
- Написати параметричні рівняння цієї прямої.
- Знайти значення параметрів, що відповідають невласній точці цієї прямої, і координати цієї невласної точки.

2. Знайти координати точки перетину прямої $7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ з прямою, що проходить через точки $A(3:1:5)$ і $B(-2:0:7)$.

3. Відносно проективної системи координат $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ дана точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$. Знайти точки M_1, M_2, M_3 перетину прямих A_1M, A_2M, A_3M із сторонами базисного трикутника $A_1A_2A_3$.

4. Знайти діагональні точки чотирикутника, вершини якого задані координатами: $(1:1:1), (1:1:-1), (1:-1:1), (-1:1:1)$.

5. Нехай на проективній площині задані дві різні прямі: $a : a_a x^a = 0$ та $b : b_a x^a = 0$ $(a = 1,2,3)$ своїми рівняннями відносно проективного репера. Довести, що рівняння $l a_a x^a + m b_a x^a = 0$, де l і m приймають дійсні значення, не рівні нулю одночасно, визначає пучок прямих на проективній площині.

6. Побудувати пряму $a(1,2,-2)$ по її координатам відносно заданого на розширеній площині проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$.

7. Точки E_1, E_2, E_3 - проекції одиничної точки E на сторони координатного трикутника $A_1A_2A_3$ відповідно з вершин A_1, A_2, A_3. Побудувати точки L_1, L_2, L_3, що є четвертими гармонічними до точок E_1, E_2, E_3 відносно пар точок A_2 і A_3, A_3 і A_1, A_1 і A_2. Знайти координати точок L_1, L_2, L_3. Довести, що вони лежать на одній прямій і знайти її рівняння.

8. На проективній площині задані чотири точки: $A = (1:1:2), B = (3:-1:2), C = (11:-1:10), D = (3:7:10)$. Довести, що ці точки лежать на одній прямій, і знайти подвійне відношення $(ABCD)$.

9. На проективній площині задані чотири прямі: $a(0:1:-1), b(1:2:-1), c(1:1:0), d(4:9:-5)$. Довести, що вони проходять через одну точку, і знайти подвійне відношення $(abcd)$.

10. Дано $A = (1:2:3), B = (-3:2:4), C = (-2:4:7)$. Знайти точку D таку, що $(ABCD) = -3$.

11. Довести, що пряма $a(1,1,1)$ перетинає сторони координатного трикутника проективного репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ в точках M_g, таких що $\left(A_a A_b E_g M_g\right)=-1$ ($a, b, g = 1,2,3$ усі різні). Побудувати пряму a.

12. Якщо $(ABCD)=n$, то $(ACBD)=1-n$, $(ACDB)=\frac{1}{1-n}$, $(ABDC)=\frac{1}{n}$, $(ADBC)=1-\frac{1}{n}$, $(ADCB)=\frac{n}{n-1}$. Довести.

13. На розширеній площині дано три прямі a, b, c пучка. Побудувати пряму d, гармонічно спряжену з прямою c відносно прямих a і b. Розглянути випадки еліптичного і параболічного пучків.

14. Дано відрізок AB і його середину. Через точку, яка не належить прямій AB, провести пряму, паралельну AB, користуючись тільки лінійкою.

15. Дано відрізок AB і пряма, паралельна прямій AB. Користуючись тільки лінійкою, подвоїти відрізок AB.

1.3 Криві другого порядку на проективній площині. Полюси і поляри. Поляритет

Означення. *Лінією (кривою) другого порядку* на проективній площині називається множина точок, проективні координати яких задовольняють однорідне рівняння другого степеня

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \qquad (1.6)$$

За допомогою індексів маємо запис $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$, де $a_{ij} = a_{ji}$.

Ранг матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ij})$ називається *рангом лінії* другого порядку. Якщо цей ранг дорівнює 3, то крива називається *невиродженою*, в противному випадку крива називається *виродженою*.

Означення. *Дотичною прямою* до кривої другого порядку називається пряма, яка має з кривою єдину спільну точку.

Рівняння дотичної прямої в точці $P(p_1 : p_2 : p_3)$ кривої має вигляд

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0 \qquad (1.7)$$

Означення. Точки P і Q називаються *полярно спряженими* відносно невиродженої кривої другого порядку, якщо вони утворюють гармонічну четвірку з точками M, N перетину прямої PQ з кривою, тобто якщо $(PQMN) = -1$.

Означення. Множина всіх точок проективної площини, полярно спряжених з даною точкою P відносно кривої другого порядку, яка не містить точки P, називається *полярою* точки P відносно цієї кривої. Точка P по відношенню до своєї поляри називається *полюсом*.

Теорема. Полярою даної точки відносно невиродженої кривої другого порядку є пряма лінія.

Рівняння поляри точки P відносно кривої $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ має вигляд

$$(a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3)x_1 + (a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3)x_2 + (a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3)x_3 = 0. \qquad (1.8)$$

Означення. Полярою точки P, яка належить кривій другого порядку відносно цієї кривої називається дотична до кривої в цій точці.

Теорема (взаємності поляр). Якщо поляра точки P проходить через точку Q, то поляра точки Q проходить через точку P.

Означення. *Автополярним трикутником* відносно даної кривої другого порядку називається трикутних, кожна сторона якого є полярою протилежної вершини.

Якщо автополярний трикутник відносно даної невиродженої кривої вибрати в якості координатного трикутника проективної системи координат, а за одиничну точку взяти точку перетину дотичних до кривої, які проведені з двох вершин цього трикутника, то відносно такої системи координат рівняння кривої буде мати канонічний вигляд: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ або $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Перша з цих кривих називається *дійсним овалом*, а друга – *уявним овалом*. Повна проективна класифікація кривих другого порядку буде наведена в пункті 2.1.

Якщо на проективній площині задано невироджену криву другого порядку, то між множинами всіх точок і всіх прямих площини встановлюється взаємно однозначна відповідність «полюс $\leftrightarrow$ поляра», яку називають *поляритетом* і яка задається формулами:

$$\begin{aligned} ru_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ ru_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ ru_3 &= a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3. \end{aligned}$$

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Сторони BC, CA, AB трикутника ABC дотикаються кривої другого порядку відповідно у точках A_1, A_2, A_3. Прямі AA_1, BA_2, CA_3 перетинаються у точці E. Знайти рівняння цієї кривої відносно проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ (рис.6).

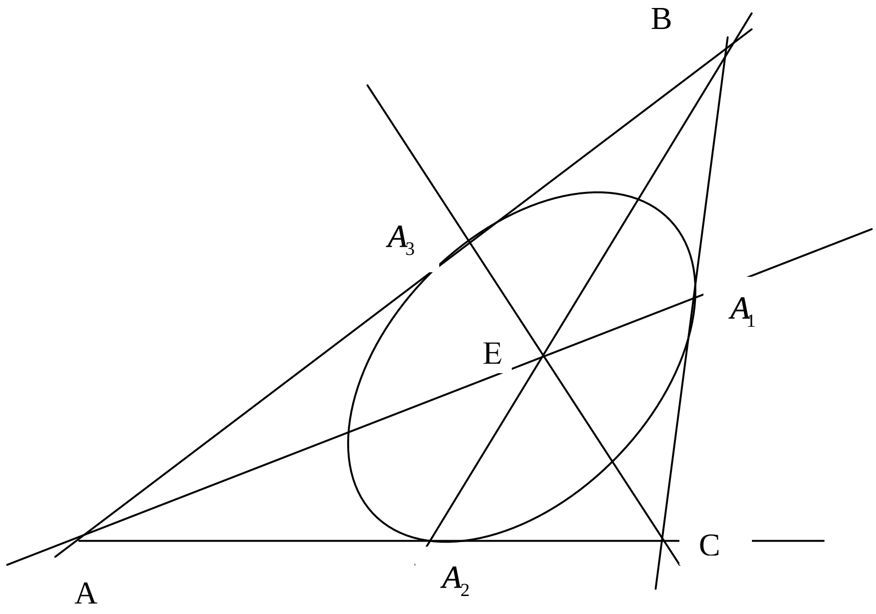


Рис. 6

Розв'язання. За умовою шукана крива другого порядку дотикається сторін трикутника ABC в вершинах $A_1(1:0:0), A_2(0:1:0), A_3(0:0:1)$ репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$. Послідовно підставляючи їх координати в рівняння (1.6) кривої, отримаємо $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$. Далі запишемо рівняння дотичної до кривої в точці A_3: $a_{13}x_1+a_{23}x_2=0$. За умовою це пряма AB. Аналогічно отримаємо рівняння прямої AC: $a_{12}x_1+a_{32}x_3=0$ як дотичної до кривої в точці A_2. Знайдемо координати точки A перетину прямих AB і AC, розв'язавши систему рівнянь. Отримаємо $A(a_{23}, -a_{13}, -a_{12})$. Умова колінеарності точок A, E, A_1 має вигляд $\begin{vmatrix} a_{23} & -a_{13} & -a_{12} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$, звідки випливає $a_{12}=a_{13}$. Аналогічно, знайдемо рівняння BC: $a_{21}x_2+a_{31}x_3=0$, координати точки $C(-a_{23}, -a_{13}, a_{12})$ і скористаємось умовою колінеарності точок C, E, A_3, отримаємо $a_{13}=a_{23}$. Таким чином, шукане рівняння кривої має вигляд $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$.

Задача 2. Знайти рівняння лінії другого порядку, якій належать точки $(1:0:0)$, $(1:0:-1)$, $(2:1:0)$ і яка дотикається до прямих $x_2 + x_3 = 0$ та $x_1 - x_3 = 0$.

Розв'язання. Після підстановки координат даних точок в рівняння (1.6) кривої другого порядку отримаємо наступні співвідношення між коефіцієнтами: $a_{11} = 0$, $a_{11} + a_{33} - 2a_{13} = 0$, $4a_{11} + a_{22} + 4a_{12} = 0$. Замітимо, що перша із заданих точок належить першій заданій прямій, а друга – другій заданій прямій. За умовою задачі ці прямі є дотичними до шуканої кривої, тому їх рівняння можемо записати у вигляді (1.7): $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$ і $(a_{11} - a_{13})x_1 + (a_{21} - a_{23})x_2 + (a_{31} - a_{33})x_3 = 0$. Порівнюючи їх з даними рівняннями, знайдемо ще два співвідношення між коефіцієнтами шуканого рівняння: $a_{21} = a_{31}$ і $a_{21} = a_{23}$. Виразимо всі коефіцієнти через a_{13}: $a_{33} = 2a_{13}$, $a_{22} = -4a_{13}$, $a_{12} = a_{13}, a_{23} = a_{13}$. Таким чином, $2a_{13}x_1x_2 - 4a_{13}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{13}x_2x_3 + 2a_{13}x_3^2 = 0$ або, остаточно, $x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 = 0$.

Задача 3. Знайти полюс прямої $3x - y + 6 = 0$ відносно лінії другого порядку $x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 6y = 0$.

Розв'язання. Рівняння прямої і кривої задані в афінних координатах. За допомогою теореми 1.1 перепишемо їх в проективних координатах: $3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$. Ведемо позначення p для заданої прямої в проективних координатах. Виберемо на прямій p дві довільні точки, наприклад, $A(0:6:1)$ і $B(2:0:1)$ і складемо рівняння їх поляр за формулою (1.8). Отримаємо $a: -5x_1 + 27x_2 - 18x_3 = 0$, $b: x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. За теоремою взаємності поляр шуканий полюс P прямої p належить прямим a і b, тому що полюси A і B цих прямих належать прямій p. Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} -5x_1 + 27x_2 - 18x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, знайдемо $P(9:-1:-4)$.

Відмітимо, що координати точки P можна отримати як розв'язок системи рівнянь: $\begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 = 3r, \\ -p_1 + 5p_2 - 3p_3 = -r, \\ p_1 - 3p_2 = 6r. \end{cases}$ Вона отримується із рівняння (1.8) при умові, що коефіцієнти рівняння пропорційні коефіцієнтам в рівнянні заданої поляри.

Задача 4. На прямій $x - 5y + 18 = 0$ знайти точку, полярно спряжену з точкою $(-5,4)$ відносно лінії $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$.

Розв'язання. Перейдемо до проективних координат точок на заданих фігурах за допомогою теореми 1.1. Тоді $A(-5:4:1)$ - задана точка, $p: x_1 - 5x_2 + 18x_3 = 0$ - задана пряма, $g: 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2 = 0$ - задана крива. Рівняння поляри a заданої точки знайдемо у вигляді (1.8): $x_1 - 3x_2 + 22x_3 = 0$. Шукана точка є точкою перетину прямих p і a, а тому має проективні координати $(28:2:-1)$, а за теоремою (1.1) її афінні координати - $(-28,2)$.

Задача 5. Побудувати поляру даної точки P відносно заданої кривої другого порядку.

Розв'язання. Розглянемо лише випадок, коли задана точка належить внутрішній області даної кривої Побудуємо будь-який вписаний в криву чотирівершинник, для якого точка P є діагональною. Діагональ цього чотиривершинника, яка проходить через дві інші діагональні точки і є шуканою полярою точки P.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти рівняння лінії другого порядку, яка проходить через точки:

1) $(0:0:1)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:1)$, $(2:3:1)$;

2) $(0:0:1)$,$(0:1:1)$,$(1:0:1)$, $(2:-5:1)$, $(-5:2:1)$.

2. Скласти рівняння ліній другого порядку, знаючи, що вони проходять через вершини базисного трикутника $A_1A_2A_3$ проективної системи координат.

3. Знайти поляру точки $(1,0)$ відносно лінії $3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$.

4. Написати рівняння лінії другого порядку, яка проходить через вершини базисного трикутника $A_1A_2A_3$ знаючи, що одинична точка $E(1:1:1)$ проективної системи координат є полюсом одиничної прямої $e(1:1:1)$.

Відповідь: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$

5. На проективній площині введена проективна система координат $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Нехай E_1 та E_2 - точки перетину прямих A_1E і A_2E зі сторонами A_2A_3 і A_1A_3 координатного трикутника $A_1A_2A_3$. Скласти рівняння лінії другого порядку, для якої базисний трикутник буде автополярним, а полярою одиничної точки E буде пряма E_1E_2. Які з точок A_1, A_2, A_3 є внутрішніми точками відносно лінії другого порядку, а які є зовнішніми?

6. Написати рівняння овальної лінії другого порядку, яка дотикається обох сторін A_1A_3 і A_2A_3 базисного трикутника $A_1A_2A_3$ у вершинах $A_1(1:0:0)$ та $A_2(0:1:0)$, знаючи, що одинична точка $E(1:1:1)$ є полюсом одиничної прямої $e(1:1:1)$ відносно цієї лінії.

7. Дано овальну криву другого порядку g і точку M. Побудувати поляру точки M, якщо:

1) M зовнішня точка відносно g;

2) M внутрішня точка відносно g;

3) M належить g.

8. Побудувати полюс даної прямої m відносно даної овальної кривої другого порядку g.

9. Дано зображення невиродженої лінії другого порядку і точки на ній. Користуючись тільки лінійкою, побудувати дотичну до лінії в даній точці.

1.4 Завдання для тестування за матеріалами розділу 1

1. Яка з точок A, B, C, D належить прямій $x_1 = 2l + m,\ x_2 = l - m,\ x_3 = 3m$?

$A(1:-1:3)$	$B(0:-1:3)$	$C(1:2:3)$	$D(-1:1:1)$

2. Яка з трійок точок є трійкою колінеарних точок?

А)	Б)	С)	Д)
$(-2:1:-3)$ $(1:-1:0)$ $(1:0:3)$	жодна	$(1:2:3)$ $(1:-1:3)$ $(1:-4:1)$	$(-1:1:3)$ $(2:1:-3)$ $(3:-1:0)$

3. Яка з трійок прямих утворює пучок?

А)	Б)	С)	Д)
$(3:1:-1)$ $(1:-1:3)$ $(1:0:3)$	$(1:1:3)$ $(2:-1:3)$ $(1:-2:0)$	жодна	$(-1:1:3)$ $(2:1:-3)$ $(3:-1:0)$

4. Яка з трійок точок належить деякій невиродженій кривій другого порядку?

А)	Б)	С)	Д)
$(3:-2:9)$ $(1:-1:3)$ $(1:0:3)$	$(1:1:3)$ $(2:0:3)$ $(1:-1:0)$	$(1:2:3)$ $(1:-1:3)$ $(0:3:0)$	$(-1:1:3)$ $(0:0:-3)$ $(3:-1:0)$

5. Яка з систем векторів узгоджена відносно реперу $R = (A_1, A_2, E)$?

А)	Б)	С)	Д)
$(3:1:-1)$ $(1:-1:3)$ $(1:0:3)$	$(1:1:3)$ $(2:-1:3)$ $(1:-1:0)$	жодна	$(-1:1:3)$ $(2:1:-3)$ $(3:-1:0)$

6. Яка з прямих є полярою точки $A(1:0:0)$ відносно кривої $x_2x_3 + x_1^2 = 0$?

А)	Б)	С)	Д)
$x_1 = 0$	$x_1 + x_2 = 0$	$x_2 + x_3 = 0$	$x_2 = 0$

7. Яка з прямих є дотичною до кривої $2x_1x_3 + x_2^2 = 0$ в точці $P(0:0:1)$?

А)	Б)	С)	Д)
$x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$	$x_2 + x_3 = 0$	$x_1 + x_2 = 0$

8. Подвійне відношення точок $A(1:0:0)$, $B(0:1:0), C(1:1:0), D(1:-1:0)$ дорівнює

А)	Б)	С)	Д)
0	1	-1	невизначене

9. При якому значенні l крива $2lx_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ є виродженою?

А)	Б)	С)	Д)
0	± 1	ні при якому	при будь-якому

10. Яку з наступних властивостей не мають точки $A(1,0,1), B(1,,1,3), C(2,1,4), D(0,1,2)$?

А)	Б)	С)	Д)
утворюють гармонічну четвірку	належать одній прямій	$C + D = 2B$	утворюють проективний репер

Питання для самоконтролю:

1. Означення проективної площини.
2. Означення проективного реперу.
3. Означення проективних координат точки.
4. Види рівнянь проективної прямої.
5. Означення подвійного відношення чотирьох точок прямої.

6. Формули для обчислення подвійного відношення чотирьох точок прямої.

7. Загальне рівняння проективної кривої другого порядку.

2. Проективні перетворення на проективній прямій і проективній площині та їх інваріанти

2.1 Означення проективного перетворення. Нерухомі точки і нерухомі прямі. Інваріанти проективного перетворення. Проективна геометрія з групової точки зору

Означення. *Проективним перетворенням* проективної площини називається таке точкове відображення проективної площини на себе, яке будь-яку проективну пряму переводить в пряму.

Теорема (про завдання проективного перетворення площини). Якщо A, B, C, D - будь-які чотири точки загального положення на проективній площині, і A', B', C', D' - будь-які інші чотири точки загального положення, то існує єдине проективне перетворення площини, яке точки A, B, C, D переводить у точки A', B', C', D' відповідно.

Проективне перетворення задається формулами

$$\begin{aligned} r\,x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ r\,x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ r\,x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де x_1, x_2, x_3 - координати довільної точки X проективної площини, а x_1', x_2', x_3' - координати її образа при цьому перетворенні. Якщо визначник матриці $\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ перетворення не дорівнює нулю, то *перетворення* називається *невиродженим*.

Означення. Дві фігури називаються *проективно-еквівалентними*, якщо існує хоча б одне проективне перетворення, яке одну з цих фігур відображає на іншу.

Приклади:

1. Довільні два чотирикутника проективно-еквівалентні згідно теореми про завдання проективного перетворення.

2. Розглянемо два довільних трикутника. Очевидно, існує безліч проективних перетворень, кожне з яких відображає один трикутник на інший, значить, будь-які два трикутника проективно-еквівалентні.

3. Два п'ятикутника можуть не бути проективно-еквівалентними, так як проективне перетворення, визначене чотирма парами їх відповідних вершин зовсім може і не переводити п'яту вершину одного п'ятикутника в п'яту вершину іншого, а може і переводити.

Означення. *Нерухомою точкою (прямою)* проективного перетворення називається така точка (пряма) проективної площини, образ якої співпадає з самою точкою (прямою). Якщо кожна точка нерухомої прямої є нерухомою точкою, то така пряма називається *прямою нерухомих точок*.

Координати нерухомої точки проективного перетворення знаходяться із системи рівнянь $\begin{cases}(a_{11}-r)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-r)x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-r)x_3=0,\end{cases}$ де r є коренем так званого характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r \end{vmatrix}=0. \qquad (2.2)$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння завжди має хоча б один дійсний корінь, а значить будь-яке проективне перетворення має хоча б одну нерухому точку. Можна довести, що будь-яке проективне перетворення має хоча б одну нерухому пряму.

Теорема. Множина всіх проективних перетворень проективної площини утворює групу, яка називається *проективною групою*.

Означення. *Інваріантом групи перетворень* називається таке число або така властивість фігури, які не змінюються під дією будь-якого перетворення з цієї групи. Фігура, яка під дією перетворень з деякої групи перетворюється у фігуру з того ж класу, що і дана фігура, називається *інваріантною фігурою*.

У проективній геометрії чотирикутник є інваріантною відносно проективних перетворень фігурою (див. приклад 1 цього пункту).

Теорема 2.1. Подвійне відношення чотирьох точок прямої не змінюється при проективних перетвореннях проективної площини, тобто подвійне відношення чотирьох точок прямої є інваріантом проективної групи перетворень.

З теореми 1.3 безпосередньо випливає, що подвійне відношення чотирьох прямих одного пучка є інваріантом проективних перетворень.

В кінці XIX ст. німецький математик Фелікс Клейн запропонував класифікувати геометрії в залежності від груп перетворень. З цієї точки зору, яку з часів Клейна називають груповою точкою зору на геометрію, кожна група перетворень породжує геометрію як теорію інваріантів цієї групи. Згідно цієї точки зору проективна геометрія є теорією інваріантів проективної групи перетворень.

Подвійне відношення чотирьох точок прямої є основним проективним інваріантом.

Серед властивостей кривих другого порядку на проективній площині теж є проективні інваріанти. Наприклад, ранг лінії другого порядку є проективним інваріантом.

Оскільки проективні перетворення є невиродженими лінійними перетвореннями, то з лінійної алгебри випливає, що за допомогою проективних перетворень рівняння кривої другого порядку можна звести до нормального вигляду, а отже отримаємо 5 класів кривих:

1. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ - дійсний овал;
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ - уявний овал;
3. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ - пара дійсних різних прямих;
4. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ - пара уявних прямих, які перетинаються в уявній точці;

5. $x_1^2 = 0$ - пара дійсних прямих, які співпадають.

Будь-які дві криві з одного класу проективно-еквівалентні, а будь-які дві криві з різних класів проективно-нееквівалентні.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти формули проективного перетворення площини, яке точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$ переводить відповідно в точки $(2:4:8)$, $(2:-1:2)$, $(3:2:5)$, $(2:5:7)$.

Розв'язання. Знайти проективне перетворення означає знайти значення коефіцієнтів в формулах (2.1). Позначимо задані точки символами A, B, C, D, а їхні образи – символами A', B', C', D'. Після підстановки координат точок A і A' в формули (2.1) проективного перетворення отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} r_1 \cdot 2 = a_{11} \cdot 1, \\ r_1 \cdot 4 = a_{21} \cdot 1, \\ r_1 \cdot 8 = a_{31} \cdot 1. \end{cases}$ Аналогічно записуються ще три системи рівнянь для трьох інших пар відповідних точок: $\begin{cases} r_2 \cdot 2 = a_{12} \cdot 1, \\ r_2 \cdot (-1) = a_{22} \cdot 1, \\ r_2 \cdot 2 = a_{32} \cdot 1, \end{cases}$ $\begin{cases} r_3 \cdot 3 = a_{13} \cdot 1, \\ r_3 \cdot 2 = a_{23} \cdot 1, \\ r_3 \cdot 5 = a_{33} \cdot 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} r_4 \cdot 2 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 1, \\ r_4 \cdot 5 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 + a_{23} \cdot 1, \\ r_4 \cdot 7 = a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 1 + a_{33} \cdot 1. \end{cases}$

З перших трьох систем знайдемо невідомі a_{ij} через r_1, r_2, r_3 і підставимо в четверту систему, отримаємо $\begin{cases} 2r_4 = 2r_1 + 2r_2 + 3r_3, \\ 5r_4 = 4r_1 - r_2 + 2r_3, \\ 7r_4 = 8r_1 + 2r_2 + 5r_3. \end{cases}$ Розглянемо останню систему рівнянь відносно невідомих r_1, r_2, r_3, тоді $r_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2r_4 & 2 & 3 \\ 5r_4 & -1 & 2 \\ 7r_4 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{2} r_4$,

$r_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2r_4 & 3 \\ 4 & 5r_4 & 2 \\ 8 & 7r_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = -r_4$, $r_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2r_4 \\ 4 & -1 & 5r_4 \\ 8 & 2 & 7r_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = r_4$, а отже для коефіцієнтів a_{ij} з формул проективного перетворення маємо: $a_{11} = r_4$, $a_{21} = 2r_4$, $a_{31} = 4r_4$, $a_{12} = -2r_4$, $a_{22} = r_4$, $a_{32} = -2r_4$, $a_{13} = 3r_4$, $a_{23} = 2r_4$, $a_{33} = 5r_4$. Залишилось підставити їх в формули (2.1). Отримаємо $\begin{array}{l} r\ x_1' = r_4 x_1 - 2r_4 x_2 + 3r_4 x_3, \\ r\ x_2' = 2r_4 x_1 + r_4 x_2 + 2r_4 x_3, \\ r\ x_3' = 4r_4 x_1 - 2r_4 x_2 + 5r_4 x_3. \end{array}$ Введемо позначення $\tilde{r} = \dfrac{r}{r_4}$ і запишемо остаточну відповідь: $\begin{array}{l} \tilde{r}\ x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \tilde{r}\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ \tilde{r}\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{array}$

Задача 2. Знайти образ та прообраз точки $M(-3:2:1)$ при проективному перетворенні : $\begin{array}{l} r\ x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ r\ x_2' = -x_1 + x_2 - 3x_3, \\ r\ x_3' = 2x_1 - 5x_2 - x_3. \end{array}$ Знайти образ та прообраз прямої $a: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ при цьому перетворенні.

Розв'язання. Підставимо координати заданої точки замість x_1, x_2, x_3 в формули перетворення, отримаємо: $\begin{array}{l} r\ x_1' = -6, \\ r\ x_2' = 2, \\ r\ x_3' = -17. \end{array}$ Значить координати її образа: $M'(-6:2:17)$. Далі, будемо вважати задану точку образом точки N, тобто N - прообраз точки M. Для знаходження координат прообразу розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} -3r = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ 2r = -x_1 + x_2 - 3x_3, \\ r = 2x_1 - 5x_2 - x_3. \end{cases}$ Отримаємо $N(39:17:8)$.

Для знаходження образа заданої прямої в цьому перетворенні можна на прямій взяти 2 точки, знайти їхні образи і скласти рівняння прямої, що проходить через отримані точки. Але можна запропонувати інший спосіб: з формул перетворення виразимо x_1, x_2, x_3 через x_1', x_2', x_3' і підставимо в рівняння прямої a. Отже, маємо $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} rx_1' & -2 & 1 \\ rx_2' & 1 & -3 \\ rx_3' & -5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}} = -16rx_1' - 7rx_2' + 5rx_3'$,

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & rx_1' & 1 \\ -1 & rx_2' & -3 \\ 2 & rx_3' & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}} = -7rx_1' - 3rx_2' + 2rx_3'$, $x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & rx_1' \\ -1 & 1 & rx_2' \\ 2 & -5 & rx_3' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}} = 3rx_1' + rx_2' - rx_3'$. Запишемо шукане рівняння: $x_1 + x_2 + x_3 = -20rx_1' - 9rx_2' + 6rx_3' = 0$ або $20x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 0$.

Запишемо рівняння прямої a у вигляді: $x_1' + x_2' + x_3' = 0$, тобто будемо вважати її образом деякої прямої b. Тоді буде вірним і рівність $rx_1' + rx_2' + rx_3' = 0$, а тому рівняння прообразу заданої прямої – прямої b - має вигляд $r\ x_1' + r\ x_2' + r\ x_3' = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$ або $2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0$.

Задача 3. Точки A, B, C неколлініарні. Якщо деяка пряма m перетинає прямі BC, CA, AB відповідно в точках Q, R, P і прямі a, b, c з'єднують довільну точку $M \in m$ з точками A, B, C, то $(MQRP) = (mabc)$. Довести.

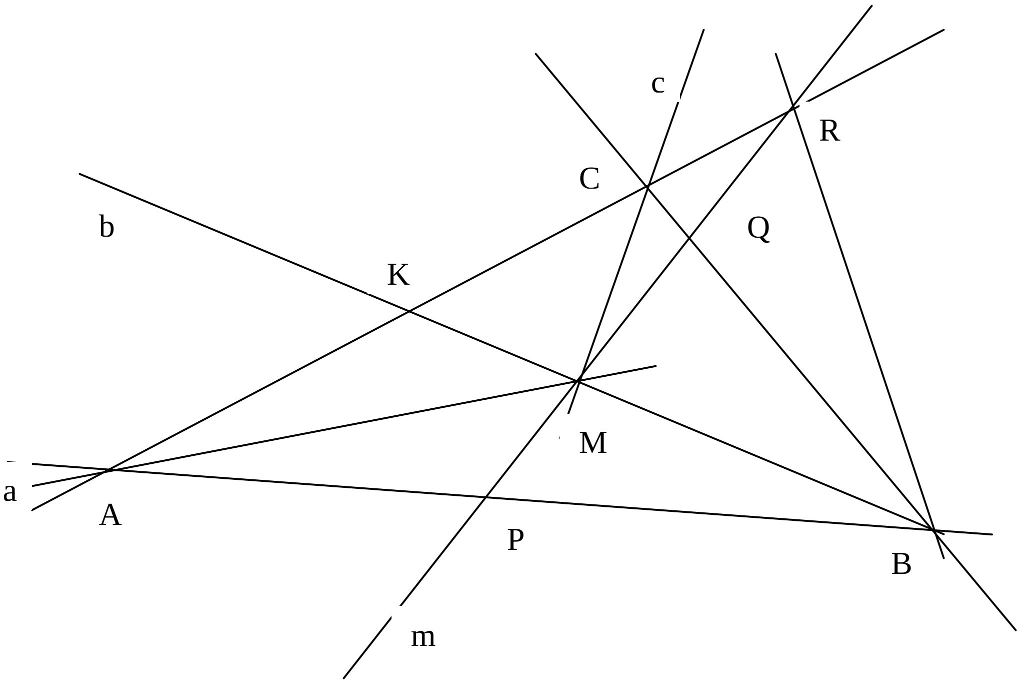


Рис. 7

Розв’язання. Застосуємо теорему 1.3 для прямих m,a,b,c пучка з центром M. Пряма CA перетинає прямі пучка в точках R,A,K,C відповідно (рис. 7). Тоді $(mabc)=(RAKC)$. Використаємо той факт, що центральне проектування однієї прямої на іншу є проективним перетворенням, а значить подвійне відношення чотирьох точок однієї прямої дорівнює подвійному відношенню їх образів на іншій прямій. Пряма CA з центра B проектується на пряму m, причому точки R,A,K,C відображаються на точки R,P,M,Q відповідно, тому $(RAKC)=(RPMQ)$. Нарешті, за однією з властивостей подвійного відношення чотирьох точок прямої отримаємо $(RPMQ)=(MQRP)$. Таким чином, $(mabc)=(MQRP)$, що і треба було довести.

Зауваження. Цю задачу можна розв’язати без застосування центрального проектування, використовуючи кілька разів теорему 1.3, а саме можна записати низку рівностей: $(mabc)\overset{AC}{=}(RAKC)\overset{B}{=}(BR,BA,BM,BC)\overset{m}{=}(RPMQ)=(MQRP)$. Тут символи над знаками рівності вказують пряму, якій належать точки за знаком рівності, або центр пучка, для якого застосовується теорема.

Задача 4. Довести, що для п’яти різних точок A, B, M, U, V проективної прямої має місце співвідношення: $(ABMV) = (ABMU)(ABUV)$.

Розв’язання. Скористаємось означенням подвійного відношення. З умови колінеарності точок A, B, M можемо записати $M = lA + mB$. Аналогічно, точки A, B, U колінеарні, тому $U = l'A + m'B$, точки A, B, V колінеарні, тому $V = l''A + m''B$. Знайдемо $(ABMU)(ABUV) = \left(\frac{m}{l} : \frac{m'}{l'}\right) \cdot \left(\frac{m'}{l'} : \frac{m''}{l''}\right) = \frac{m}{l} : \frac{m''}{l''}$. З іншого боку $(ABMV) = \frac{m}{l} : \frac{m''}{l''}$, тому рівність має місце.

Задача 5. Якщо при проективному перетворенні три точки деякої прямої інваріантні, то будь-яка точка цієї прямої інваріантна при цьому перетворенні, тобто ця пряма є прямою інваріантних точок.

Розв’язання. Нехай точки A, B, C прямої інваріантні, а точка M відображається на точку M'. Нехай $(ABCM) = a$. За властивістю проективного перетворення $(ABCM) = (ABCM') = a$, а за властивістю 1 подвійного відношення $M = M'$, тобто точка M прямої теж інваріантна.

Задача 6. На розширеній площині у однорідних координатах задано проективне перетворення:

$$\begin{aligned} r\ x_1' &= x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ r\ x_2' &= 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ r\ x_3' &= 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Знайти невласні точки, які при цьому перетворенні переходять у невласні точки.

Розв’язання. Виберемо проективну систему координат так, щоб невласна пряма мала рівняння $x_3 = 0$. Довільна невласна точка $M(x_1 : x_2 : 0)$ за умовою переходить знову у невласну точку $M'(x_1' : x_2' : 0)$. З формул заданого проективного перетворення маємо: $\begin{aligned} r\ x_1' &= x_1 - 2x_2, \\ r\ x_2' &= 2x_1 + x_2, \\ 0 &= 4x_1 - 2x_2. \end{aligned}$ З останнього рівняння $x_2 = 2x_1$. При цьому з перших двох рівнянь отримаємо залежність $4x_1' = -3x_2'$, тобто точка, яка є образом шуканої точки, має проективні координати $(-3:4:0)$. Перші дві координати шуканої точки знайдемо із системи рівнянь $\begin{cases} -3 = x_1 - 2x_2, \\ 4 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$

Таким чином, при заданому проективному перетворенні образом єдиної невласної точки $(1:2:0)$ знову є невласна точка $(-3:4:0)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Коли два п’ятивершиника проективно-еквівалентні?

2. Знайти всі проективні перетворення, при яких базисні точки A_1, A_2, A_3 інваріантні. Який геометричний зміст мають ці перетворення у випадку, якщо проективна площина реалізована зв’язкою прямих та площин тривимірного афінного простору?

3. Знайти проективне перетворення, при якому базисні точки A_1, A_2, A_3 переходять відповідно у точки A_2, A_3, A_1, а одинична точка E інваріантна.

4. Знайти проективне перетворення, при якому вершини базисного трикутника $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ переходять відповідно у точки $E_1(0:1:1), E_2(1:0:1), E_3(1:1:0)$, а одинична точка E інваріантна.

5. Знайти всі проективні перетворення, при яких вершини базисного трикутника $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ переходять відповідно у точки $E_1(0:1:1)$, $E_2(1:0:1)$, $E_3(1:1:0)$.

6. Знайти проективне перетворення проективної площини, при якому базисні точки $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ проективної системи координат інваріантні, а одинична точка E переходить у точку $E'(e_1 : e_2 : e_3)$.

7. Як запишеться проективне перетворення проективної площини, якщо точка $A_1(1:0:0)$ є інваріантною точкою, пряма A_2A_3 є інваріантною прямою, причому точка $A_3(0:0:1)$ є образом точки $A_2(0:1:0)$?

Відповідь. $r\,x_1' = a_{11}x_1$, $r\,x_2' = a_{23}x_3$, $r\,x_3' = a_{32}x_2 + a_{33}x_3$.

8. Знайти координати нерухомих точок проективного перетворення площини:

$$r\ x_1' = x_1,$$
$$r\ x_2' = x_2,$$
$$r\ x_3' = x_1 + x_2.$$

9. Проективне перетворення площини задано парами точок: A $(2:1:1)$ → A′ $(2:1:5)$, B $(1:2:1)$ → B′ $(2:-1:3)$, N $(1:-1:1)$ → N′ $(-1:2:3)$, M $(-1:1:1)$ → M′ $(1:2:1)$. Скласти формули цього перетворення.

10. Знайти нерухомі точки та нерухомі прямі перетворення:

$$r\ x_1' = x_1 + x_2,$$
$$r\ x_2' = 8x_1 + 3x_2,$$
$$r\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

11. Знайти проективне перетворення, при якому точка $A_1(1:0:0)$ інваріантна, а точка M лінії $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ переходить у другу точку M' перетину прямої AM з цією лінією.

12. З'ясувати проективний клас наступних ліній другого порядку, звівши квадратичні форми до нормального виду:

1) $2x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 5x_3x_1 + 3x_1x_2 = 0$;

2) $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$;

3) $4x_1^2 + 15x_2^2 - 5x_3^2 - 22x_2x_3 - 8x_3x_1 + 16x_1x_2 = 0$;

4) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1 - 4x_1x_2 = 0$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + 34x_3^2 - 6x_2x_3 - 12x_3x_1 + 4x_1x_2 = 0$;

6) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0$.

13. Довести, що коли в проективному перетворенні площини інваріантні чотири точки загального положення, то воно є тотожним перетворенням.

14. Написати формули проективного перетворення площини за координатами двох пар інваріантних точок і двох пар відповідних точок: $A(0:0:1) \to A'(a:0:1)$, $B(0:b:1) \to B'(0:0:1)$.

15. Написати формули проективного перетворення прямої за координатами трьох пар відповідних точок: $A(2:1) \to B(-2:3)$, $B \to C(0:2)$, $C \to A$.

16. Довести, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину продовжень її бокових сторін і середини її основ лежать на одній прямій (за допомогою подвійного відношення і проективних перетворень).

2.2 Гомології на проективній і на розширеній площинах

Означення. Нетотожне проективне перетворення, яке має пряму нерухомих точок, називається *гомологією*, а ця пряма – *віссю гомології*.

При розв'язування конструктивних задач нам допоможуть наступні **властивості гомології**:

1) Будь-яка пряма та її образ перетинаються в точці, яка належить осі гомології;

2) Всі прямі, які з'єднують точку з її образом в гомології, проходять через одну і ту ж саму точку, яка називається *центром гомології* (тобто, гомологія крім інваріантної прямої – осі гомології – має ще й інваріантну точку – центр гомології);

3) будь-яка пряма, що проходить через центр гомології, є нерухомою прямою;

4) подвійне відношення $(SKMM')$, де S - центр гомології, M, M' - пара відповідних точок, K - точка перетину прямої SM з віссю гомології, не залежить від вибору точки M на проективній площині. Ця стала для даної гомології величина називається *інваріантом гомології*.

З останньої властивості випливає, що **гомологія однозначно задається центром, віссю і парою відповідних точок.**

Гомології на розширеній площині можуть бути такими самими, як і на проективній площині (коли вісь і центр гомології є власними прямою і точкою), а можуть мати або невласний центр, або невласну вісь, або невласні центр і вісь одночасно. Якщо центр гомології є невласною точкою, тобто прямі, кожна з яких з'єднує точку з її образом, паралельні, то гомологія називається *спорідненням*. Якщо вісь гомології є невласною прямою, то кожна пряма то її образ паралельні. В цьому випадку гомологія є *гомотетією*. Нарешті, якщо і центр, і вісь гомології невласні, то гомологія є *паралельним переносом*.

Гомологія проективної площини називається гіперболічною гомологією, якщо центр гомології не належить осі гомології.

Гомологія проективної площини називається параболічною гомологією, якщо центр гомології належить її осі.

Гомологія – важливий вид проективних перетворень. Всяке проективне перетворення є композицією двох гомологій.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Нехай точки A і B полярно спряжені відносно невиродженої лінії другого порядку. Нехай пряма, яка проходить через точку B, перетинає цю лінію в точках P і Q, а прямі AP і AQ перетинають лінію повторно у точках R і S. Довести, що точки R, S і B належать одній прямій.

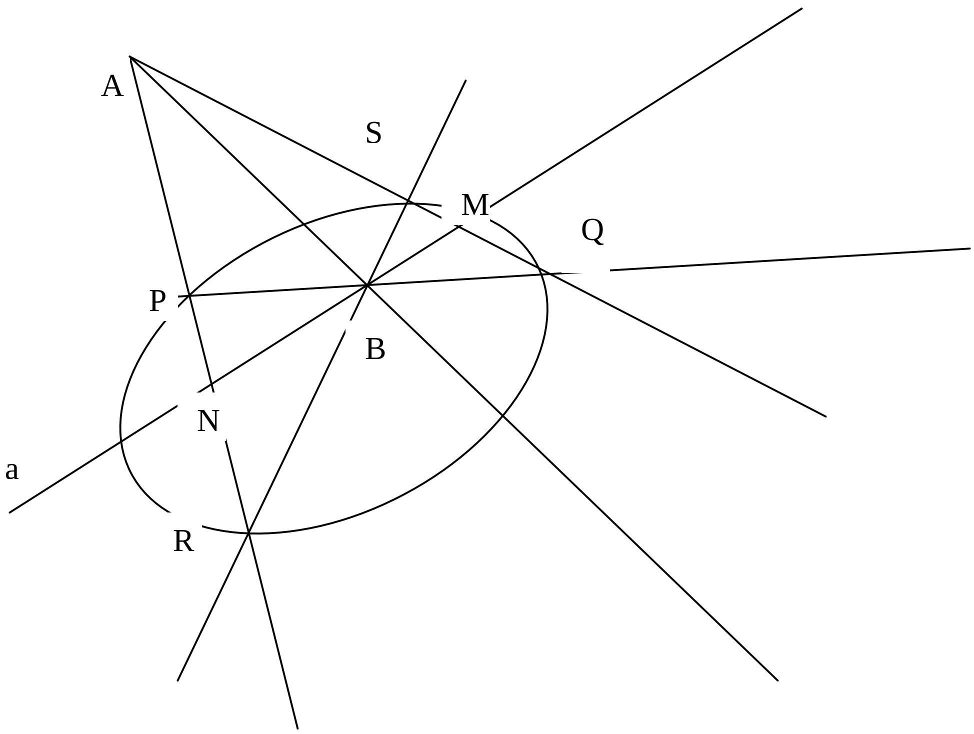


Рис. 8

Розв'язання. Розглянемо гомологію з центром A, віссю якої є поляра a точки A (рис. 8). Відомо, що кожна пряма, яка проходить через центр гомології є інваріантною. Нехай пряма AQ перетинає вісь гомології в точці M, тоді четвірка точок A, M, Q, S є гармонічною. Оскільки $(AMQS) = (AMSQ) = -1$, то в заданій гомології точки Q і S є відповідними. Аналогічно, точки P і R

відповідні в цій гомології, а точка B є інваріантною, оскільки належить осі гомології. Так як точки P, B, Q колінеарні і гомологія є проективним перетворенням, то точки R, B, S також колінеарні, що і треба було довести.

Задача 2. Довести, що проективне перетворення площини, яке переводить точки $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $E(1:1:1)$ відповідно у точки E, A_3, A_2, A_1, є гомологією.

Розв'язання. Знайдемо формули проективного перетворення, а потім його нерухомі точки. Перша пара відповідних точок дає систему рівнянь $\begin{cases} r_1 \cdot 1 = a_{11} \cdot 1, \\ r_1 \cdot 1 = a_{21} \cdot 1, \\ r_1 \cdot 1 = a_{31} \cdot 1. \end{cases}$ Ще три системи рівнянь отримаємо для трьох інших пар відповідних точок: $\begin{cases} r_2 \cdot 0 = a_{12} \cdot 1, \\ r_2 \cdot 0 = a_{22} \cdot 1, \\ r_2 \cdot 1 = a_{32} \cdot 1, \end{cases}$ $\begin{cases} r_3 \cdot 0 = a_{13} \cdot 1, \\ r_3 \cdot 1 = a_{23} \cdot 1, \\ r_3 \cdot 0 = a_{33} \cdot 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} r_4 \cdot 1 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 1, \\ r_4 \cdot 0 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 + a_{23} \cdot 1, \\ r_4 \cdot 0 = a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 1 + a_{33} \cdot 1. \end{cases}$ З перших трьох систем знайдемо невідомі a_{ij} через r_1, r_2, r_3 і підставимо в четверту систему, отримаємо $\begin{cases} r_4 = r_1, \\ 0 = r_1 + r_3, \\ 0 = r_1 + r_2, \end{cases}$ звідки $r_1 = r_4$, $r_2 = -r_4$, $r_3 = -r_4$.

Таким чином, для коефіцієнтів a_{ij} з формул проективного перетворення маємо: $a_{11} = a_{21} = a_{31} = r_4$, $a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$, $a_{32} = a_{23} = -r_4$. Підставивши їх в формули (2.1), отримаємо $\begin{array}{l} r\ x_1' = r_4 x_1, \\ r\ x_2' = r_4 x_1 - r_4 x_3, \\ r\ x_3' = r_4 x_1 - r_4 x_2. \end{array}$ Введемо позначення $\tilde{r} = \dfrac{r}{r_4}$ і запишемо остаточно: $\begin{array}{l} \tilde{r}\ x_1' = x_1, \\ \tilde{r}\ x_2' = x_1 - x_3, \\ \tilde{r}\ x_3' = x_1 - x_2. \end{array}$ Характеристичне рівняння для знаходження нерухомих точок цього перетворення має вигляд $\begin{vmatrix} 1-l & 0 & 0 \\ 1 & -l & -1 \\ 1 & -1 & -l \end{vmatrix} = 0$ або $(l+1)(l-1)^2 = 0$, звідки маємо корені: $l = -1$ першої кратності і $l = 1$ - другої кратності. Координати нерухомих точок: $A(0:1:1)$, $B(1:1:0)$, $C(1:0:1)$.

Залишилось довести, що принаймні одна з нерухомих прямих, які визначаються парами нерухомих точок є прямою нерухомих точок. Дійсно, довільна точка прямої BC має координати $(l+m, l, m)$. Легко переконатись, що при знайденому проективному перетворенні ця точка інваріантна. За означенням це перетворення є гомологією.

Задача 3. Гомологія задана віссю s, центром S та парою відповідних точок A і A'. Побудувати образ та прообраз точки M при цій гомології.

Розв’язання. Скористаємось властивостями гомології, за якими шукана точка M' - образ даної точки M - належить двом прямим: прямій SM і прямій $A'K$, де $K = AM \cap s$ (рис. 9).

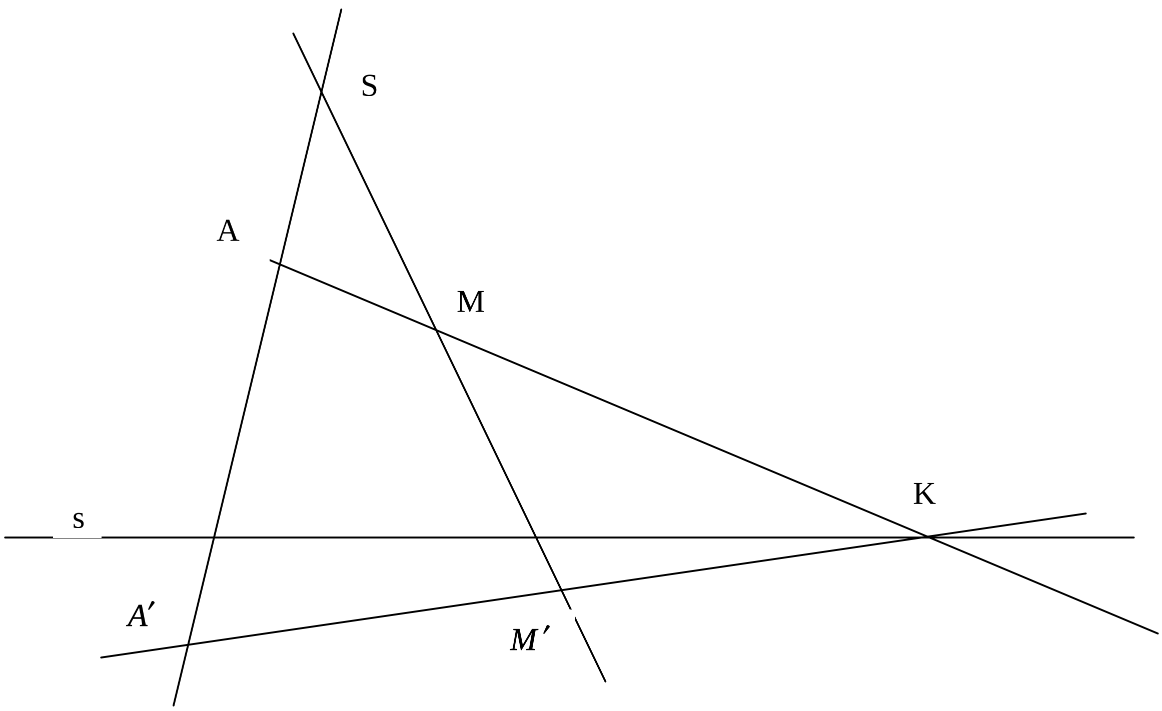


Рис. 9

Як побудувати прообраз точки M ясно із рис. 10. Для зручності ми саму точку M позначили символом N', а її прообраз – символом N.

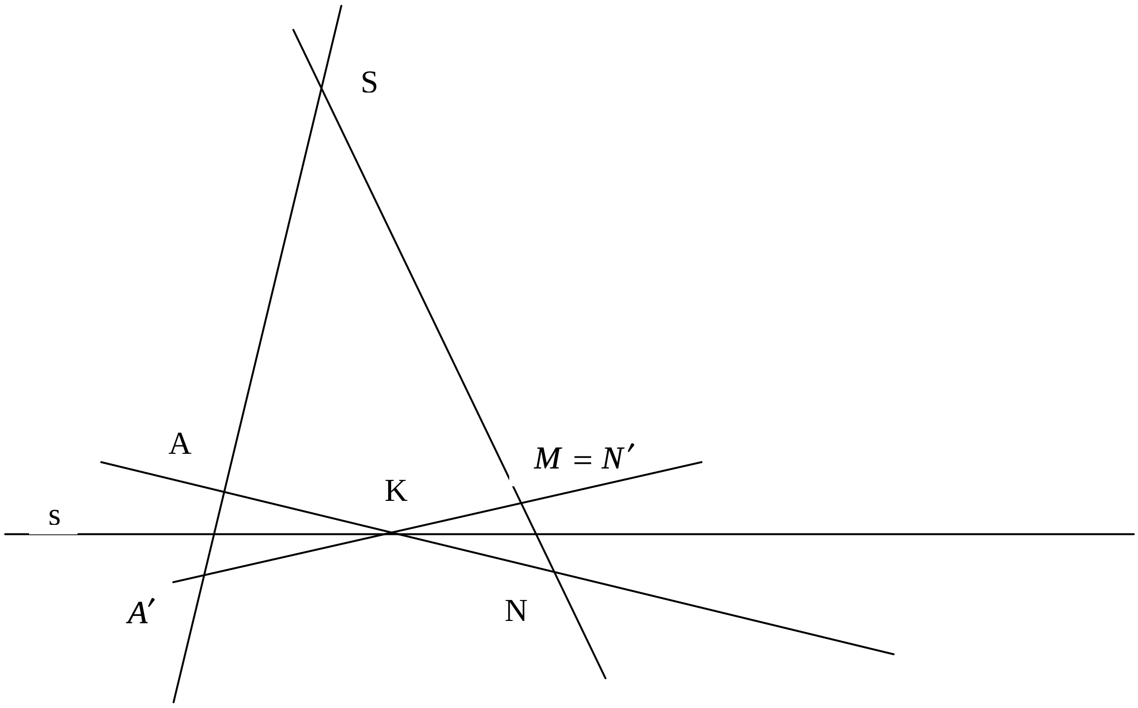


Рис. 10

Задача 4. Гомологія розширеної площини задана центром S, віссю s та парою відповідних точок A і A'. Побудувати образ невласної прямої при цій гомології.

Розв'язання. Перш за все треба зрозуміти, як задати невласну пряму. Згадаємо, що на кожній прямій розширеної площини існує єдина невласна точка, а також, що будь-яка невласна точка належить кожній з прямих пучка паралельних прямих. Отже, невласна пряма може бути задана двома непаралельними прямими розширеної площини. Позначимо ці прямі символами p і q, а їх невласні точки – символами X_∞ і Y_∞ відповідно. Достатньо побудувати образи X і Y цих двох точок. Для цього скористаємося властивостями гомології. Точка X повинна належати прямій SX_∞ і прямій $A'K$, де $K = AX_\infty \cap s$ (прямі SX_∞ і AX_∞ паралельні прямій p). Аналогічно будуємо точку Y (рис. 11).

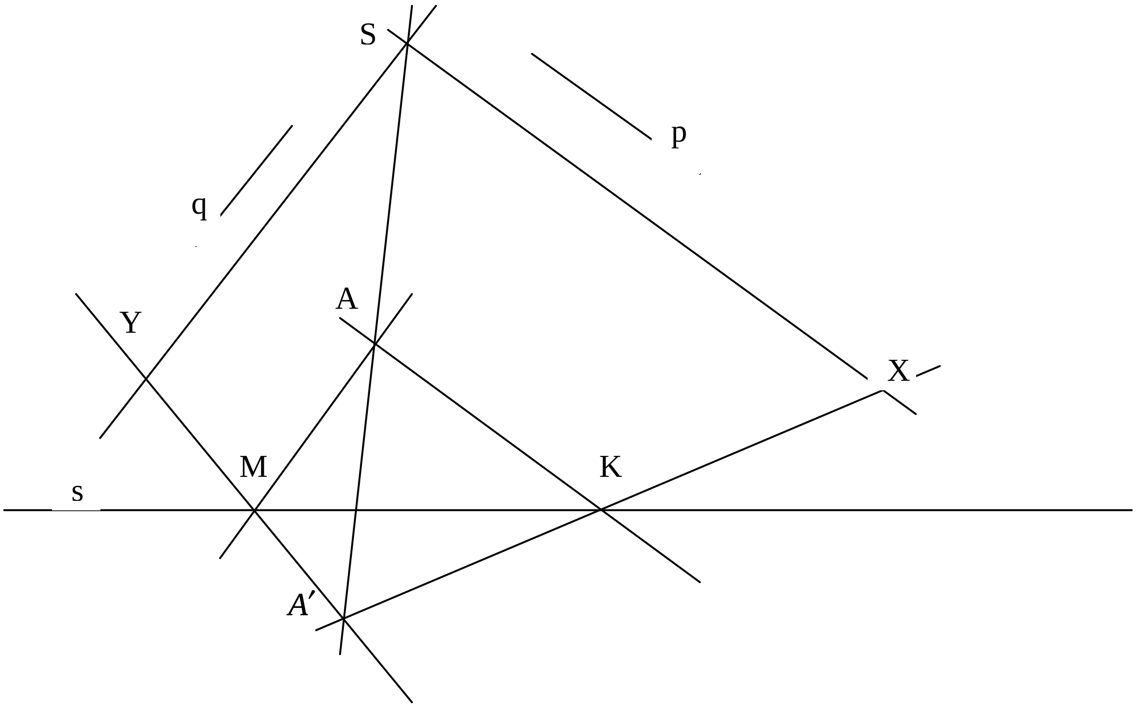


Рис. 11

Завдання для самостійної роботи

1. Гомологія j задана центром S, віссю s та точками A і $A' = j(A)$. Побудувати:

1) точку $j(B)$, де B – дана точка прямої AA';

2) точку $j^{-1}(M)$, де M – дана точка;

3) точку $j^{2}(N)$, де N - дана точка.

2. Гомологія j задана центром S, віссю s та точками A і $A' = j(A)$. Побудувати образ і прообраз даної прямої l.

3. Гомологія j задана центром S, віссю s та точками A і $A' = j(A)$. На даній прямій p знайти точку X, образ якої належить даній прямій $q(q \neq j(r))$.

4. Гомологія j на розширеній площині задана центром S, віссю s та точками A і $A' = j(A)$. Задані точки і пряма є власними. Побудувати прообрази двох даних паралельних прямих r і q.

5. Гомологія j на розширеній площині задана центром S, віссю s та точками A і $A' = j(A)$. Задані точки і пряма є власними. Побудувати прообраз невласної прямої.

6. Показати, що образом невласної точки при гомології не може бути невласна точка.

7. На площині задано гомологію. Побудувати пару гомологічних точок: а) на парі гомологічних прямих; б) на парі негомологічних прямих.

8. Гомологія задана віссю , центром та парою відповідних точок. Дано дві прямі p і q. На прямій p побудувати точку, образ якої належить прямій q.

9. На розширеній площині провести пряму через дві недоступні точки, кожна з яких задана парою доступних прямих.

10. Проективне перетворення задане формулами
$$\begin{aligned} r\, x_1' &= x_2 - x_3, \\ r\, x_2' &= x_1 + x_3, \\ r\, x_3' &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$
Показати, що воно є гомологією, знайти її центр і вісь.

11. Показати, що проективне перетворення, задане формулами
$$\begin{aligned} r\, x_1' &= ax_1 + cx_3, \\ r\, x_2' &= ax_2 + dx_3, \\ r\, x_3' &= bx_3, \end{aligned}$$
де $ab \neq 0,\ \ a \neq b$, є гіперболічною гомологією. Знайти інваріант цієї гомології.

2.3 Завдання для тестування за матеріалами розділу 2

1. Якій з прямих належить образ точки $A(1:-1:2)$ при перетворенні

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

$a(1:-5:1)$	$b(0:-1:3)$	$c(1:2:3)$	$d(-1:-1:1)$

2. Скільки існує проективних перетворень площини, які відображають множину з чотирьох точок загального положення на себе?

А)	Б)	С)	Д)
1	4	16	Безліч

3. Яка з точок є нерухомою при перетворенні $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 8x_1 + 3x_2, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$?

$A(1:-1:3)$	$B(0:0:1)$	$C(1:2:3)$	ніяка

4. Яка з прямих a, b, c, d є нерухомою при перетворенні $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 8x_1 + 3x_2, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$?

$a(2:-3:1)$	$b(0:-1:3)$	$c(2:1:0)$	$d(-1:-1:1)$

5. Дано пряму $x_2 + x_3 = 0$ і гомологію з віссю $x_1 = 0$. Образ даної прямої перетинає вісь гомології в точці

А)	Б)	С)	Д)
$(0:3:1)$	$(0:1:1)$	$(0:1:0)$	$(0:1:-1)$

6. Дано гомологію з інваріантом -1. Як розташовані точки зі своїми образами відповідно осі гомології?

А)	Б)	С)	Д)
в одній напівплощині з центром	центр в одній напівплощині, а точки – в іншій	в різних напівплощинах	на осі гомології

7. Центр гомології з інваріантом -1 є невласною точкою. Точки M і M' відповідні. Пряма MM' перетинає вісь гомології в точці K. Тоді

А)	Б)	С)	Д)
$MK = KM'$	$MM' = M'K$	$MK = 2KM'$	K - невласна точка прямої MM'

8. Дано точку $M(0:1:1)$ і гомологію з центром $S(1:0:0)$. Образ точки M належить прямій

$a(0:-3:1)$	$b(0:1:1)$	$c(1:0:0)$	$d(0:-1:1)$

Питання для самоконтролю:

1. Означення проективного перетворення проективної площини.
2. Теорема про завдання проективного перетворення.
3. Означення гомології.
4. Властивості гомології.
5. Означення нерухомої точки проективного перетворення.
6. Формули проективного перетворення.
7. Гомології на розширеній площині.

3. Деякі важливі теореми проективної геометрії та їх застосування

3.1Пряма і обернена теореми Дезарга на проективній і розширеній площинах

Означення. *Тривершинником* на проективній площині називається фігура, яка складається з трьох неколінеарних точок і трьох прямих, які з'єднують ці точки попарно.

Теорема (Дезарга). Якщо прямі AA_1, BB_1, CC_1, які інцидентні відповідним вершинам двох тривершинників ABC і $A_1B_1C_1$, інцидентні одній точці S, то відповідні сторони цих тривершинників інцидентні точкам M, N, K, які інцидентні одній прямій (рис. 12).

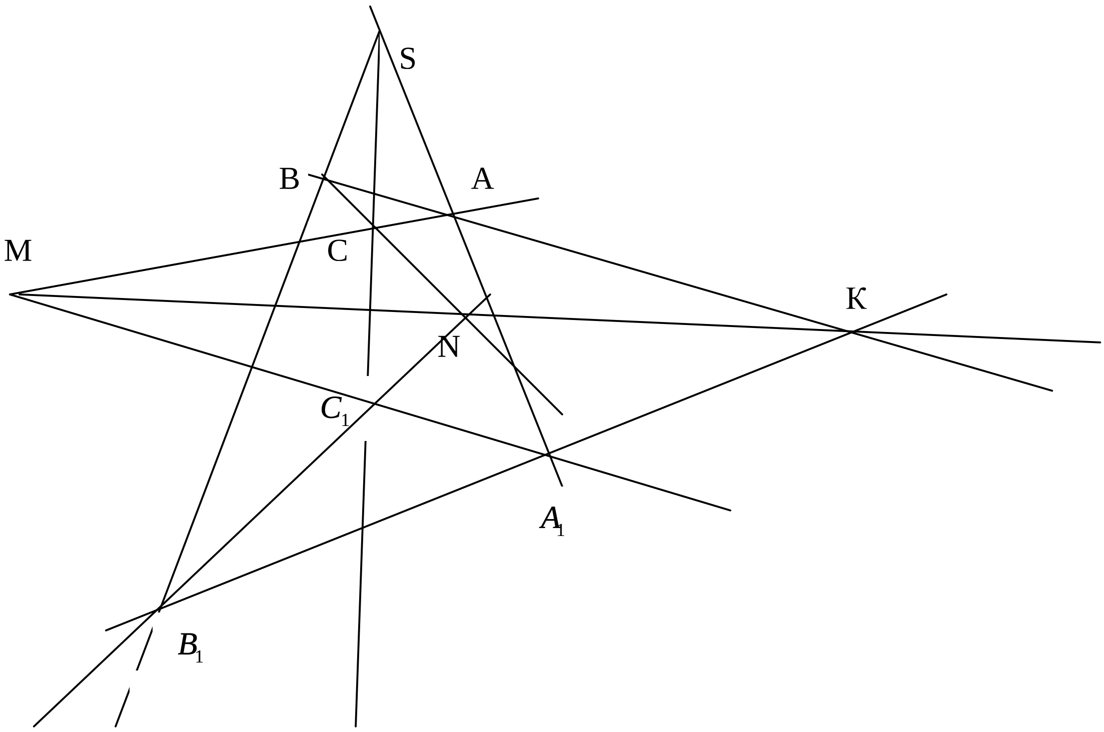


Рис. 12

Конфігурація, зображена на рис. 12, називається дезарговою. В ній 10 рівноправних точок і 10 рівноправних прямих в тому сенсі, що коли вибрати будь-яку точку за дезаргову, то для неї однозначно знайдеться пара тривершинників, які задовольняють теорему Дезарга.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ з конфігурації Дезарга називають ще *гомологічними*. Дійсно, якщо дезаргову точку (точку S) і дезаргову пряму (пряму MK) прийняти відповідно за центр і вісь гомології, то ці трикутники будуть в цій гомології відповідними.

За принципом двоїстості буде також вірним твердження:

Якщо точки, які інцидентні відповідним сторонам двох тривершинників, інцидентні одній прямій, то відповідні вершини цих тривершинників інцидентні прямим, які інцидентні одній точці.

Це твердження є **оберненою теоремою Дезарга**.

Теорема Дезарга має місце і на розширеній площині, але в цьому випадку деякі елементи конфігурації Дезарга можуть бути невласними.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. На кресленні обмеженого розміру задана точка A і пара прямих p і q, які перетинаються поза кресленням у точці S (недоступній точці). Скориставшись теоремою Дезарга, побудувати доступну частину прямої AS.

Розв'язання. Потрібно відновити конфігурацію Дезарга. Очевидно, деякі елементи цієї конфігурації можна вибрати довільним чином. Нижче наведено послідовність побудов: 1) $B \in p$, 2) $C \in q$, 3) $K \in AB$, 4) $N \in BC$, 5) $P \in p$, 6) $Q = q \cap NP$, 7) $M = AC \cap KN$, 8) $R = MQ \cap KP$, 9) AR - шукана (рис. 13).

Дійсно, трикутники ABC і PQR задовольняють умовам оберненої теореми Дезарга, а тому прямі, що сполучають їх відповідні вершини проходять через одну точку, тобто пряма AR проходить через точку S, в якій за межами креслення перетинаються дані прямі p і q.

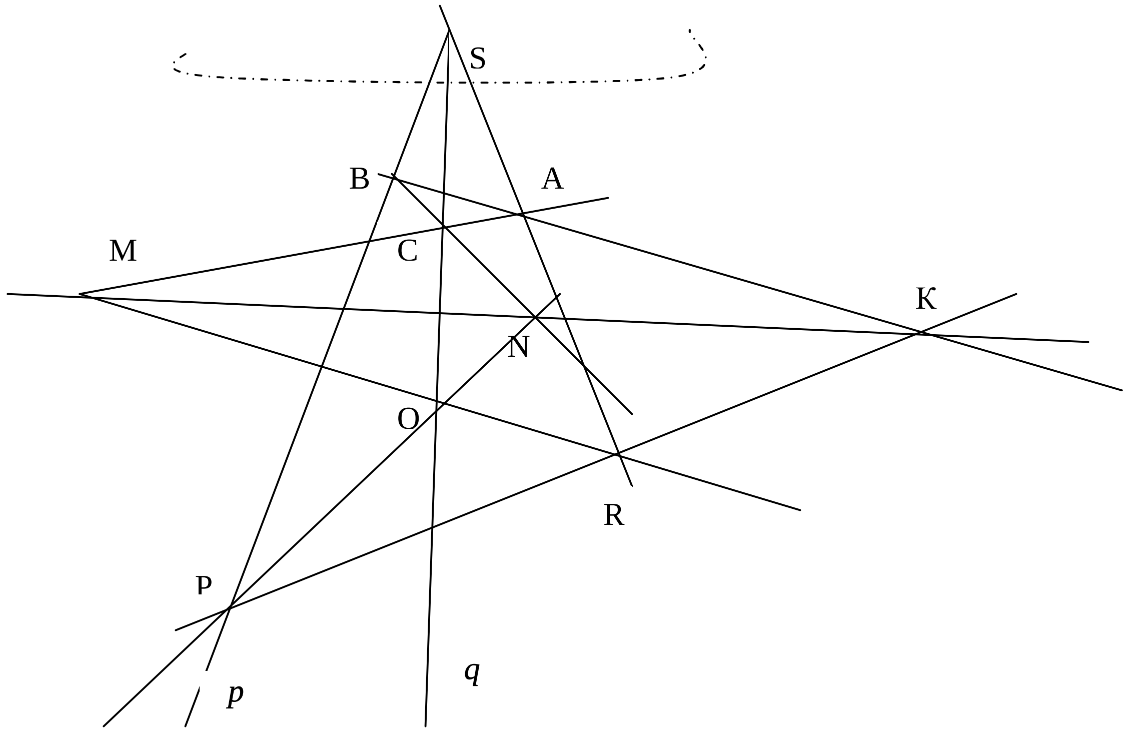


Рис. 13

Задача 2. На розширеній площині дано два трикутники ABC та DBC, які перетинаються трьома паралельними прямими $p, q, r = (AD)$; $p \mathbf{I} (AB) = M$, $p \mathbf{I} (DB) = P$, $q \mathbf{I} (AC) = N$, $q \mathbf{I} (DC) = Q$ (рис. 14). Довести що прямі $(MN), (PQ), (BC)$ належать одному пучку.

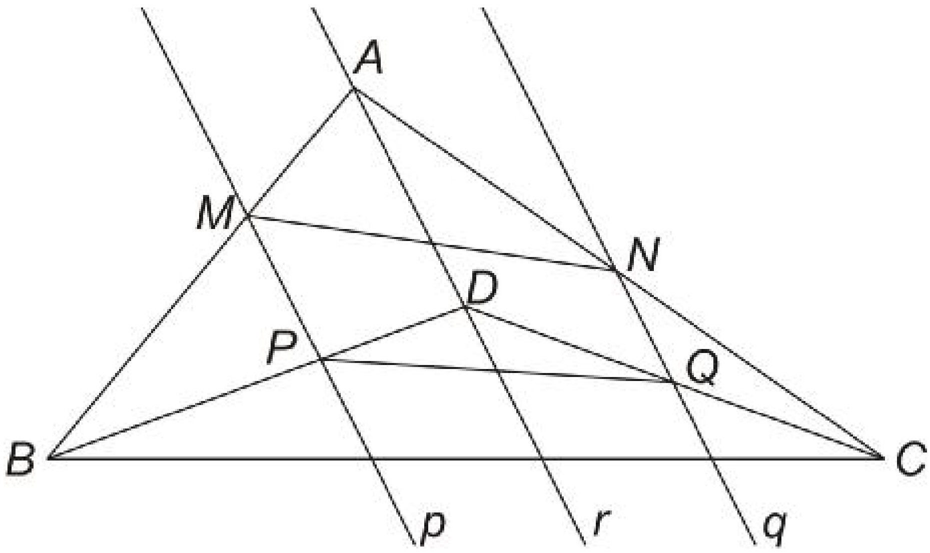


Рис. 14

Розв'язання. Розглянемо трикутники NCQ і MBP. Так як точки A і D перетину відповідних сторін NC, MB і QC, PB належать прямій, паралельній прямим q, p, що містять третю пару відповідних сторін цих трикутників, то трикутники задовольняють обернену теорему Дезарга. За цією теоремою прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників, тобто прямі NM, CB, QP належать одному пучку. Оскільки ми розв'язуємо задачу на розширеній площині, то прямі NM, CB, QP або перетинаються в одній точці, або паралельні.

Задача 3. На розширеній площині за допомогою однієї лінійки через дану точку A провести пряму, паралельну двом заданим паралельним прямим p та q $(p \neq q)$.

Розв'язання. Відновимо конфігурацію Дезарга, в якій одна з даних прямих буде дезарговою, друга міститиме сторону одного із дезаргових трикутників, а відповідна їй сторона другого трикутника містить дану точку, і є шуканою прямою. Послідовність побудов представлено на рисунку номерами прямих: 1,2,3,4,5,6,7, причому прямі 1,5,7 проводимо через точку A. Пряма 7 є шуканою (рис.15). Дійсно, пряма q є дезарговою, прямі p,3,4 утворюють один з дезаргових тривершинників, а прямі 5,6,7 - другий. Точки перетину відповідних сторін 3,6 і 4,5 цих тривершинників належать прямій q - дезарговій прямій. Прямі p і q паралельні за умовою, або, інакше, перетинаються в невласній точці. Відповідна стороні p одного тривершинника сторона іншого тривершинника повинна містити цю невласну точку, а це можливо лише тоді, коли ця пряма паралельна p.

Зауважимо, що цю задачу ми вже зустрічали в розділі 1.2, де її розв'язання можна було обґрунтувати властивостями повного чотиривершинника, а точніше, властивістю трапеції, яку було доведено в задачі 5 розділу 1.2. В цьому розділі ми отримали нову можливість - теорему Дезарга – для розв'язання цієї задачі.

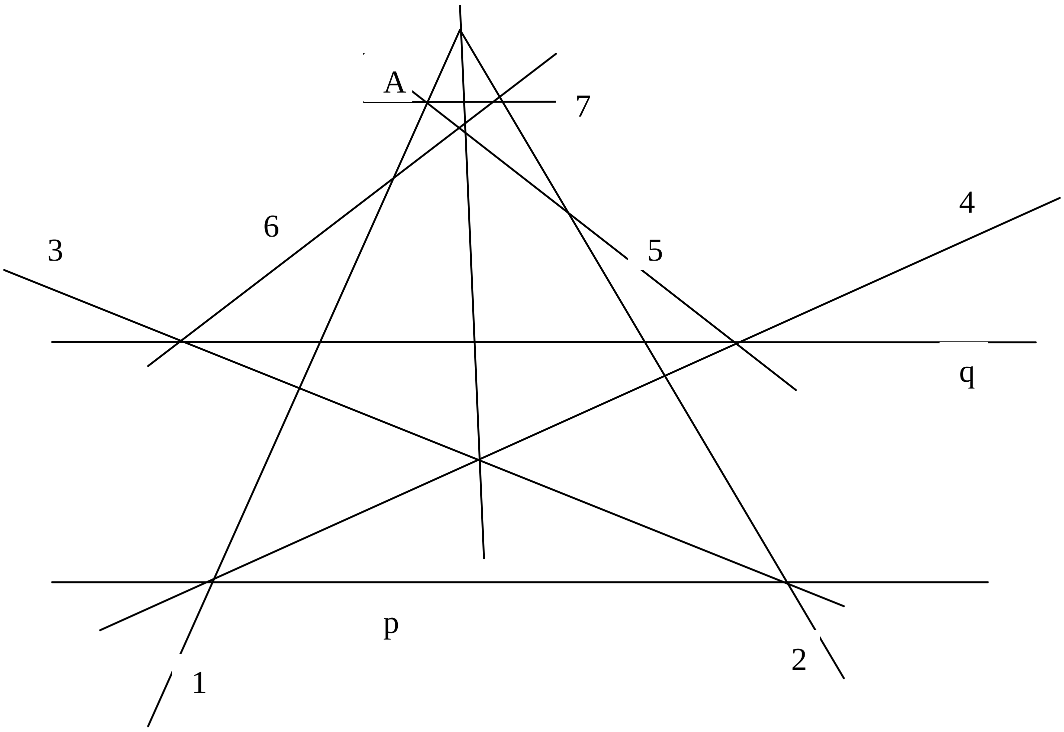


Рис. 15

Задача 4. В площині трикутника $A_1A_2A_3$ дані точки M і N. Прямі A_iM перетинають протилежні до них сторони трикутника $A_1A_2A_3$ відповідно у точках $M_i (i = 1,2,3)$. Прямі A_iN перетинають відповідні сторони трикутника $M_1M_2M_3$ в точках P_i. Довести, що прямі M_iP_i перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Введемо проективну систему координат за допомогою репера $R = (A_1, A_2, A_3, N)$ (рис. 16).

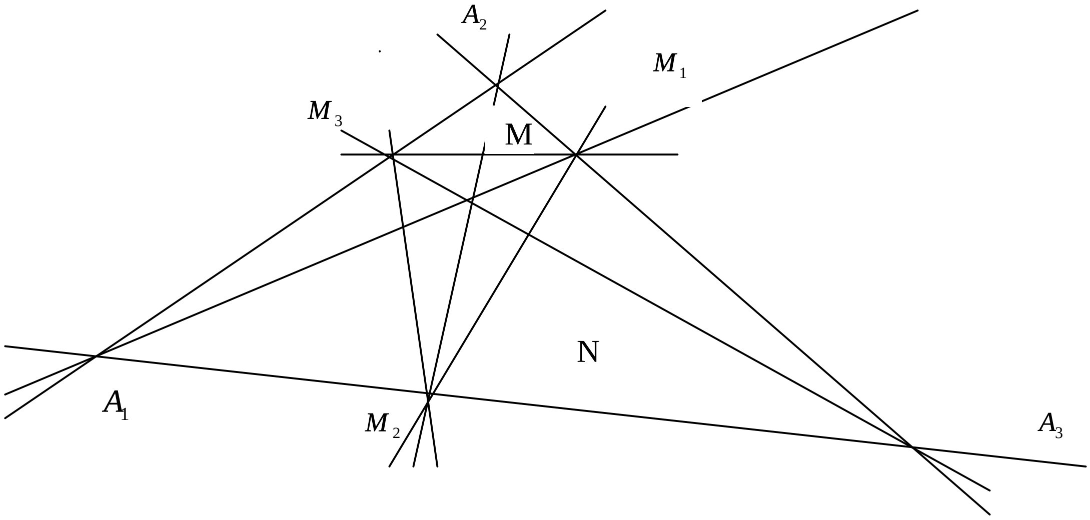


Рис. 16

Відносно цього репера точка M має координати (x_1, x_2, x_3), а координати прямих A_iM мають вигляд: $A_1M(0 : x_3 : -x_2)$, $A_2M(-x_3 : 0 : x_1)$, $A_3M(x_2 : -x_1 : 0)$. Знайдемо координати точок $M_i\,(i = 1,2,3)$ перетину сторін координатного трикутника з прямими A_iM: $M_1(0 : x_2 : x_3)$, $M_2(x_1 : 0 : x_3)$, $M_3(x_1 : x_2 : 0)$. Далі, за парами точок знайдемо координати прямих $M_1M_2(x_2x_3, x_1x_3, -x_2x_1)$, $M_1M_3(x_2x_3, -x_1x_3, x_2x_1)$, $M_3M_2(-x_2x_3, x_1x_3, x_2x_1)$, $A_1N(0,-1,1)$, $A_2N(-1,0,1)$, $A_3N(-1,1,0)$. За умовою $P_i = A_iN \cap M_jM_k$, тому $P_1(x_1x_3 + x_1x_2, x_2x_3, x_2x_3)$, $P_2(x_1x_3, x_1x_2 + x_2x_3, x_1x_3)$, $P_3(x_1x_2, x_1x_2, x_2x_3 + x_1x_3)$. Залишилось знайти координати прямих M_iP_i і переконатись, що вони належать одному пучку. Маємо

$M_1P_1(x_2x_3^2 - x_2^2x_3 : -x_1x_3^2 - x_1x_2x_3 : x_1x_2x_3 + x_1x_2^2)$,

$M_2P_2(x_2x_3^2 + x_1x_2x_3 : -x_1x_3^2 + x_1^2x_2 : -x_1x_2x_3 - x_2x_1^2)$,

$M_3P_3(-x_3x_2^2 - x_1x_2x_3 : x_1x_2x_3 + x_1^2x_3 : -x_1^2x_2 + x_1x_2^2)$. Підставимо в формулу (1.4), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x_2x_3^2 - x_2^2x_3 & -x_1x_3^2 - x_1x_2x_3 & x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 \\ x_2x_3^2 + x_1x_2x_3 & -x_1x_3^2 + x_1^2x_2 & -x_1x_2x_3 - x_2x_1^2 \\ -x_3x_2^2 - x_1x_2x_3 & x_1x_2x_3 + x_3x_1^2 & -x_2x_1^2 + x_2^2x_1 \end{vmatrix} = x_1^2x_2^2x_3^2 \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & -x_3 - x_2 & x_3 + x_2 \\ x_3 + x_1 & -x_3 + x_1 & -x_3 - x_1 \\ -x_2 - x_1 & x_2 + x_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0$$

Завдання для самостійної роботи

1. Довести теорему Дезарга. Довести обернену теорему Дезарга, не використовуючи принцип двоїстості.

2. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані в площині так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці S, а прямі AB_1, BC_1, CA_1 перетинаються в одній точці S_1. Довести, що прямі AC_1, BA_1, CB_1 також перетинаються в одній точці.

3. Задані паралелограм, пряма m та точка A. За допомогою однієї лінійки через точку A провести пряму, паралельну прямій m. Розглянути випадки: а) точка A не належить жодній з прямих, які містять сторони паралелограма; б) точка A належить одній з прямих, які містять сторони паралелограма.

4. Дано трапецію $ABCD$, яку перетинають прямі p та q, паралельні основі (AB), $p \cap (AB) = M$, $p \cap (AC) = P$, $q \cap (AB) = N$, $q \cap (BC) = Q$. Довести, що точка перетину прямих (MN) і (PQ) належить прямій (AB).

5. Довести, що якщо прямі $(AA^{'}), (BB^{'}), (CC^{'})$, що з'єднують вершини двох трикутників ABC і $A^{'}B^{'}C^{'}$, паралельні і точки $(AB) \cap (A^{'}B^{'}), (BC) \cap (B^{'}C^{'}), (AC) \cap (A^{'}C^{'})$ існують, то ці точки належать одній прямій. Якщо $(AB) \parallel (A^{'}B^{'}), (BC) \cap (B^{'}C^{'}) = M, (AC) \cap (A^{'}C^{'}) = N$, то $(MN) \parallel (AB)$. Якщо $(AB) \parallel (A^{'}B^{'}), (BC) \parallel (B^{'}C^{'})$, то $(AC) \parallel (A^{'}C^{'})$.

6. Дано трикутник ABC і точка M. Прямі $(AM), (BM), (CM)$ перетинають протилежні сторони в точках $A^{'}, B^{'}, C^{'}$. Довести, що точки A^0, B^0, C^0 такі, що $BC \cap (B'C') = A^0$, $AC \cap (A'C') = B^0$, $BA \cap (B'A') = C^0$ належать одній прямій. Знайти рівняння цієї прямої відносно репера $R = (A, B, C, M)$.

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

7. На розширеній площині протилежні вершини одного паралелограма розташовані відповідно на протилежних сторонах другого. Довести, що обидва паралелограма мають спільний центр симетрії.

8. Провести пряму через дві недоступні точки, кожна з яких задана парою доступних прямих.

9. Провести пряму через доступну точку і недоступну точку перетину двох прямих.

10. На конфігурації Дезарга на рис.12 знайти пару дезаргових трикутників і дезаргову пряму, якщо за дезаргову точку вибрано точку P.

11. На конфігурації Дезарга на рис.12 знайти пару дезаргових трикутників і дезаргову пряму, якщо за дезаргову точку вибрано точку $B^{'}$.

3.2 Пряма і обернена теореми Паскаля на проективній і розширеній площинах

Теорема (Паскаля). Якщо шестикутник є вписаним у криву другого порядку, то точки перетину протилежних сторін шестикутника належать одній прямій.

Протилежними вважаються будь-які дві сторони шестикутника, які розділені двома його сторонами.

Обернена теорема Паскаля. Якщо точки перетину протилежних сторін шестикутника належать одній прямій, то цей шестикутник є вписаним в деяку криву другого порядку.

Якщо вважати деякі вершини шестикутника такими, що співпали по 2, то можна отримати п'ятикутник, чотирикутник, трикутник. Теорема Паскаля залишається при цьому справедливою. Потрібно лише враховувати, що сторона (пряма), яка проходить через вершини, які співпали, є дотичною до кривої. Тому зміниться лише формулювання теореми Паскаля.

1.*У всякому п'ятикутнику, вписаному в криву другого порядку, точки перетину двох пар несуміжних сторін і точка перетину п'ятої сторони з дотичною в протилежній вершині належать одній прямій.*

2 .*У всякому чотирикутнику, вписаному в криву другого порядку, дві пари протилежних сторін і дотичні в протилежних вершинах перетинаються в точках, які належать одній прямій.*

3*. У всякому трикутнику, вписаному в криву другого порядку, точки перетину сторін з дотичними, проведеними в протилежних вершинах, належать одній прямій.*

Справедливі також обернені теореми.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дано шість точок овальної кривої другого порядку. Скільки існує прямих Паскаля для шестикутника, вершинами якого є дані точки?

Розв'язання. Позначимо вершини шестикутника їх порядковим номером, тобто символами $1,2,3,4,5,6$. Очевидно, від порядку запису вершин залежить те, які сторони ми будемо вважати протилежними. Всі можливі перестановки в цій множині дорівнюють числу $6!$, але всі кругові перестановки однієї і тієї ж перестановки дають один і той же набір пар протилежних сторін, а значить і одну і ту ж пряму Паскаля. Для кожної перестановки можна отримати ще 5 за допомогою кругової перестановки елементів. Крім того, кожні дві шестірки a,b,c,d,e,f і b,a,f,e,d,c дають один і той же набір пар протилежних сторін, але не можуть бути отримані одна із другої за допомогою кругової перестановки елементів. Загальне число N прямих Паскаля для даних шести точок кривої другого порядку дорівнює $6!:6:2$, тобто $N=60$.

Задача 2. У всякому трикутнику, вписаному в криву другого порядку, точки перетину сторін з дотичними, проведеними в протилежних вершинах, належать одній прямій.

Розв'язання. Це твердження є теоремою Паскаля для трикутника. Наведемо його аналітичне доведення. Виберемо систему координат так, щоб даний трикутник був координатним, тобто щоб $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$. Позначимо дотичні в вершинах A_i символами p_i. Тоді за формулою (1.7) отримаємо $p_1: a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$, $p_2: a_{12}x_1 + a_{32}x_3 = 0$, $p_3: a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0$. Треба знайти координати точок перетину сторін трикутника з дотичними в протилежних вершинах. Для цього необхідно розв'язати системи рівнянь: $\begin{cases} a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{12}x_1 + a_{32}x_3 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Відповідно отримаємо $P(0:a_{31}:-a_{21})$,

$Q(-a_{32}:0:a_{21})$, $R(a_{23}:-a_{31}:0)$. Неважко переконатись в тому, що для точок P, Q, R виконується умова (1.3), тобто $\begin{vmatrix} 0 & a_{31} & -a_{21} \\ -a_{32} & 0 & a_{21} \\ a_{23} & -a_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Овальна крива другого порядку задана п'ятьма своїми точками. Побудувати:

   1) дотичну в одній з даних точок;

   2) ще одну точку кривої;

   3) дотичну в побудованій точці.

2. Дано чотири точки овальної кривої другого порядку та дотична в одній з них. Побудувати:

   1) дотичну в одній з даних точок;

   2) ще одну точку кривої.

3. Дано три точки овальної кривої другого порядку та дотичні в двох з них. Побудувати:

   1) дотичну в третій точці;

   2) ще одну точку кривої.

4. Дано точку, яка не належить кривій другого порядку. Побудувати її поляру відносно цієї кривої.

5. Дано пряму і криву другого порядку. Побудувати її полюс відносно цієї кривої.

6. Із даної точки провести до даної кривої другого порядку дотичну, користуючись лише однією лінійкою.

7. Довести теорему: якщо на розширеній евклідовій площини дано трикутник, вписаний в коло, то точки перетину прямих, які з'єднують сторони трикутника з дотичними у протилежних вершинах, належать одній прямій.

3.3 Пряма і обернена теореми Бріаншона на проективній і розширеній площинах

Теорема (Бріаншона). В довільному шестикутнику, описаному навколо кривої другого порядку, прямі, які з'єднують протилежні вершини шестикутника, перетинаються в одній точці.

Обернена теорема Бріаншона. Якщо прямі, які з'єднують протилежні вершини шестикутника, перетинаються в одній точці, то цей шестикутних є описаним навколо деякої кривої другого порядку.

Теорему Бріаншона можна застосовувати до п'ятикутника, чотирикутника, трикутника, якщо вважати їх виродженими шестикутниками. Тоді, вершина, що є точкою перетину суміжних сторін, які співпали, буде точкою дотикання.

Одержимо наступні теореми:

1. *У всякому п'ятикутнику, описаному навколо кривої другого порядку, прямі, що з'єднують дві пари несуміжних вершин і пряма, що з'єднує п'яту вершину з точкою дотикання протилежної сторони, перетинаються в одній точці.*

2. *У всякому чотирикутнику, описаному навколо кривої другого порядку, прямі, що з'єднують точки дотикання протилежних сторін, проходять через точку перетину діагоналей.*

3. *У всякому трикутнику, описаному навколо кривої другого порядку, прямі, що з'єднують вершини трикутника з точками дотикання протилежних сторін, перетинаються в одній точці.*

Завдання для самостійної роботи

1. Дано шість дотичних до овальної кривої другого порядку. Скільки існує точок Бріаншона для шестисторонників, сторонами яких є дані прямі?

2. Довести, що шість вершин двох трикутників, описаних навколо овальної кривої другого порядку, які не мають спільних сторін, належать одній кривій другого порядку.

3. Овальна крива другого порядку задана п’ятьма дотичними до неї. Побудувати:

1) ще одну дотичну;

2) будь-яку точку даної кривої.

4. Дано чотири дотичні до овальної кривої другого порядку і точка дотикання однієї з них. Побудувати:

1) ще одну дотичну;

2) ще одну точку даної кривої.

5. Дано п’ятикутник, описаний навколо кривої другого порядку. Побудувати точки дотикання сторін цього п’ятикутника до кривої.

6. Дано три дотичні до кривої другого порядку і точки дотикання двох із них. Побудувати:

1) точку дотикання третьої дотичної;

2) будь-яку четверту дотичну.

7. Довести теорему: якщо коло вписане в трикутник, то прямі, які з’єднують вершини трикутника з точками дотикання протилежних сторін, проходять через одну точку.

8. В овальну криву другого порядку вписані два трикутника без спільних вершин. Довести, що шість прямих, яким належать їх сторони, дотикаються однієї кривої другого порядку.

3.4 Завдання для тестування за матеріалами розділу 3

1. Якщо B - дезаргова точка на рис.12, то дезарговими будуть трикутники

А)	Б)	С)	Д)
CAS і NKB_1	CNC_1 і AMA_1	CMC_1 і AKA_1	CNC_1 і AKA_1

2. Для дезаргових трикутників відносно точки B із теста 1 дезарговою прямою є пряма

А)	Б)	С)	Д)
C_1A_1	KB_1	NB_1	SB_1

3. Позначимо $B_0 = B_1B \cap MN$, $C_0 = C_1C \cap MN$, $A_0 = A_1A \cap MN$. Має місце відповідність

А)	Б)	С)	Д)
$(SBB_0B_1) = (SAA_0A_1)$	$(SBB_0B_1) \neq (SCC_0C_1)$	$(SBB_0B_1) = \dfrac{1}{(SAA_0A_1)}$	жодна

4. На кривій другого порядку вибрано послідовно шість точок: 1,2,3,4,5,6. Прийняті наступні позначення: $(12) \cap (34) = A$, $(13) \cap (26) = B$, $(32) \cap (56) = C$, $(65) \cap (34) = D$, $(42) \cap (51) = E$, $(16) \cap (34) = F$. Для шестикутника 134265 прямою Паскаля є пряма, яка містить точки

А)	Б)	С)	Д)
B, C, A	B, F, A	Жодна	B, D, E

5. На розширеній площині трикутник вписано у криву другого порядку. Відомо, що дві прямі, які містять сторони трикутника, паралельні дотичним до кривої у протилежних вершинах трикутника. Пряма, яка містить третю сторону трикутника і дотична до кривої в протилежній вершині

А)	Б)	С)	Д)
перетинаються	паралельні	немає вірної відповіді	мимобіжні

Питання для самоконтролю:

1. Означення тривершинника.
2. Пряма і обернена теореми Дезарга.
3. Поняття про конфігурацію Дезарга.
4. Пряма і обернена теореми Паскаля і Бріаншона.
5. Теореми Паскаля і Бріаншона для вироджених шестикутників.

4. Афінна та евклідова геометрії з проективної точки зору

4.1 Проективно-афінна площина і основні афінні інваріанти

Відому нам з аналітичної геометрії афінну геометрію можна розглядати як частинний випадок проективної геометрії, тому що група афінних перетворень є підгрупою групи проективних перетворень. Нагадаємо, що проективну площину можна отримати із звичайної афінної площини, доповнюючи її однією прямою – невласною прямою. Ми називали таку проективну площину розширеною площиною. Тепер перед нами стоїть обернена задача – отримати афінну площину із проективної. Для цього із проективної площини не вирізають пряму, як природно було б запропонувати, а фіксують одну пряму і називають її невласною прямою. Така несподівана пропозиція відображається і на термінології, в якій весь час буде підкреслюватися той факт, що ми залишаємось на проективній площині, але тепер не вважаємо рівноправними всі точки і всі прямі цієї площини.

Означення. Проективна площина називається проективно-афінною площиною, якщо на ній фіксована деяка пряма w, яка називається невласною прямою.

Означення. Проективні перетворення проективної площини називаються проективно-афінними перетвореннями проективно-афінної площини, якщо кожне з них відображає невласну пряму на себе.

Теорема. Будь-яке проективно-афінне перетворення кожну власну точку проективно-афінної площини відображає на власну точку цієї ж площини.

Зауваження. Обмеження проективно-афінного перетворення на множину власних точок буде звичайним афінним перетворенням, яке в афінних координатах запишеться формулами $\begin{matrix} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 + c_2, \end{matrix}$ відомими з аналітичної геометрії.

Означення. Дві прямі проективно-афінної площини називаються паралельними, якщо вони перетинаються на невласній прямій w.

Одним із головних інваріантів афінної геометрії є просте відношення трьох точок однієї прямої. Так називається число $(ABC)=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Нехай на проективно-афінній площині пряма, якій належать власні точки A,B,C, перетинає невласну пряму w в точці D_∞.Якщо систему координат вибрано так, що рівняння прямої w має вигляд $x_3=0$, то $(ABCD_\infty)=(ABC)$.

Означення. *Простим відношенням трьох точок* A,B,C *прямої* на проективно-афінній площині називається подвійне відношення $(ABCD_\infty)$, де четверта точка є точкою перетину цієї прямої з прямою w.

З цього означення випливає, що просте відношення трьох точок прямої В частинному випадку, коли точка C є серединою відрізка AB прямої на проективно-афінній прямій, то $(ABCD_\infty)=-(ABC)=-1$.

Формули (1.5) у афінних координатах набудуть вигляду

$(ABCD)=\dfrac{(x_C-x_A)(x_D-x_B)}{(x_C-x_B)(x_D-x_A)}$ або $(ABCD)=\dfrac{(y_C-y_A)(y_D-y_B)}{(y_C-y_B)(y_D-y_A)}$.

$$(abcd)=\frac{(k_c-k_a)(k_d-k_b)}{(k_c-k_b)(k_d-k_a)} \qquad (4.1)$$

Теорема Дезарга має місце і на розширеній площині, але в цьому випадку деякі елементи конфігурації Дезарга можуть бути невласними. Ці особливості зазвичай відмічають у формулюваннях.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дано $A(-3,-1),B(4,-1),C(0,3),D(-2,1)$ - вершини чотирикутника. Знайти $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty)$, де A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ - нескінченно віддалені точки прямих AB, BC, CD, DA відповідно.

Розв'язання. Розглянемо пучок прямих з центром в будь-якій точці O площини, які проектують точки A, B, C, D. Невласна пряма не належить цьому пучку і перетинає прямі AB, BC, CD, DA в точках A_∞, B_∞, C_∞, D_∞, тому за теоремою 1.3 подвійне відношення $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty)$ дорівнює подвійному відношенню цих прямих, а за формулою (4.1) ми можемо його знайти, якщо знайдемо кутові коефіцієнти прямих: $k_{AB} = 0, k_{CB} = -1, k_{CD} = 1, k_{AD} = 2$. Тоді $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) = \frac{3}{4}$.

Задача 2. Дано шестикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні. Довести, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін шестикутника, належать одному пучку.

Розв'язання. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ - даний шестикутник. Позначимо символами $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ - середини його сторін A_1A_2, $A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ відповідно. Очевидно, даний шестикутник є вписаним в овальну криву другого порядку. За умовою протилежні сторони шестикутника попарно паралельні, значить пряма Паскаля цього шестикутника є невласною. Нехай сторона A_1A_2 перетинає пряму Паскаля в точці P_∞. Тоді $(A_1A_2B_1P_\infty) = -1$, тобто точки P_∞ і B_1 полярно спряжені відносно кривої другого порядку. Аналогічно, точки P_∞ і B_4 теж полярно спряжені відносно цієї кривої, оскільки точка P_∞ є також точкою перетину прямої Паскаля з прямою A_4A_5 (прямі A_1A_2 і A_4A_5 паралельні). Таким чином, пряма B_1B_4 є полярою точки P_∞. Нехай тепер точка Q_∞ є точкою перетину прямої Паскаля із стороною A_2A_3 шестикутника. Точки Q_∞ і B_2, а також точки Q_∞ і B_5 є полярно спряженими відносно кривої, отже пряма B_2B_5 є полярою точки Q_∞. Ми знайшли полюс невласної прямої, яка в даній задачі є прямою Паскаля шестикутника. Цей полюс – точка O перетину прямих B_1B_4 і B_2B_5. Нарешті, розглянемо точку R_∞ перетину сторін A_3A_4 і A_6A_1 шестикутника з прямою Паскаля. Із тих же міркувань її полярою буде пряма B_3B_6. Нам уже відомо, що поляра точки O

проходить через точку R_∞, тому за теоремою взаємності поляр, поляра B_3B_6 точки R_∞ проходить через точку O. Таким чином, всі три прямі B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 належать одному пучку з центром O, що і треба було довести.

Задача 3. Довести, що пряма CM, що містить медіану CM трикутника ABC, і пряма CX, паралельна стороні AB, гармонічно розділяють прямі CA і CB, що містять дві інші сторони трикутника ABC.

Розв'язання. Відомо, що середина M відрізка AB і нескінченно віддалена точка D_∞ прямої AB гармонічно розділяють кінці цього відрізка, тобто $(ABMD_\infty) = -1$. Пряма AB перетинає прямі CA, CB, CM і CX пучка з центром C, в точках A, B, M, D_∞ відповідно, тому ці прямі теж утворюють гармонічну четвірку за теоремою 1.3.

Задача 4. Прямі a і b перетинаються в точці C, прямі c і d містять бісектриси кутів, утворених прямими a і b. Довести, що $(abcd) = -1$.

Розв'язання. Відомо, що прямі c і d, які містять бісектриси кутів, утворених прямими a і b, перпендикулярні. Нехай пряма, паралельна одній із бісектрис, перетинає прямі a і b в точках A і B відповідно. Тоді трикутник ABC рівнобедрений і друга бісектриса буде його бісектрисою і медіаною. За попередньою задачею прямі a, b, c, d утворюють гармонічну четвірку прямих.

Завдання для самостійної роботи

1. Виразити $(ABCD)$ через прості відношення трьох точок: $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$. Довести, що $(ABCD_\infty) = -(ABC)$, $(ABCD_\infty) = -1$ тоді і лише тоді, коли C - середина відрізка AB.

2. Довести, що прямі, які містять бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині C трикутника ABC, перетинають пряму AB в точках, що гармонічно розділяють вершини A і B.

3. Дано чотири точки A, B, C, D афінної прямої, точка C лежить між точками A і B. Довести, що $(ABCD) < 0$ тоді і тільки тоді, коли точка D не лежить між точками A і B.(Пари точок A, B і C, D розділяють одна одну.)

4. Скласти рівняння лінії другого порядку, яка дотикається сторін A_1A_3 та A_2A_3 базисного трикутника $A_1A_2A_3$ у точках A_1, A_2 відповідно і проходить через одиничну точку E проективної системи координат. До якого афінного класу відноситься ця лінія, якщо A_1 і A_2 - невласні точки розширеної площини? До якого афінного класу відноситься ця лінія, якщо A_1 і A_3 - невласні точки проективно-афінної площини?

5. $A(-3,1), B(2,11), C(1,9)$. Найти $D(x, y)$ таку, що $(ABCD) = 2$.

6. Довести, що точки $A(2,-3), B(3,-1), C(4,1), D(5,3)$ колінеарні і знайти всі можливі різні значення їх подвійного відношення.

4.2 Проективно-евклідова площина і основні метричні інваріанти

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти пряму, що є четвертою гармонічною до двох катетів і висоти, опущеної з вершини прямого кута на гіпотенузу нерівнобедреного прямокутного трикутника.

Розв'язання. Введемо декартову систему координат, відносно якої вершини даного прямокутного трикутника $OAB, \angle O = 90^0$ мають координати: $O(0,0), A(a,0), B(0,b)$. Рівняння гіпотенузи AB має вигляд: $bx + ay - ab = 0$, висоти OH: $ax - by = 0$, а координати $H = AB \cap OH$ знайдемо із системи рівнянь $\begin{cases} ax - by = 0, \\ bx + ay - ab = 0 \end{cases}$. Отже, $H\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$. Щоб скористатися формулами (1.5), перейдемо до проективних координат точок: $A(a,0,1)$, $B(0,b,1)$, $H\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}, 1\right)$. Знайдемо координати точки $P(p_1, p_2, p_3)$ прямої AB, для якої $(ABHP) = -1$. За першою з формул (1.5) отримаємо $ap_1 + bp_2 = 0$. За другою з формул (1.5) $(a^2 - b^2)p_1 + ab^2 p_3 = 0$. Таким чином, $p_2 = -\frac{a}{b}p_1$, $p_3 = -\frac{a^2 - b^2}{ab^2}p_1$, тому $P(ab^2, -a^2b, b^2 - a^2)$, або в афінних координатах $P\left(\frac{ab^2}{b^2 - a^2}, \frac{-a^2b}{b^2 - a^2}\right)$. Щоб зрозуміти, як розташована знайдена точка на гіпотенузі AB, розглянемо бісектриси $OM: y = x$ і $ON: y = -x$ внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині O відповідно. Координати точок M, N є розв'язками систем рівнянь: $\begin{cases} y = x, \\ bx + ay - ab = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y = -x, \\ bx + ay - ab = 0 \end{cases}$. Отримаємо $M\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$, $N\left(\frac{ab}{b-a}, -\frac{ab}{b-a}\right)$. Замітимо, що $\frac{2ab^2}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{b-a}$, $\frac{-2a^2b}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{b-a}$. Це означає, що точка P є серединою відрізка MN. Подвійне відношення $(ABHP)$ дорівнює подвійному відношенню прямих OA, OB, OH, OP.

Задача 2. Точка A – зовнішня відносно кола g з центром O. Через точку A проведені всі можливі січні до кола g, відмінні від прямої AO. Довести, що точки перетину дотичних до кола g у точках його перетину з кожною січною належать одній прямій, перпендикулярній до прямої AO.

Розв'язання. Позначимо символами M, N точки перетину однієї із січних з колом. Точка H прямої MN така, що $(AHMN) = -1$ належить полярі точки A. Полярою точки B перетину дотичних до кола в точках M, N є пряма MN, причому за теоремою взаємності поляр пряма BH і є полярою точки A.

Задача 3. Через внутрішню точку C круга проведені три хорди AA', BB' та MN. Точка C є серединою хорди MN, яка перетинає відрізки AB і $A'B'$ у точках P і Q. Довести, що точка C - середина відрізка PQ.

Розв'язання. Проведемо дотичні до кола в точках M і N. Точка F їх перетину буде полюсом прямої MN. Четвірка прямих $FM, FN, FC, FL \parallel MN$ є гармонічною, оскільки за умовою точка C є серединою відрізка MN. Нехай пряма AB перетинає пряму FL в точці G. Поляра точки G за теоремою взаємності поляр повинна проходити через точку C.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що довільна пара спряжених діаметрів гіперболи гармонічно розділяється її асимптотами.

2. Пряма m не має спільних точок з колом g. Пряма, яка з'єднує точки дотикання дотичних, проведених з точки $A \in m$ до кола g, перетинає пряму m у точці B. Довести, що пряма, яка з'єднує точки дотикання дотичних, проведених із точки B до кола g, проходить через точку A.

Вказівка. Скористатись теоремою взаємності поляр.

3. Пряма m не має спільних точок з колом g. Довести, що прямі, які з'єднують точки дотикання дотичних, проведених з любої точки $A \in m$ до кола g, проходять через одну і ту ж саму точку.

Вказівка. Скористатись теоремою взаємності поляр.

4. Точка A – внутрішня відносно кола g з центром $O, A \neq O$. Через точку A проведені всі можливі хорди. Довести, що точки перетинання дотичних до кола g у кінцях кожної хорди лежать на одній прямій, перпендикулярній до прямої AO.

5. В колі проведено дві паралельні хорди і в їх кінцях – дотичні до кола. Довести, що точки перетину цих дотичних належать одній прямій, яка перпендикулярна цим хордам і проходить через центр кола.

6. В точку A круглої арени поставлений м’яч. В якому напрямку слід його послати, щоб, відбившись два рази від бар’єру арени, він повернувся у точку A?

4.3 Застосування проективної геометрії до розв'язування задач елементарної математики

Наведемо список задач із шкільного курсу геометрії, при розв'язуванні яких можна застосовувати методи проективної геометрії. Розв'язуючи такі задачі, слід доповнити площину невласною прямою і отриману таким чином розширену площину розглядати як модель проективної площини.

1. Довести, що середня лінія трикутника паралельна основі.

2. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Вказівка. Застосувати теорему Дезарга.

3. Довести, що пряма, яка з'єднує точку перетину бічних сторін трапеції з точкою перетину її діагоналей, ділить обидві основи трапеції навпіл.

4. На сторонах CA, CB трикутника ABC взято точки M, N такі, що $(CBM) = (CAN)$. Довести, що точка $O = AM \cap BN$ належить медіані трикутника ABC, яка проходить через вершину C.

5. Довести, що прямі, які містять діагоналі паралелограма, гармонічно розділяють прямі, що проходять через центр паралелограма паралельно його сторонам.

6. На афінній (або евклідовій) площині дані відрізок AB і його середина C. Через точку M, яка не належить прямій AB провести пряму, паралельну прямій AB, користуючись тільки лінійкою.

7. Дано дві паралельні прямі. Користуючись тільки лінійкою, побудувати

1) середину відрізка, заданого на одній із даних прямих;

2) пряму, яка проходить через дану точку і паралельна даним прямим.

8. Прямі AB та CD – спряжені діаметри еліпсу g, A, B, C, D належать еліпсу. Побудувати:

1) ще одну точку цього еліпсу;

2) дотичну до еліпсу в побудованій точці.

9. Дано паралелограм $ABCD$. З даної точки $M \in AB$ провести дотичну до еліпса, вписаного в паралелограм $ABCD$ так, що точками дотику є середини сторін паралелограма (зображення еліпса не задано).

10. Дано паралелограм $ABCD$. Через середину відрізка AB проведена пряма m. Знайти точки перетину цієї прямої з еліпсом, вписаним в паралелограм $ABCD$ так, що середини його сторін є точками дотику (зображення еліпсу не задано).

11. Дано коло g і його центр O. Через дану точку P провести пряму, паралельну даній прямій m, користуючись тільки лінійкою.

12. Дано коло g і його центр O. Через дану точку P провести пряму, перпендикулярну даній прямій m, користуючись тільки лінійкою.

13. Дано шестикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. Довести, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін шестикутника, належать одному пучку.

14. Дано асимптоту гіперболи, одну дотичну до неї з її точкою дотикання і одну точку гіперболи. Побудувати ще одну будь-яку точку цієї гіперболи.

15. Із даної точки M евклідової площини провести дотичну до даного кола g за допомогою тільки однієї лінійки.

Питання для самоконтролю:

1. Означення проективно-афінної площини.
2. Формули проективно-афінних перетворень.
3. Означення паралельних прямих на проективно-афінній площині.
4. Просте відношення трьох точок прямої як інваріант проективно-афінних перетворень.
5. Зв'язок простого відношення трьох точок із подвійним відношенням чотирьох точок прямої.

Індивідуальне завдання(зразок)

1. На розширеній площині знайти $(ABCD)$, якщо: а) $A(2), B(3), C(-2), D(-3)$; б) $A(1,0), B(2,3), C(5,-2)$, D - невласна точка прямої.

2. На розширеній прямій в проективній системі координат, яка визначається репером $R=(A_1, A_2, E)$, точка E є невласною. Знайти проективні координати: а) середини відрізку A_1A_2; б)точки, що ділить відрізок A_1A_2 у відношенні l.

3. Одинична точка E проективного репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ на розширеній площині є точкою перетину медіан координатного трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти координати невласних точок сторін координатного трикутника і координати невласних точок його медіан відносно репера R.

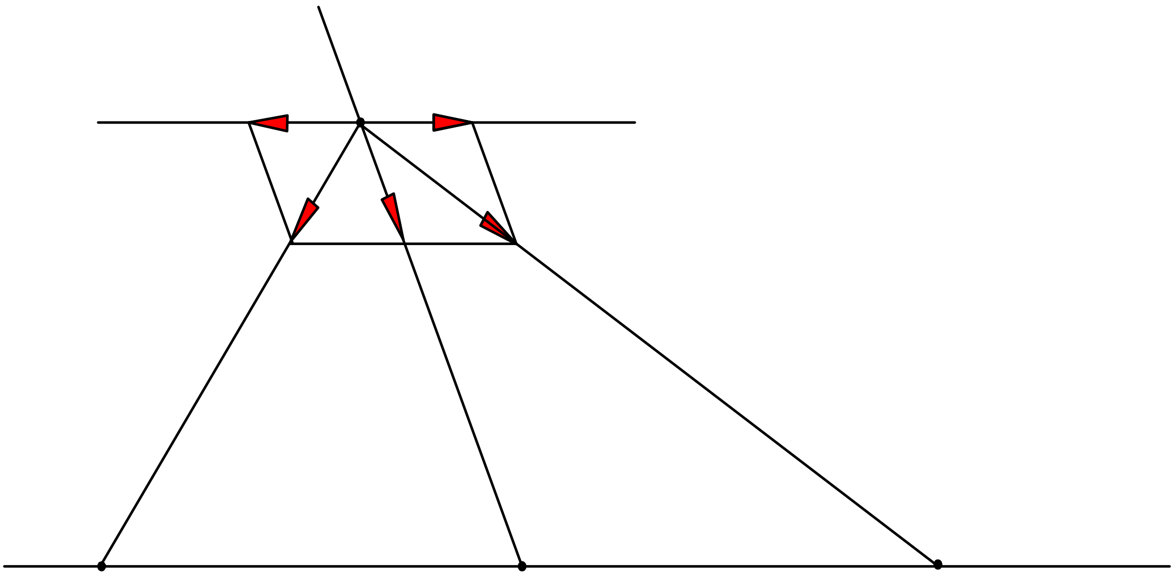
Вказівка. Скористатися тим, що система векторів $\bar{a}=\frac{1}{3}\overline{OA_1}$, $\bar{b}=\frac{1}{3}\overline{OA_2}$, $\bar{c}=\frac{1}{3}\overline{OA_3}$, $\overline{OE}$ є узгодженою відносно репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$.

4. На прямій дані три точки A, B, C. Побудувати на цій прямій току D, таку, що $(ABCD)=2$.

5. На проективній прямій задані чотири точки A, B, C, D. Довести, що на цій прямій знаходяться такі дві точки P і Q, що гармонічно розділяють як пару A, B, так і пару C, D, тоді і тільки тоді, коли пара C, D не розділяє пару A, B.

6. Скласти формули проективного перетворення, яке точки $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $E(1:1:1)$ переводить відповідно в точки $B_1(1:0:-1)$, $B_2(2:1:0)$, $B_3(0:0:1)$, $E'(3:1:0)$. Чи є п'ятикутники $A_1A_2A_3EM$ і $B_1B_2B_3E'N$, де $M(1:1:2)$, $N(1:2:1)$ проективно-еквівалентними?

7. Скласти задачу за рисунком



8. На розширеній площині $\bar{s}$ задано проективний репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, вершини $A_a\ (a = 1,2,3)$ координатного трикутника і одинична точка E - власні точки. Побудувати наступні точки по їх координатам в репері R: $M(1,2,0), N(0,-2,-1), P(1,2,1), Q(0,-4,0)$.

9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(2,1)$, полярно спряжену прямій $4x - y + 30 = 0$ відносно лінії $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$.

10. Скласти рівняння лінії другого порядку, для якої вісь Oy є полярою точки $(5,0)$, вісь Ox - полярою точки $(0,3)$, і яка проходить через точки $(1,2)$, і $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

11. Скласти рівняння лінії другого порядку, яка проходить через точки $A(1,1), B(1,-1), O(0,0)$ при умові, що точка $(3,1)$ є полюсом прямої AB.

12. У невироджену лінію другого порядку вписаний трикутник. Довести, що пряма, полярно спряжена з однією із його сторін, перетинає обидві інші сторони в полярно спряжених точках.

13. Довести теорему: якщо $ABCD$ - повний чотирикутник з вершинами на овальній кривій другого порядку, то кожна його діагональна точка є полюсом протилежної діагоналі.

14. Дано репери $R=(A,B,C,E)$ і $R'=(A',B',C',E')$. Координатні трикутники цих реперів задовольняють теорему Дезарга і S - їх дезаргова точка. Довести, що проективне перетворення, яке відображає перший репер на другий, є гомологією з центром S, віссю якої є дезаргова пряма цих трикутників.

15. Дано вісь споріднення і трикутник ABC. Встановити споріднення так, щоб трикутник $A'B'C'$, споріднений з даним, був прямокутним з прямим кутом при вершині B', а його висота $B'D'$ була споріднена з висотою BD даного трикутника.

16. Намалюйте конфігурацію Дезарга у випадку, коли точки A і C' невласні точки.

17. Вершинами повного чотиривершинника є невласні точки осей координат і точки $(1,0)$ і $(0,1)$. Знайдіть його діагональні точки і зробіть рисунок.

18. Дано афінні координати трьох власних точок розширеної прямої: $A(3), B(-1), C(2)$. Знайти $(ABCD_\infty)$, де D_∞ - невласна точка прямої.

19. Знайти рівняння кривої другого порядку, яка проходить через точки $A_1(0:1:0)$, $A_2(0:0:1)$, $A_3(1:1:-1)$, $A_4(2:4:1)$, $A_5(1:-1:1)$. Визначити її проективний тип.

20. Знайти рівняння дотичних до кривої $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, проведених з точки $D(1:2:1)$.

Типове завдання (зразок)

Задача 1. Замініть зірочки в матриці $(a_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ * & n & * \\ * & -3 & -1 \end{pmatrix}$ числами так, щоб отримати матрицю загального рівняння кривої другого порядку на проективній площині, n - номер варіанта.

1. Запишіть рівняння кривої;
2. Чи буде ця крива невиродженою?
3. Візьміть довільну точку P, яка не належить кривій;
4. Складіть рівняння поляри точки P;
5. Візьміть довільну точку Q на цій полярі;
6. Складіть рівняння прямої PQ;
7. Знайдіть точки M_1 і M_2 перетину прямої PQ і кривої;
8. Обчисліть подвійне відношення (PQM_1M_2);
9. Визначте проективний тип кривої, звівши її рівняння до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Задача 2. Знайдіть координати вершин якого-небудь автополярного трикутника відносно кривої із задачі 1. Знайдіть проективне перетворення, яке приводить рівняння кривої до канонічного вигляду.

Задача 3. При якому l крива другого порядку буде виродженою?

1. $x_1^2 + lx_2^2 + (l+1)x_3^2 + 2lx_1x_2 + 2lx_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;
2. $lx_1^2 + lx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;
3. $(l+1)x_1^2 + x_2^2 + lx_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$;
4. $x_1^2 + (l+1)x_2^2 + lx_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$;
5. $x_1^2 + x_2^2 + lx_3^2 + x_1x_2 + 2(l+1)x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$;
6. $lx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2(l+1)x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2lx_1x_2 + 2lx_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;
8. $lx_1^2 + x_2^2 + lx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;

9. $lx_1^2 + x_2^2 + (l+1)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2lx_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;

10. $x_1^2 + x_2^2 + (l+1)x_3^2 + 2lx_1x_2 + 2lx_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

Задача 4. Знайти точки перетину кривої $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ з прямою AB, яка проходить через точки $A(n:0:1)$ і $B(1:-2n:0)$, n - номер варіанта.

Задача 5. На прямій $a(2:-n:-9)$ знайти точку, яка є спряженою до точки $A(-1:2:n)$ відносно кривої $x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$, n - номер варіанта.

Задача 6. Написати формули перетворення координат, якщо точки нового репера $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ в репері $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ мають координати: $A_1'(1:1:0)$, $A_2'(0:-n:2)$, $A_3'(1:1:1)$, $E(2:3:-5)$. Знайти в репері R' координати точки A, заданої в репері R координатами $(-1:2n:3)$, n - номер варіанта

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. В 2 ч. Ч.2.- М.: Просвещение, 1987. - 352 с.
2. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. Харків.: Вид-во «Основа» при ХДУ, 1993. – 192 с.
3. Величко І.Г. Проективна геометрія в задачах. Запоріжжя: ЗДУ, 2003. – 32 с.
4. Глаголев Н.А. Проективная геометрия. – М.: 1963. – 359 с.
5. Кокстер Х.С.М. Действительная проективная плоскость. М.: 1959. – 127 с.
6. Понарин Я.П. Аналитическая геометрия проективной плоскости. – Киров, 1987. – 137 с.
7. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
8. Сборник задач по геометрии: Учеб. пособие для студентов мат. фак. пед. ин-тов /В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая и др.; под ред. В.Т.Базылева. - М.: Просвещение, 1980. – 238 с.
9. Сборник задач по геометрии: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов, ч.2 /Л.С.Атанасян, М.В.Васильева, Е.Е.Вересова и др.; под ред. Л.С.Атанасяна. - М.: Просвещение, 1975. – 176 с.
10. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 328 с.
11. Яглом И.М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч.1., М.: 1962. – 212 с.

Додаткова:

1. Егоров И.П. Геометрия, М.: Наука, 1979. – 255 с.
2. Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. Киров, 1986. – 117 с.
3. Понарин Я.П., Скопец З.А. Перемещения и подобия плоскости. К.: Рад.шк., 1981. – 178 с.
4. Скопец З.А. Геометрия тетраэдра. М.: Наука, 1982. – 329 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Стєганцев Євгеній Вікторович
Стєганцева Поліна Георгіївна

ІНВАРІАНТИ ПРОЕКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Навчальний посібник до індивідуальної та самостійної робіт для студентів III курсу математичного факультету

Рецензент *А.К. Приварников*
Відповідальний за випуск *Є.В.Стєганцев*
Коректор *П.Г. Стєганцева*